1.2 La mesure et son interprétation

1.2.1 Introduction

Les modèles scientifiques reposent sur l'*observation*. Bien qu'il soit utile de réaliser des observations *qualitatives*, les scientifiques, les ingénieurs et les techniciens peuvent difficilement se passer d'*observations quantitatives*, ou ***mesures.***

La ***grandeur physique*** est une caractéristique variable qui peut être évaluée par une *mesure*. La mesure est une observation quantitative effectuée par comparaison avec un *étalon*.

Le choix de la méthode de mesure employée pour évaluer une grandeur dépend de plusieurs facteurs : en premier, il faut tenir compte de la qualité désirée, certaines applications nécessitant une très grande qualité, alors que des mesures approximatives sont suffisantes dans d'autres cas. Le coût et la disponibilité des méthodes et des appareils sont aussi des facteurs à considérer.

Dans cette section, nous verrons comment exprimer correctement une grandeur physique avec un nombre approprié de chiffres significatifs, comment choisir une incertitude sur une mesure et comment estimer l'incertitude sur le résultat d'un calcul. Nous donnerons également des indications pour vous guider dans l'interprétation de résultats expérimentaux.

1.2.2 Représenter les nombres en sciences

1.2.2.1 Notation scientifique

Il arrive fréquemment que l'estimation d'une grandeur physique soit un nombre très grand ou très petit. Par exemple, le rayon atomique calculé d'un atome d'hélium est 0,000 000 000 031 m, et la masse de la Terre est environ 5 972 000 000 000 000 000 000 000 kg.

La notation décimale n'est pas très « efficace » pour exprimer ces grandeurs. On a alors recours à la *notation scientifique.* La notation scientifique est une convention permettant de représenter et de manipuler les nombres. On écrit la grandeur sous forme d'un produit, une multiplication, entre un nombre et une puissance de 10.

Le nombre s'écrit avec un seul chiffre avant la virgule et ce chiffre ne peut pas être un zéro. Nos exemples précédents deviennent :

- le rayon atomique calculé de l'atome d'hélium : $3{,}1 \times 10^{-11}$ m
- la masse de la Terre : $5{,}972 \times 10^{24}$ kg.

Notation « ingénieur »

Plusieurs calculatrices scientifiques proposent le « mode ingénieur » pour exprimer les nombres. Le mode ingénieur ressemble à la notation scientifique, mais à la différence que la puissance de 10 doit obligatoirement être un multiple de 3. Dans ce cas, il peut y avoir plus d'un chiffre avant la virgule décimale.

Le rayon atomique de l'hélium s'écrirait : 31 x 10^{-12} m en mode ingénieur. L'avantage de cette notation est qu'elle permet de faire un lien direct avec les préfixes du système international : 10^{-12} est la valeur du préfixe « pico », donc la valeur s'écrit aussi 31 pm.

1.2.2.2 Ordre de grandeur

On entend souvent l'expression « ordre de grandeur ». Qu'en est-il exactement ?

De manière pratique, l'ordre de grandeur est la puissance de 10 lorsque le nombre est exprimé avec la notation scientifique. Selon cette définition, l'ordre de grandeur du rayon de l'atome d'hélium est 10^{-11} m et celle de la masse de la Terre 10^{24} kg.

Lorsque le nombre est simplement écrit avec la notation décimale, l'ordre de grandeur correspond à la position du chiffre le plus à gauche qui n'est pas un zéro. Quelques exemples :

- dans le nombre 341, le chiffre le plus à gauche est le 3, il occupe la position des centaines, ou 10^2 ;
- dans le nombre 0,00678, le chiffre le plus à gauche qui n'est pas un zéro est le 6, il occupe la position des millièmes, ou 10^{-3}.

Plus précisément, l'ordre de grandeur est un intervalle dans lequel se trouve la valeur, intervalle borné par les puissances de 10 qui se trouvent sous et au-dessus de la valeur.

- 341 se trouve entre 10^2 et 10^3 ;
- 0,00678 se trouve entre 10^{-3} et 10^{-2}.

1.2.3 Chiffres significatifs

Lorsque l'on effectue des calculs avec une calculatrice ou un ordinateur, la machine est capable d'afficher un grand nombre de chiffres. Cependant, lorsque ces calculs impliquent des mesures, la précision des résultats n'est jamais infinie. Il est nécessaire de connaître les méthodes avec lesquelles les scientifiques, en génie comme dans d'autres disciplines, sont capables d'exprimer leur niveau de confiance envers leurs résultats. Les chiffres significatifs sont un des outils utilisés dans ce but.

1.2.3.1 Définition des chiffres significatifs

Les chiffres significatifs d'une grandeur sont les chiffres sûrs, plus un seul chiffre incertain. Le chiffres incertain est celui qui est du même ordre de grandeur que l'incertitude. Les chiffres sûrs sont les chiffres qui se trouvent à gauche du chiffre incertain.

Pour interpréter cette définition, il est nécessaire de connaître la notion d'incertitude.

L'incertitude est une grandeur, exprimée avec un « plus ou moins » ($\pm$) qui définit un intervalle autour de l'estimation de la grandeur. Cet intervalle contient l'ensemble des valeurs qui auraient pu être mesurées si on avait répété l'expérience dans les mêmes conditions, avec les mêmes instruments et les mêmes méthodes.

On mesure un volume d'eau avec un cylindre gradué. La lecture du volume est 34,5 mL. La personne estime cependant qu'il aurait été possible de lire n'importe quel volume entre 34,0 et 35,0 mL. La mesure s'écrira alors :

$$34{,}5 \text{ mL} \pm 0{,}5 \text{ mL}$$

Si on applique à cet exemple la définition des chiffres significatifs, on constate que l'ordre de grandeur de l'incertitude le dixième : le chiffre incertain est celui qui est à la même position, c'est-à-dire le 5. Les chiffres 3 et 4, à gauche du chiffre incertain, sont les chiffres sûrs.

À ce moment, nous n'avons pas vu comment déterminer une incertitude sur une mesure. Nous le présenterons plus loin.

1.2.3.2 Compter les chiffres significatifs

Les chiffres significatifs permettent d'exprimer, d'une manière globale et simple, le degré de confiance envers la valeur d'un résultat. Écrire beaucoup de chiffres significatifs signifie que l'on croit possible de distinguer de manière très précise le phénomène observé. On devra écrire moins de chiffres dans le cas où le résultat n'est pas très précis. Pour ce faire, il faut être capable d'arrondir correctement une grandeur à un nombre donné de chiffres significatifs.

Le nombre de chiffres significatifs est le nombre de chiffres sûrs, plus un, le chiffre incertain. Une méthode simple pour compter les chiffres écrits est:

1. on part de la gauche et on commence à compter à partir du premier chiffre qui n'est pas un zéro;
2. On compte tous les chiffres écrits ;
3. Les zéros écrits à la droite (fin) du nombre, s'ils se trouvent à droite de la virgule, comptent toujours.

Tous les exemples suivants comptent 4 chiffres significatifs :

- 53,75
- 0,05661
- 2,340

Le cas d'un nombre terminé par les zéros, mais qui n'a pas de chiffre après la virgule décimale, est ambigu. On voit souvent des notations de ce type, 2000 ou 400 par exemple. L'usage de la notation scientifique permet de clarifier :

- Si on veut 4 chiffres significatifs, on écrit $2{,}000 \times 10^3$
- Si on veut 1 chiffre significatif, on écrit 2×10^3.

