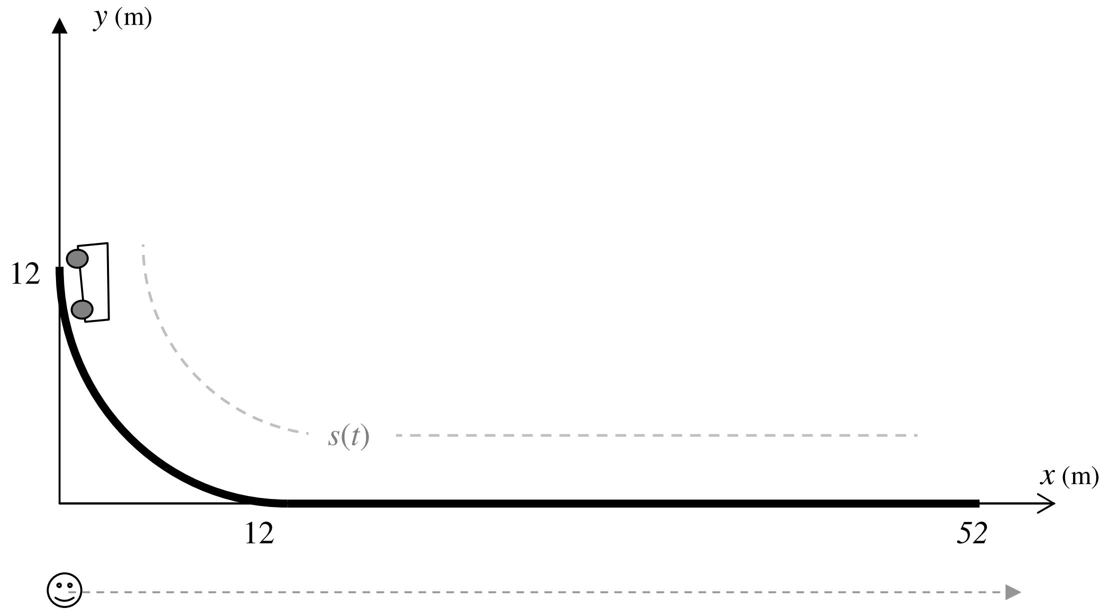
Un chariot partant d'une vitesse nulle parcourt une trajectoire circulaire suivie d'une trajectoire linéaire, comme sur la figure. Le long de la trajectoire courbe sa vitesse est donnée par $v(t) = 1.1t$ m/s. Sur la partie linéaire son mouvement est un MRUA pour s'immobiliser. $s(t)$ représente sa position en mètres le long de sa trajectoire en fonction du temps. Un observateur filmera la scène en se maintenant toujours directement en dessous du chariot. Sa position en fonction du temps sera exprimé par $X_o(t)$

Vous, comme ingénieur, on vous demande de trouver les équations et graphiques de $s(t)$,$v(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ et $X_o(t)$.



Solution (il y a plusieurs façons d'aborder le problème). Voici mes étapes.

A) Le long du quart de cercle, puisque sa vitesse $v(t) = 1.1t$, ceci est alors un MRUA le long de sa trajectoire s(t). Par conséquent s(t) = 0 +0t + 1.1 $t^2/2$ = $0.55t^2$

Trouvons le temps de parcours sur le quart de cercle. Distance parcourue = $2\pi*12/4 = 6\pi$ mètres. De s(t) = $6\pi = 0.55t^2$ d'où t = 5.854222396 sec.
Sa vitesse finale est alors 1.1*5.85… = 6.439644636 m/s. On a donc :

$\boldsymbol{s(t) = 0.55t^2}$ et $\boldsymbol{v(t) = 1.1t}$ pour $\boldsymbol{t = 0}$ **à 5.854222396** sec

B) Section rectiligne. Le chariot a une vitesse initiale de ~6.43, une vitesse finale de 0, sur une longueur de 52-12 = 40 mètres. Étant un MRUA on a alors $v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta s$ d'où on obtient que son accélération a = -0.518362788 m/s^2. De $v_f = v_i + a\Delta t$ on trouve que le temps de parcours le long de la trajectoire rectiligne est de Δt = 12.42304576 s.