1.2.3.3 Arrondir

Arrondir une valeur ne signifie pas simplement « effacer » les chiffres en trop (cela s'appelle *tronquer*). Tronquer introduit un biais systématique qu'un scientifique voudra éviter.

La méthode pour arrondir demande d'abord d'identifier le chiffre incertain : on se rappelle que c'est le dernier chiffre significatif, à la suite des chiffres sûrs.

Si on veut arrondir un nombre à un nombre donné de chiffres significatifs, on suit les règles suivantes :

1. ***si la valeur des chiffres qui suivent le chiffre incertain est inférieure à 50% de l'ordre de grandeur du chiffre incertain, on laisse le chiffre incertain tel quel ;***
2. ***si la valeur des chiffres qui suivent le chiffre incertain est supérieure à 50% de l'ordre de grandeur du chiffre incertain, on ajoute un (1) au chiffre incertain.***

Par exemple, on veut arrondir le nombre 19,578 à 3 chiffres significatifs. On compte trois chiffres à partir de la gauche. Le 1 et le 9 sont les chiffres sûrs, et le « 5 » est le chiffre incertain.

La position du chiffre incertain est le dixième ; 50% de 0,1 est 0,05. On compare maintenant les chiffres qui suivent le « 5 » à cette valeur :

$$0{,}078 > 0{,}05$$

Les chiffres qui suivent le chiffre incertain ont une valeur supérieure à 50% de l'ordre de grandeur du chiffre incertain : on applique la règle 2 et on ajoute « 1 » au chiffre incertain. La valeur arrondie est

$$19{,}6$$

Un deuxième exemple : on veut arrondir 9847 à deux chiffres significatifs. En comptant à partir de la gauche, on voit que le « 9 » est le chiffre sûr et le « 8 » le chiffre incertain. La position du 8 est la centaine : 50% de 100 est 50. Or, les chiffres qui suivent le chiffre incertain, 47, ont une valeur inférieure à 50, donc on applique la règle 1 et on laisse le chiffre incertain tel quel. Pour que le résultat soit clair, on utilise la notation scientifique :

$$9{,}8 \times 10^3$$

Que faire si la valeur des chiffres qui suit est *égale* à 50% de l'ordre de grandeur du chiffre incertain ? Plusieurs méthodes existent. La première consiste à laisser le chiffre incertain tel quel, ou à ajouter 1, au hasard (on peut tirer à pile-ou-face…). Pour arrondir 34,65 à trois chiffres significatifs, on pourrait alors écrire 34,6 ou 34,7, l'un ou l'autre étant correct. Cette méthode est appropriée si on doit arrondir quelques valeurs, au laboratoire par exemple.

Avec l'avènement des calculs par ordinateurs, la norme IEE754 contient une règle dans le but d'éviter un biais systématique (toujours arrondir à la hausse ou à la baisse) lorsque la machine exécute un grand nombre de calculs en chaîne en « point flottant ». Cette norme prévoit qu'on applique la procédure suivante lorsqu'on se trouve dans le cas d'égalité : si le chiffre incertain est impair, on lui additionne 1, si le chiffre incertain est pair, on le laisse tel quel.

1.2.4 La qualité d'une mesure

L'interprétation des résultats expérimentaux est une partie importante dans un rapport de laboratoire, que ce soit en contexte d'apprentissage ou professionnel. Il est important de construire l'argumentation sur des critères objectifs, comme des normes ou des cibles contractuelles. Les opinions personnelles et les qualificatifs vagues doivent être évités.

Pour débuter, nous allons définir quatre concepts qui peuvent être employés pour décrire la qualité d'une mesure.

Ces concepts sont l'exactitude, l'erreur de mesure, la fidélité et la justesse. Les définitions sont basées sur le guide *Vocabulaire international de la métrologie*[1] publié par le Bureau international des poids et mesures.

1.2.4.1 L'exactitude de mesure

L'**exactitude** est la qualité d'une mesure qui est rapprochée de la *valeur vraie*. La valeur vraie est la grandeur qui aurait due être obtenue par la mesure. Cependant, elle ne peut jamais être

---

[1] BIPM guide *Vocabulaire international de la métrologie- Concepts fondamentaux et généraux et termes associés,* 3e édition, 2008, consulté à https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf le 28 octobre 2020

connue, c'est un concept théorique. Par conséquent, il n'est pas possible de déterminer l'exactitude d'une mesure.

1.2.4.2 L'erreur de mesure

Il est important de distinguer la valeur vraie de la **valeur de référence**. Une valeur de référence est une estimation de la valeur qui est admise et qui sert de base de comparaison. Ce peut être une grandeur publiée dans la littérature scientifique, des manuels, des tables, comme la valeur de l'accélération gravitationnelle terrestre ou la masse molaire du carbone. Cela peut être aussi une valeur fournie par un organisme de standardisation…ou le professeur ! Contrairement à la valeur vraie, qui n'est jamais connue, la valeur de référence est bien réelle et peut servir à construire une interprétation des résultats.

L'**erreur de mesure** est la différence entre une mesure et la valeur de référence. On peut aussi l'exprimer sous la forme d'une erreur relative, en divisant la différence entre la mesure et la valeur de référence par la valeur de référence ; on l'exprime en valeur absolue :

$$\text{erreur relative} = \left| \frac{\text{valeur de référence} - \text{valeur mesurée}}{\text{valeur de référence}} \right|$$

L'erreur relative est souvent notée en pourcentage.

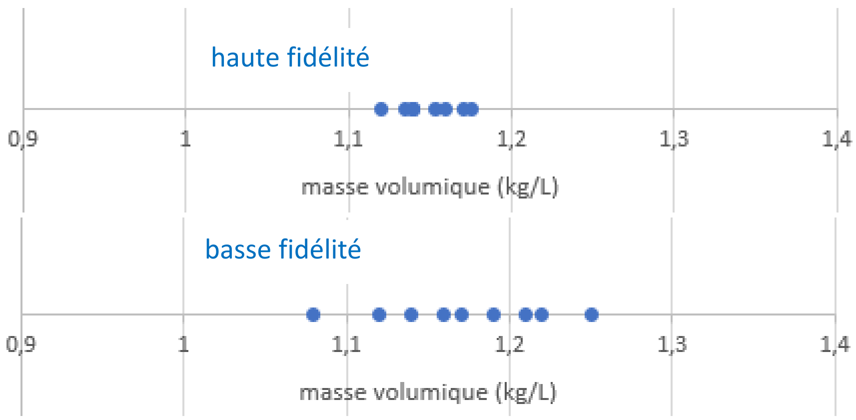
> ***Exemple 1.2.1***
>
> Une équipe mesure la viscosité de l'eau à 20°C et trouve 0,0009 Pa·s. La valeur de référence, selon Wikipedia, est 1×10^{-3} Pa·s.
>
> L'erreur relative est donc :
>
> $$\text{erreur relative} = \left| \frac{1\times10^{-3} - 0,0009}{1\times10^{-3}} \right| = 10\%$$

L'erreur de mesure est constituée de deux composantes, l'erreur systématique et l'erreur aléatoire. L'**erreur systématique** a comme caractéristique principale d'être constante lorsqu'on répète les mesures dans les mêmes conditions avec le même appareil. Dans quelles circonstances a-t-on une erreur systématique ? Par exemple, si le zéro de l'appareil n'est pas bien réglé ou si le réactif chimique utilisé dans l'expérience n'a pas le degré de pureté indiqué.

L'**erreur aléatoire** a comme caractéristique d'être imprévisible et de varier d'une mesure à l'autre lorsque les mesures sont répétées. L'erreur aléatoire peut être causée par de multiples facteurs, comme la résolution de l'appareil, le contexte expérimental, l'utilisateur et même le phénomène à observer. L'erreur aléatoire peut être évaluée en répétant les mesures un grand nombre de fois et en réalisant une étude statistique des données. Cette méthode est employée dans les laboratoires professionnels, entre autres pour évaluer la qualité d'un appareil ou d'une méthode de mesure.

1.2.4.3 La fidélité de mesure

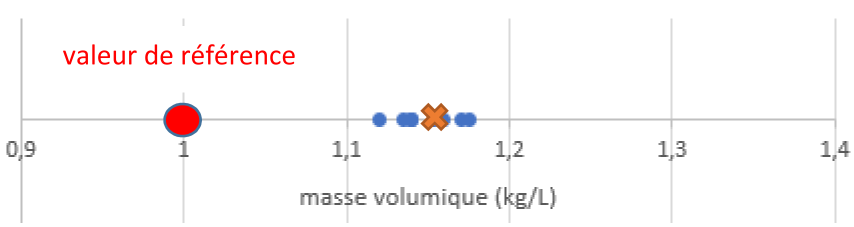
La **fidélité** est la qualité d'un ensemble de mesures répétées qui sont rapprochées les unes des autres. Quand on parle de mesures répétées, on veut dire que l'on mesure le même phénomène, avec les mêmes appareils, dans les mêmes conditions.



L'exemple du haut montre une plus haute fidélité (points plus rapprochés) que l'exemple du bas (points plus dispersés).

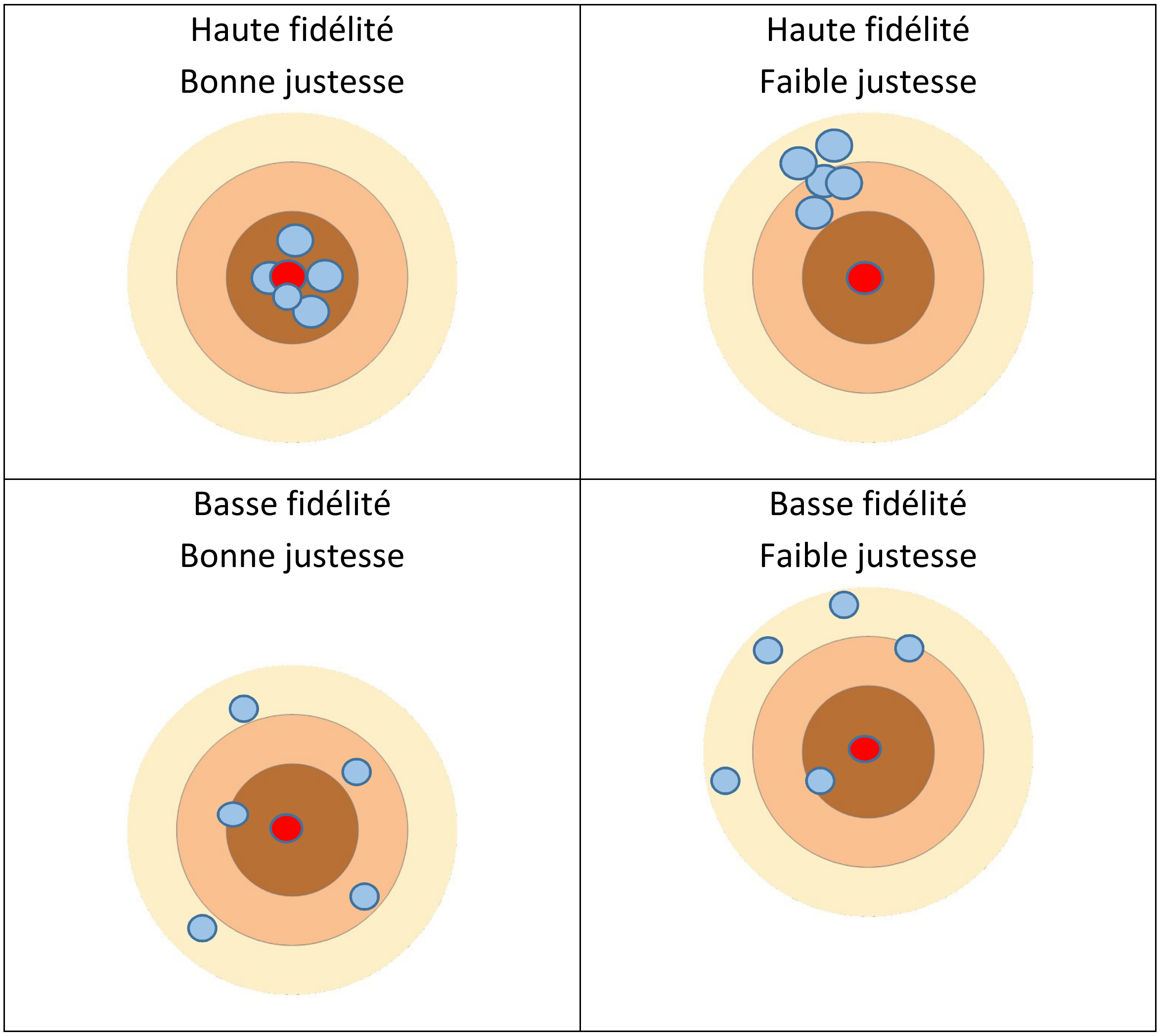
Une bonne fidélité ne garantit pas que la moyenne des valeurs soit rapprochée de la valeur de référence. Il est possible qu'une erreur systématique soit présente et fait en sorte que les mesures, même rapprochées les unes des autres, soient éloignées de la valeur de référence.

Dans l'exemple ci-dessous, on place une croix à l'emplacement de la moyenne des mesures. Dans ce cas, la valeur de référence est 1,0 kg/L. Elle n'est pas rapprochée de la moyenne des mesures.



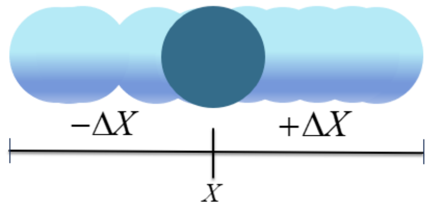
1.2.4.4 La justesse de mesure

La justesse est la qualité qui permet de décrire un ensemble de mesures dont la moyenne tend à être proche de la valeur de référence. Dans la figure ci-dessous, la valeur de référence est située au centre de la cible. Les points en bleu sont les mesures.