Trouvons maintenant s(t) et v(t) le long de la trajectoire rectiligne où t est le temps a partir de ZERO (au tout début de son parcours).

De v(t) = v? + a*t → v(t) = v? – 0.518t → v(5.85) = 6.43 = v? -.518*5.85. Donc la constante v? = 9.474255679. Donc v(t) = 9.47 - .518t. Vérifions si à l'instant t = 5.85+12.42 = 18.2772616 la vitesse est nulle: v(18.27) = 9.47 - .518*(18.27) =? 0, Oui!

s(t) maintenant…. s(t) = s? + 9.47t - .518t^2/2. Mais on a la condition s(5.85) = 6 π. Donc 6π = s? + 9.47(5.85) - .518$(5.85)^2$/2 d'où s? = -27.7321999. Donc s(t) = -27.73 + 9.47t - .518t^2/2. Vérifions si s(18.27) = 6 π + 40 :
6 π + 40 =? -27.73 + 9.47(18.27) - .518$(18.27)^2$/2 … Oui!

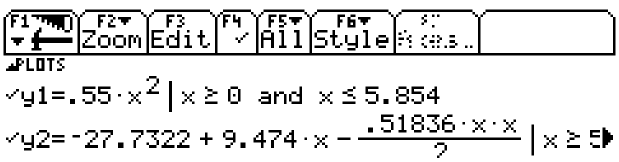
C) Résumons. De A) at B) on a :

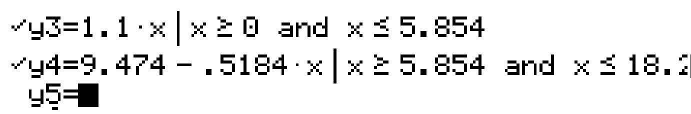
***s*(*t*) = 0.55*t*²** pour t ∈ [0, 5.854222396]
s(*t*) = -27.7321999 + 9.474255679*t* -0.518362788*t*²/2 pour t ∈ [5.85, 18.277].

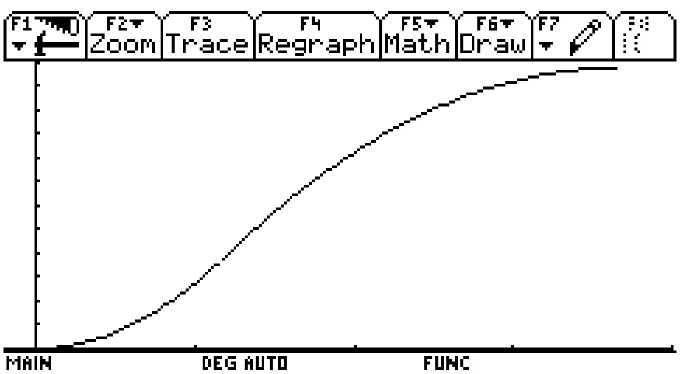
et

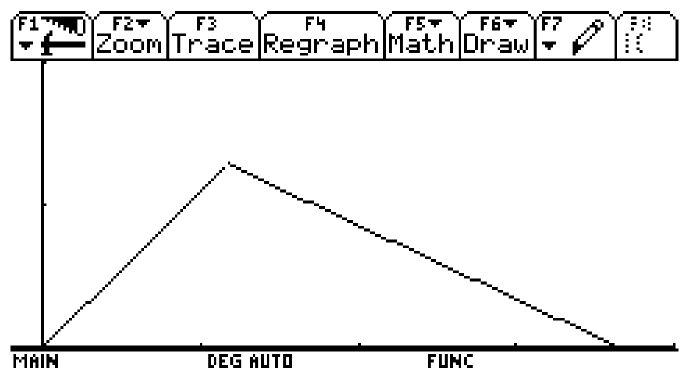
v*(*t*) = 1.1*t pour t ∈ [0, 5.854222396]
v*(*t*) = 9.474255679 - 0.518362788*t pour t ∈ [5.85, 18.277].