1.2.5 L'incertitude et la précision

On n'a pas toujours la possibilité de reprendre une mesure un grand nombre de fois. Dans ce cas, il faut quand même tenir compte de la dispersion possible des mesures. Autrement dit, on ne peut pas ignorer le fait que, si on avait l'occasion de répéter les mesures, elles ne seraient pas toutes identiques, car elles seraient plus ou moins fidèles. L'incertitude est la manière avec laquelle on représente l'étendue des valeurs que pourraient prendre la mesure, dans les mêmes conditions expérimentales, avec les mêmes appareils et la même méthode. L'incertitude sur une mesure X se note ΔX et s'exprime avec la notation plus ou moins qui définit un intervalle de part et d'autre de la mesure.



Choisir une incertitude, lorsque l'on a mesuré une seule valeur, repose en grande partie sur le jugement et l'expérience.

1.2.5.1 Les causes d'erreur de mesure

Avant de choisir la grandeur d'une incertitude sur une mesure, il est nécessaire de déterminer quels sont les facteurs qui influencent la qualité de la mesure. Toutes les causes d'erreur doivent d'abord être identifiées. Dans une deuxième étape, on attribue à chaque cause d'erreur une grandeur qui est une partie de l'incertitude totale sur la mesure.

Les incidents résultant de l'inexpérience, de la négligence ou de la distraction d'une personne ne sont pas des causes d'erreur de mesure, ce sont des bévues. Par exemple, noter incorrectement une grandeur ou son unité de mesure, sauter une étape dans un protocole, utiliser le mauvais réactif sont des actions qui expliquent des résultats expérimentaux invalides, mais ce ne sont pas des causes d'erreur pour la détermination d'une incertitude.

Les causes d'erreur de mesure sont inhérentes aux appareils utilisés, comme la résolution de l'instrument, et aux méthodes employées et au phénomène à mesurer, qui font partie du contexte expérimental. L'appréciation humaine en fait partie, comme la détermination d'un changement de couleur d'une solution lors d'un titrage ou le temps de réflexe lors d'un chronométrage. Les fluctuations dans le temps, lorsqu'on mesure la vitesse du vent, ou les formes irrégulières d'un échantillon dont il faut déterminer les dimensions sont d'autres exemples de causes d'erreur, cette fois reliées au phénomène à mesurer.

1.2.5.2 L'incertitude expérimentale

L'incertitude expérimentale est un moyen qui permet d'exprimer le degré de confiance que nous avons envers la qualité de nos mesures et de nos résultats. Elle définit les bornes inférieure et supérieure d'un intervalle autour de la valeur de la mesure. Cet intervalle est choisi de manière à contenir l'ensemble de toutes les valeurs qui auraient pu être mesurées pour la même grandeur, avec les mêmes appareils et les mêmes méthodes.

La plupart du temps, l'incertitude est répartie symétriquement de part et d'autre de la grandeur mesurée.

L'incertitude sur une mesure X est notée ΔX. L'incertitude est exprimée en valeur absolue. Pour montrer qu'elle est répartie de chaque côté de la mesure, on emploie une notation « plus ou moins » :

$$X \pm \Delta X$$

Pour que cette notation soit la plus claire possible, les unités de mesure et l'ordre de grandeur (l'exposant de 10 dans la notation scientifique) doivent être les mêmes pour la grandeur de la mesure et pour l'incertitude.

Lorsque l'incertitude est choisie sur la base du jugement, sans recourir à des analyses statistiques d'un grand nombre de mesures, elle s'écrit avec un seul chiffre significatif.

Exemple 1.2.2

Dans un laboratoire, on mesure la concentration (C) de TCE, un polluant organique, dans un échantillon d'eau souterraine. On trouve 0,0233 mg/L. L'incertitude est estimée à 5 µg/L.

Pour noter correctement le résultat, on doit d'abord convertir les deux valeurs dans les mêmes unités :

$$C = 0{,}0233 \text{ mg/L} \ ; \ \Delta C = 0{,}005 \text{ mg/L}.$$

Il faut ensuite arrondir la valeur de la mesure à l'ordre de grandeur de l'incertitude.

$$C = 0{,}023 \text{ mg/L} \ ; \ \Delta C = 0{,}005 \text{ mg/L}.$$

Finalement, on écrit la grandeur et l'incertitude en utilisant la notation « plus ou moins »

$$C = 0{,}023 \text{ mg/L} \pm 0{,}005 \text{ mg/L}$$

Il est aussi possible d'utiliser la notation scientifique :

$$C = 2{,}3 \times 10^{-2} \text{ mg/L} \pm 0{,}5 \times 10^{-2} \text{ mg/L}$$

Ou encore, en mettant en facteur la puissance de 10 et l'unité de mesure :

$$C = (2{,}3 \pm 0{,}5) \times 10^{-2} \text{ mg/L}$$

1.2.5.3 L'incertitude relative

L'impact de l'incertitude sur la qualité d'une mesure dépend de sa grandeur, mais aussi de la grandeur de la mesure. Par exemple, on mesure le diamètre de différents tubes au moyen d'un pied à coulisse. L'incertitude est estimée à 0,5 mm. Le premier tube a un diamètre de 437,4 mm et le deuxième de 21,9 mm.

Les deux mesures s'écrivent correctement, avec le dernier chiffre significatif, soit le chiffre incertain, du même ordre de grandeur que l'incertitude :

tube 1 : diamètre = 437,4 mm ± 0,5 mm

tube 2 : diamètre = 21,9 mm ± 0,5 mm

On remarque que la mesure du premier tube a quatre chiffres significatifs, alors que celle du deuxième tube n'en a que trois.

L'incertitude relative permet d'exprimer quantitativement l'impact de l'incertitude sur la qualité de la mesure. Elle se calcule en divisant l'incertitude par la valeur de la grandeur mesurée. On l'exprime généralement en pourcentage (%), avec deux chiffres significatifs.

Dans les exemples précédents, on calcule

incertitude relative pour le tube 1 : $\dfrac{0,5 \text{ mm}}{437,4 \text{ mm}} = 0,11\%$

incertitude relative pour le tube 2 : $\dfrac{0,5 \text{ mm}}{21,9 \text{ mm}} = 2,3\%$

L'incertitude relative est aussi appelée **précision**. Plus la valeur de la précision est petite, meilleure est la qualité de la mesure et plus elle aura de chiffres significatifs. On dira parfois que la précision est meilleure, ou plus grande, ce qui peut paraître confus, puisque cela correspond à une *valeur plus faible* de l'incertitude relative.

La précision est meilleure pour le tube 1 que pour le tube 2, ce qui est exprimé à la fois par une valeur d'incertitude relative plus petite et par un plus grand nombre de chiffres significatifs.

1.2.5.4 Le choix de l'incertitude

Les fabricants d'appareils de mesure ou les organismes qui développement des méthodes standard vont répéter les mesures un grand nombre de fois pour déterminer l'incertitude, par des méthodes statistiques d'analyse des distributions obtenues. Il est parfois possible de faire de même en contexte professionnel, mais ce n'est pas toujours le cas, et c'est très rare en contexte d'apprentissage. Que faire alors ? La détermination de l'incertitude repose en grande partie sur le jugement et l'expérience. Dans ce cas, il est nécessaire de garder en tête quelques lignes directrices de base.

L'incertitude doit prendre en considération toutes les causes d'erreur de mesure, et non seulement celle qui est due à la résolution de l'instrument et sa lecture. Une sous-estimation de l'incertitude, parce que des causes d'erreur ont été négligées, peut avoir des conséquences graves.