Entrant ceux-ci dans la TI nous obtenons les graphes…. (tous les graduations sont de 5 unites)

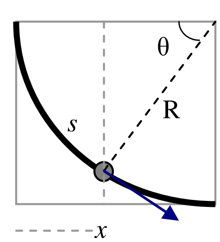








D) Trouvons la position x(t) de chariot ainsi que v_x(t). Puisque l'observateur doit toujours demeurer directement sous le chariot, la position $X_o(t)$ de l'observateur correspond aussi à x(t). $X_o(t) = x(t)$.



Soit x entre 0 et 12 mètres. Géométrie ci-contre: $x = 12 - 12\cos(\theta)$, s = R θ = 12θ (θ en rad, s = longueur d'arc = notre s(t) !) donc s/12 = θ. Donc $x = 12 - 12 \cos(s/12)$, d'où

***x*(t) = X₀(t)** = 12 (1- cos(.0458333333 t^2)) mètres, où le cos sera évalué en rad et ce pour t ∈ [0, 5.854222396].

Le v_x(t) correspondant est la composante x du vecteur vitesse. Sachant que ce vecteur est tangent a la trajectoire, de grandeur v(t) = 1.1t et unpeu d e géométrie, nous trouvons notre v_x(t). Nous pouvons aussi utiliser la dérivé de x(t) qui est plus simple…

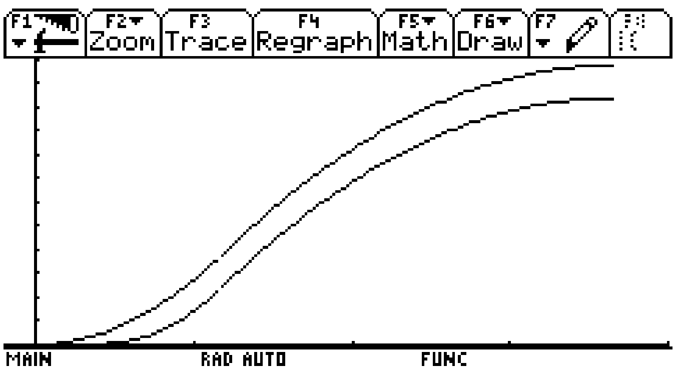
$\boldsymbol{v_x}$**(t)** = 1.1 *t* sin(.0458333333 t^2) où le sin sera évalué en rad et t $\in$ [0, 5.854222396].

Sur la partie rectiligne, où pour t $\in$ [5.85, 18.277], x(t) = s(t) - 6π +12 (pourquoi?).

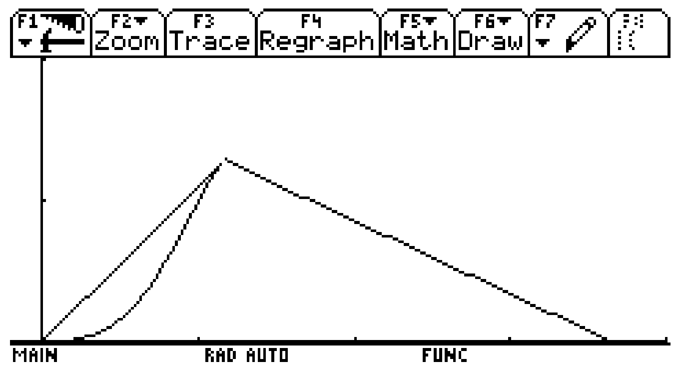
Donc $\boldsymbol{x}$**(t)** = $\mathbf{X_o}$**(t)** = -34.58175582 + 9.474255679t -0.518362788t^2/2 pour t $\in$ [5.85, 18.277].
Et le v_x(t) est justement le v(t) = 9.474255679 - 0.518362788t (pourquoi?).

Donc **v(t)** = 9.474255679 - 0.518362788t pour t $\in$ [0, 5.854222396].

s(t) et x(t) (courbe sup. et inf. resp.)



v(t) et v_x(t)



E) y(t) ? …. A vous de trouver….