En ingénierie, la protection du public est un devoir encadré par la loi. Imaginons qu'au cours d'un projet de dimensionnement d'un ouvrage régulateur de crue (pour empêcher les inondations en bordure d'une rivière), des résultats expérimentaux soient publiés, avec des valeurs d'incertitude sous-estimées. Par la suite, une inondation survient et l'ouvrage est insuffisant. La protection du public n'a pas été assurée…

Dans beaucoup de cas, les conséquences liées à une sous-estimation des incertitudes sont telles qu'il faudra être très attentif à ne pas commettre ce type d'erreur. Ainsi, lorsque l'on veut exprimer une incertitude avec un seul chiffre significatif, comme c'est l'usage, on aura tendance à majorer, plutôt qu'à arrondir.

Par exemple, si l'incertitude est établie, après l'étude de toutes les causes d'erreur, à 1,3 kg, on choisira 2 kg (et non 1 kg), pour avoir un intervalle plus sécuritaire.

Il faut souligner que cette approche n'est pas sans effet négatif : elle peut conduire à un surdimensionnement d'ouvrage, des coûts excessifs, etc. Dans certains cas extrêmes, le résultat expérimental peut être entièrement privé d'utilité, car la plage de valeurs possibles est trop grande.

1.2.6 Déterminer une incertitude expérimentale en laboratoire

Dans les paragraphes qui suivent, nous verrons comment déterminer une incertitude expérimentale en laboratoire lors de la prise d'une mesure, ou d'un petit nombre de mesures, lorsqu'aucun traitement statistique n'est fait. Cette approche fait appel au jugement de la personne et tient compte des appareils ou instruments de mesure utilisés et du contexte expérimental.

L'incertitude sur une mesure est la somme de l'incertitude due à la lecture de l'appareil et de l'incertitude due au contexte expérimental. L'une ou l'autre de ces incertitudes est toujours exprimée en valeur absolue.

$$\text{incertitude sur la mesure } x = \Delta x_{\substack{\text{lecture}\\ \text{de l'appareil}}} + \Delta x_{\substack{\text{contexte}\\ \text{expérimental}}}$$

$$\Delta x \text{ exprimée en valeur absolue}$$

Lorsque l'incertitude est choisie en faisant appel au jugement, elle s'écrit avec un seul chiffre significatif.

Il n'existe pas de règle simple, applicable dans tous les cas, qui permet d'attribuer une valeur à une incertitude sur une mesure. Nous allons voir plutôt comment organiser le processus de réflexion qui permet d'exercer ce choix. Rappelons aussi que le résultat du processus doit être de borner un intervalle contenant toutes les valeurs de cette grandeur qui *auraient pu* être mesurées, avec le même équipement, la même méthode, dans les mêmes conditions.

1.2.6.1 Incertitude due à la lecture de l'appareil

La lecture de la mesure avec un appareil est associée à une incertitude qui dépend de la résolution de celui-ci. La résolution est le plus petit écart de la grandeur mesurée qui peut être distingué avec l'appareil. Pour certains instruments, comme un thermomètre médical à liquide ou une règle de bureau, la résolution dépend des graduations. Dans le cas d'un appareil électronique, l'affichage est un indice de la résolution, mais celle-ci peut dépendre d'autres facteurs ; elle est souvent mentionnée par le fabricant dans la documentation.

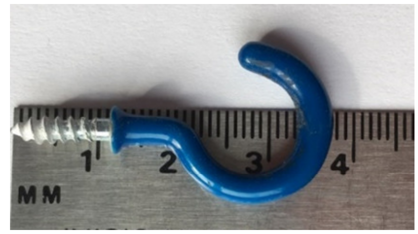
Instrument de mesure gradué

Plusieurs instruments de mesure comportent des graduations. La mesure requiert alors une appréciation humaine. Une règle de bureau, un cylindre gradué dans un laboratoire de chimie, un thermomètre médical à liquide sont des exemples d'instruments gradués.

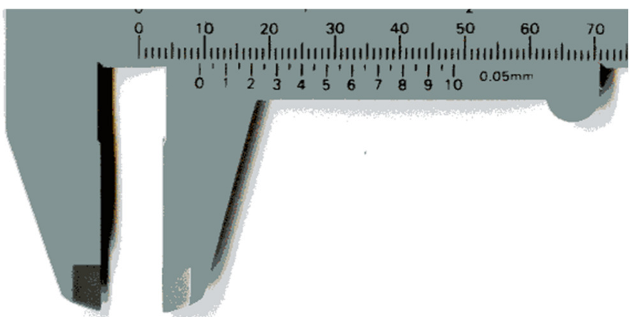
Un instrument correctement conçu permettra sans peine de distinguer à quelle graduation correspond la grandeur à évaluer. Cela signifie que l'incertitude sur la lecture ne peut pas être supérieure à une unité de la graduation. Par exemple, si le thermomètre comporte une graduation à tous les 0,5°C, l'incertitude sur la lecture est, au plus 0,5°C. Cependant, la plupart du temps, il est possible d'apprécier (à l'œil!) une mesure entre deux graduations ; dans ce cas, l'incertitude sur la lecture de l'instrument est estimée à *la moitié de la plus petite division* des graduations. Ainsi, si on mesure un volume de liquide dans un cylindre gradué au millilitre et qu'il est possible d'apprécier le niveau de liquide entre deux graduations, l'incertitude sur la lecture sera 0,5 mL.

L'incertitude sur la lecture s'applique chaque fois qu'une estimation a lieu. Il faut alors additionner l'incertitude pour chaque « lecture ». Dans les exemples précédents, le thermomètre et le cylindre gradué, une seule lecture est nécessaire. La règle de bureau est un exemple d'instrument pour lequel deux mesures sont nécessaires.

On veut mesurer la longueur d'une pièce avec une règle graduée au millimètre. L'incertitude sur la lecture est la moitié de la division, donc 0,5 mm. Pour prendre la mesure, on doit d'abord ajuster une extrémité de la pièce sur le zéro : c'est une première estimation, dont l'incertitude est 0,5 mm. On prend ensuite la valeur à l'autre extrémité, c'est une deuxième estimation dont l'incertitude est aussi 0,5 mm. L'incertitude sur la mesure est donc la somme, soit 1 mm. La longueur de la pièce s'écrit alors 37 mm ± 1 mm.



Lecture d'un vernier



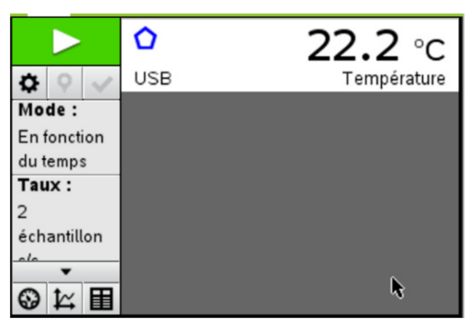
Le vernier est une échelle spéciale de mesure de certains appareils qui permet de subdiviser les graduations. On le retrouvait sur des instruments d'arpentage, comme les théodolites, ou de mécanique, comme le pied à coulisse.

Dans l'exemple illustré, ce pied à coulisse comporte un vernier qui subdivise le millimètre en vingt parties. Il n'est pas vraiment possible d'estimer une mesure entre deux subdivisions du vernier : l'incertitude sur la lecture est alors égale à la plus petite division du vernier : ici, 0,05 mm.

Les verniers cèdent de plus en plus leur place aux afficheurs numériques.

Affichage numérique

Pour un afficheur numérique, en l'absence d'autres informations, on choisit généralement une incertitude sur la lecture égale à une unité du dernier chiffre affiché.



Dans l'exemple illustré, la sonde de température à thermistance affiche une mesure de 22,2°C. Comme le dernier chiffre affiché est de l'ordre de grandeur du dixième de degré, l'incertitude sur la lecture est 0,1°C.

La mesure s'écrit alors : 22,2°C ± 0,1°C

Il est important néanmoins de consulter la documentation du fabricant de l'appareil. En effet, celui-ci donne généralement des indications concernant la qualité des mesures. Si une telle information est disponible, elle a préséance sur la « règle » précédente. Il n'est pas toujours simple de s'y retrouver, car la terminologie employée n'est pas toujours claire.

La sonde de température de l'exemple précédent a les spécifications suivantes, fournies par le fabriquant. La précision (accuracy) indiquée est 0,5°C. On doit donc écrire :

$$22{,}2°C \pm 0{,}5°C$$

Specifications

- Temperature range: –20 to 115°C
- Maximum temperature that the sensor can tolerate without damage: 150°C
- Resolution: 0.07°C
- Accuracy: ±0.5°C
- Response time: 4 s (to 90% of full reading in water)

1.2.6.2 Incertitude due au contexte expérimental

L'incertitude sur une mesure doit comprendre une incertitude due à la lecture de l'appareil de mesure et une incertitude due au contexte expérimental. La première est généralement bien comprise, et relativement facile à quantifier, en grande partie parce qu'elle repose sur la résolution de l'instrument. L'incertitude due au contexte expérimental est plus difficile à évaluer : en l'absence de « règles » à appliquer, son estimation repose essentiellement sur le jugement et l'expérience.

Il arrive fréquemment que l'incertitude due au contexte expérimental soit plus grande que l'incertitude liée à la lecture de l'appareil : il est important de ne pas la négliger.

IL faut aussi souligner que l'incertitude doit inclure *toutes les causes d'erreur de mesure*. Une bonne approche consiste à

- *énumérer les causes d'erreur possibles* ;
- *attribuer une valeur d'incertitude à chacune de ces causes* ;
- faire la somme (en valeur absolue) des incertitudes.

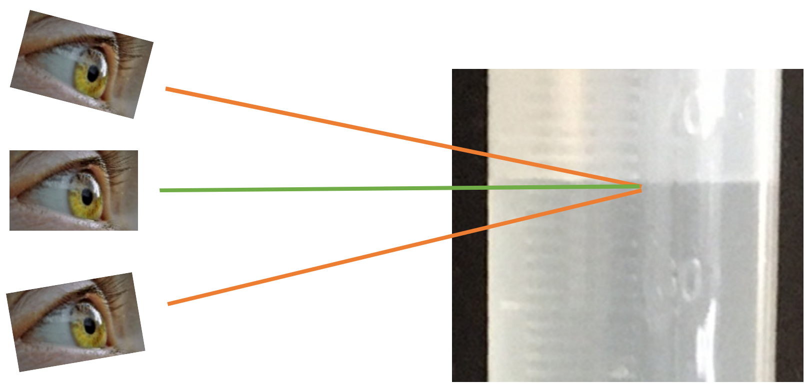
Les étapes de cette approche constituent la justification requise pour le choix d'une incertitude sur une mesure.

Ultimement, on cherche à définir, autour de l'estimation de la mesure, un intervalle qui contient l'ensemble des valeurs qui auraient pu être mesurées, avec les mêmes appareils, la même méthode, dans les mêmes conditions expérimentales.

Incertitude relative à l'appréciation humaine

Il arrive fréquemment qu'une méthode de mesure fasse appel à une appréciation humaine, autre que la lecture d'un appareil. Par exemple, dans un titrage en laboratoire de chimie, il peut être requis de déterminer le point de virage par un changement de couleur d'un indicateur. Le temps de réflexe lors d'un chronométrage est un autre exemple.

L'erreur de parallaxe est l'erreur qui provient d'un défaut de positionnement de l'œil de l'observateur par rapport à l'instrument. Pour lire correctement le niveau d'eau dans un cylindre gradué, il faut que le regard soit dans le plan horizontal défini par le bas du ménisque (la partie « arrondie » concave du liquide).



Incertitude relative à la grandeur à mesurer

Les caractéristiques du phénomène à mesurer sont aussi, dans certains cas, des causes d'erreurs liées au contexte expérimental.

La grandeur à mesurer peut varier dans le temps, comme un niveau d'eau qui fluctue dans un lac ou une rivière en raison des vagues.

L'irrégularité de la forme peut être une cause d'erreur : on veut mesurer le diamètre d'un tube légèrement déformé, ou le volume d'un solide en grains ou en poudre dont la surface ne sera pas parfaitement plane ou le tassement, inégal.

Il est également possible qu'une instabilité (dans le temps) résulte à la fois du type d'appareil, de la méthode utilisée et de la grandeur à mesurer : une mesure de pH au moyen d'un pH-mètre peut présenter un affichage qui fluctue, comme d'autres mesures à l'aide de sondes potentiométriques. Une balance analytique soumise à des vibrations ou un courant d'air aura aussi une lecture instable.

1.2.6.3 Mise en situation

Une équipe formée d'étudiantes et d'étudiants en génie prépare un projet pour un cours de chimie. Pour réaliser ce projet, elle doit mesurer la concentration en oxygène dissous à une profondeur de 1,50 m sous la surface d'un lac.

Une électrode spécifique (sonde potentiométrique) est fixée à une extrémité d'une perche rigide sur laquelle sont tracées des graduations au millimètre. L'électrode est connectée à un système d'acquisition qui affiche la concentration en oxygène dissous en mg/L.

Une personne de l'équipe doit enfoncer la perche dans l'eau pour plonger la sonde et la positionner de manière à lire, au niveau de la surface, la profondeur désirée. Pendant la mesure, elle constate que le lac est agité de petites vagues et que le niveau n'est pas constant.

On voit que l'équipe doit prendre deux mesures : la position de la sonde (profondeur) et la concentration en oxygène dissous.

Mesure de la profondeur

La mesure est 1,50 m.

On évalue ensuite l'incertitude :

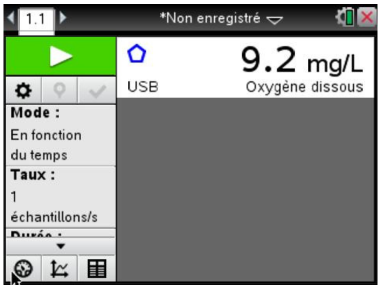
- <u>l'incertitude sur la lecture de la profondeur</u> est 0,5 mm d'après la résolution de l'échelle (les graduations). Cependant, pour établir la position de la sonde par rapport à la surface, il faut tenir compte du fait qu'il a fallu positionner la sonde par rapport au zéro de l'échelle, puis lire la mesure à la surface. Il faut donc compter l'incertitude sur la lecture deux fois, pour un total de **1 mm.**
- <u>L'incertitude due au contexte expérimental</u> doit tenir compte de plusieurs facteurs :
    - la présence de vagues fait fluctuer le niveau. En observant les lectures maximales et minimales pendant un intervalle de temps, l'équipe évalue cette incertitude à **2 cm ;**
    - il est très difficile de maintenir la verticalité de la perche. Si elle est inclinée de 5°, par trigonométrie, on trouve que l'erreur sur la hauteur est **1,5 cm**.

L'incertitude sur la mesure est la somme des incertitudes (toutes converties dans la même unité) : 0,1 cm + 2 cm + 1,5 cm = 3,6 cm, que l'on écrit avec un seul chiffre significatif en majorant : **4 cm**.

La mesure s'écrit donc 1,50 m ± 0,04 m.

Mesure de la concentration en oxygène dissous

L'affiche de la sonde indique :



Specifications

- Range: 0 to 15 mg/L (or ppm)
- Accuracy: ±0.2 mg/L
- Response Time: 95% of final reading in 30 seconds, 98% in 45 seconds
- Typical Resolution: 0.014 mg/L
- Temperature Compensation: automatic from 5–35°C
- Pressure Compensation: manual

- <u>Incertitude sur la lecture de l'appareil à affichage numérique</u> : la documentation du fabricant indique une incertitude de **0,2 mg/L.**
- <u>incertitude due au contexte expérimental</u> :
  - cette électrode spécifique a tendance a afficher une lecture instable. Au bout d'un certain temps, la membrane se sature et le signal baisse inexplicablement. Il est difficile de « choisir » la bonne mesure ; l'équipe estime que l'incertitude due à cette cause est **0,2 mg/L** ;
  - La température de l'eau est assez froide ; il est possible que la compensation automatique du fabricant ne soit pas suffisante ; l'équipe estime l'incertitude à **0,2 mg/L** ;
  - La pression à 1,5 mètre de profondeur est supérieure à la pression atmosphérique ; l'équipe estime l'incertitude à **0,1 mg/L**

L'incertitude totale sur la mesure de la concentration d'oxygène dissous est donc la somme, soit **0,7 mg/L.**

La mesure s'écrit donc 9,2 mg/L ± 0,7 mg/L.

1.2.6.4 En résumé

L'incertitude expérimentale sur une mesure vise à définir, autour de l'estimation de la grandeur, un intervalle qui contient toutes les valeurs possibles de la mesure.

L'incertitude doit comprendre une partie liée à la lecture de l'appareil de mesure et une partie due au contexte expérimental. Cette deuxième partie est souvent plus importante que la première et ne doit en aucun cas être négligée, même si elle est plus difficile à évaluer.

Dans un contexte d'ingénierie, il est souvent approprié de majorer l'incertitude, car la sous-estimation peut poser des enjeux de sécurité.

1.2.7 Interprétation des mesures

Savoir interpréter des résultats expérimentaux est une compétence importante en sciences et qui sera utile à de nombreuses personnes œuvrant dans le domaine de l'ingénierie. Nous aborderons le cas de mesures répétées et la comparaison de grandeurs obtenues par des méthodes différentes.

1.2.7.1 Mesures répétées

La répétition des mesures permet d'améliorer la « connaissance » de la grandeur. Il s'agit ici de la prise répétée de la mesure de la même grandeur, avec la même méthode et les mêmes appareils ou instruments.

Dans le cas où le nombre de répétitions est grand, des méthodes statistiques sont employées pour évaluer la meilleure estimation de la grandeur et l'incertitude associée à celle-ci. Ces méthodes sont étudiées dans les cours de mathématiques et ne feront pas l'objet de discussion dans ces pages.

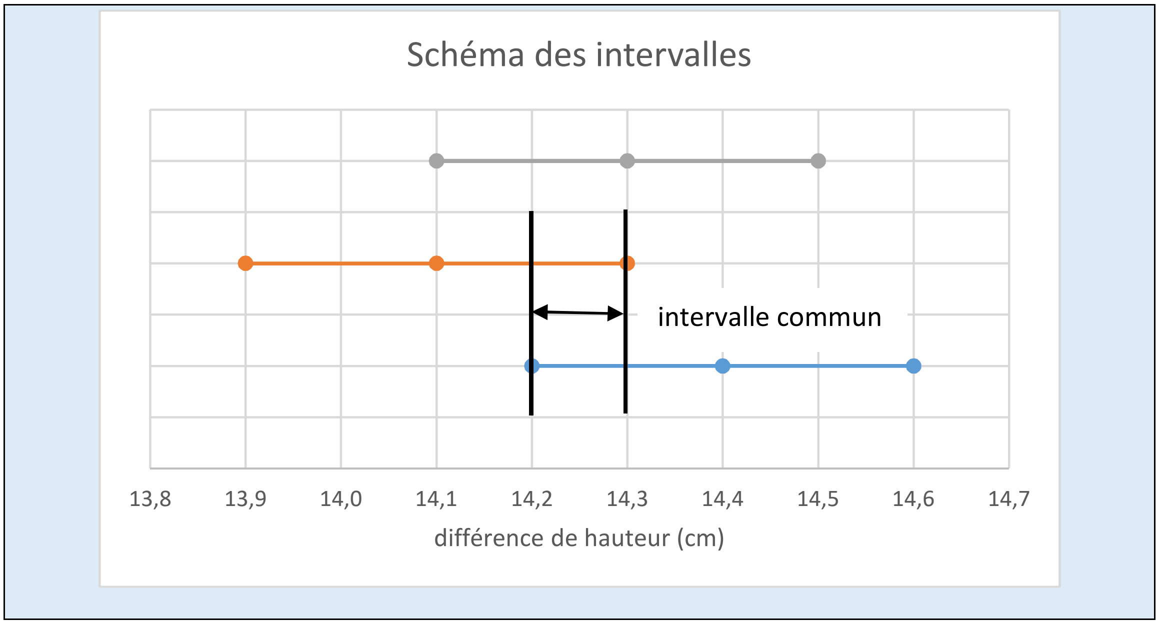
Même si un traitement statistique n'est pas réalisé, la répétition de la mesure un petit nombre de fois, moins de 10 fois, typiquement 2 ou 3, donne des indications utiles sur la qualité des mesures. Elle permet de vérifier la compatibilité des mesures, de choisir la meilleure estimation de la grandeur et de déterminer une incertitude appropriée sur cette estimation de la grandeur.

Compatibilité des mesures

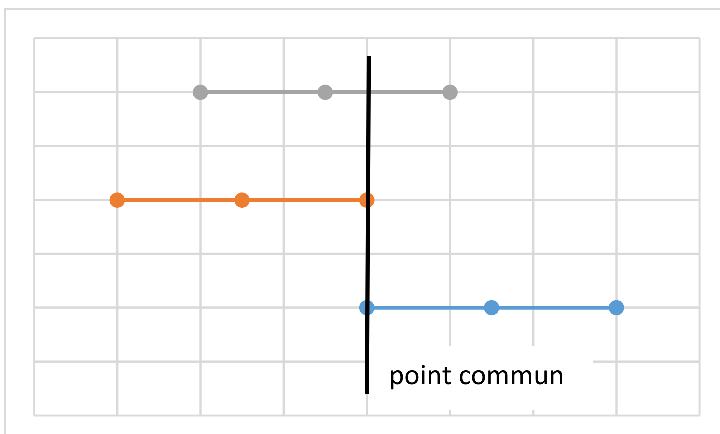
Pour étudier la compatibilité des mesures, il est utile de tracer un schéma à l'échelle. Autour de la mesure, on trace un trait qui représente l'incertitude de part et d'autre de celle-ci. On superpose de cette manière chacune des mesures. Normalement, l'incertitude sera la même pour toutes les mesures, puisqu'il s'agit de mesures répétées, de la même grandeur, avec la même méthode et les mêmes appareils.

Un fois le schéma complété, on cherche à déterminer un intervalle commun à toutes les mesures. Si cet intervalle existe, les mesures sont ***compatibles***.

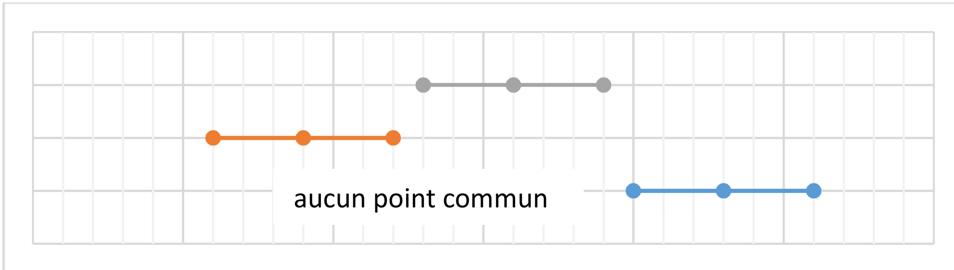
> ***Exemple 1.2.3***
>
> Vous avez mesuré trois fois la différence de hauteur dans un manomètre en U. Les mesures sont 14,4 cm, 14,1 cm et 14,3 cm, avec une incertitude de 0,2 cm.
>
> Le schéma des intervalles montre qu'il y a un intervalle commun de 14,2 cm à 14,3 cm. Les mesures sont donc compatibles.



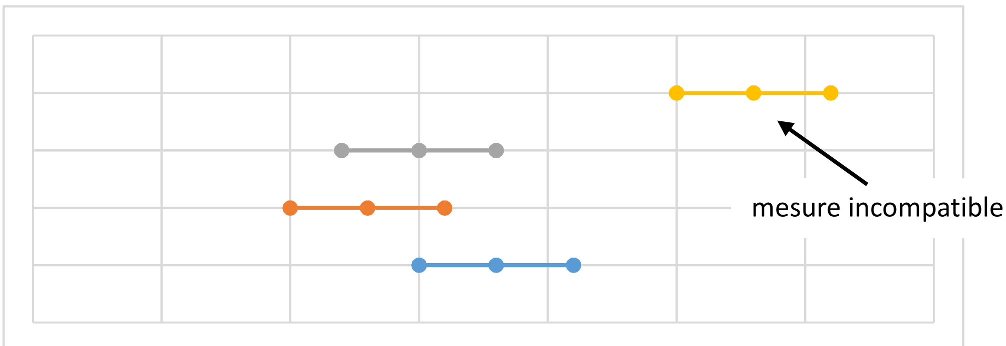
La zone commune peut être très petite, à la limite, elle est constituée d'un seul point. Les mesures sont tout de même compatibles :



Que faire lorsque les intervalles sont disjoints et qu'il n'y a pas d'intervalle commun ? Les mesures ne sont pas compatibles. Un tel résultat ne devrait pas survenir. La cause la plus probable est que l'incertitude sur la mesure a été sous-estimée : la part de l'incertitude liée au contexte expérimental a été omise ou des causes d'erreur ont été négligées.



De nombreuses autres situations peuvent se produire. Par exemple, plusieurs mesures sont compatibles, mais l'une d'elle est complètement disjointe :



Dans un contexte professionnel, il serait probablement nécessaire de déterminer ce qui a pu causer ce résultat. Dans un laboratoire d'apprentissage, il est possible qu'une bévue ait été commise. Dans ce cas, une option serait d'exclure la mesure incompatible, en justifiant ce choix. Il faut demeurer prudent lorsque l'on exerce un jugement sur la qualité des mesures.

Choix de la meilleure estimation

Lorsque les mesures sont compatibles, on calcule une estimation de la grandeur en faisant la moyenne arithmétique des mesures. Cette estimation est notée $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemple 1.2.4

Avec les données de l'exemple 1.2.3, où l'on a vérifié la compatibilité des mesures, on peut calculer la meilleure estimation de la différence de hauteur $\bar{h}$:

$$\bar{h} = \frac{14,3 + 14,1 + 14,4}{3} = 14,266... \text{ cm}$$

On n'arrondira le résultat qu'après avoir déterminé l'incertitude.

Détermination de l'incertitude

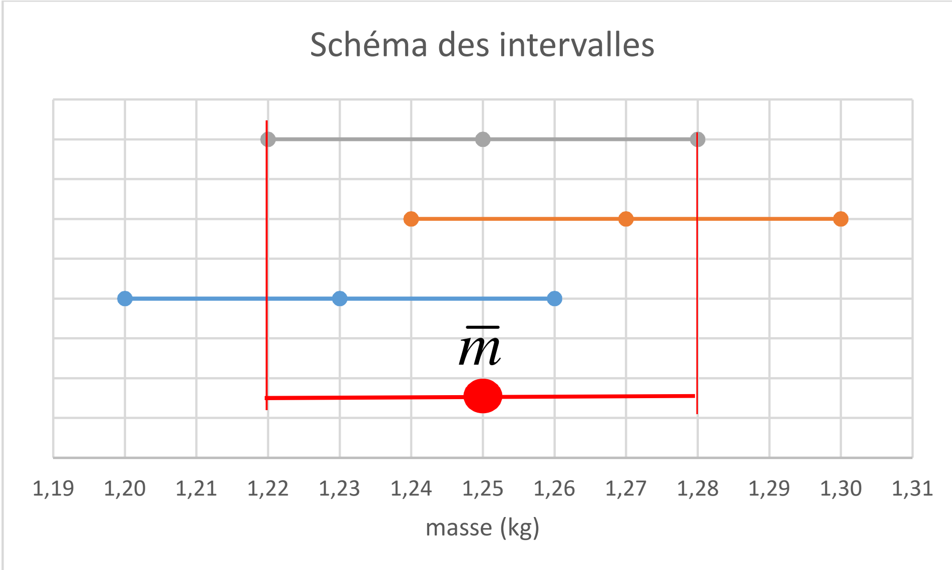
Lorsque cela est possible, l'utilisation de méthodes statistiques est la méthode la plus appropriée pour déterminer la valeur de l'incertitude appliquée à la meilleure estimation pour des mesures répétées. Cependant, la validité de ces méthodes dépend du nombre de répétitions.

En situation d'apprentissage, il est rare qu'il soit possible de répéter la même mesure un grand nombre de fois. La plupart du temps, on ne prend qu'une seule mesure d'une grandeur, parfois deux ou trois. Dans ce cas, il n'existe pas une méthode universelle. Nous présentons une interprétation qui repose sur deux hypothèses :

- la répétition des mesures doit conduire à une meilleure connaissance de la grandeur à évaluer ;
- l'incertitude expérimentale sur chacune des mesures a été évaluée correctement.

Évidemment, pour que cette dernière hypothèse soit valide, il est nécessaire de vérifier que les mesures sont compatibles.

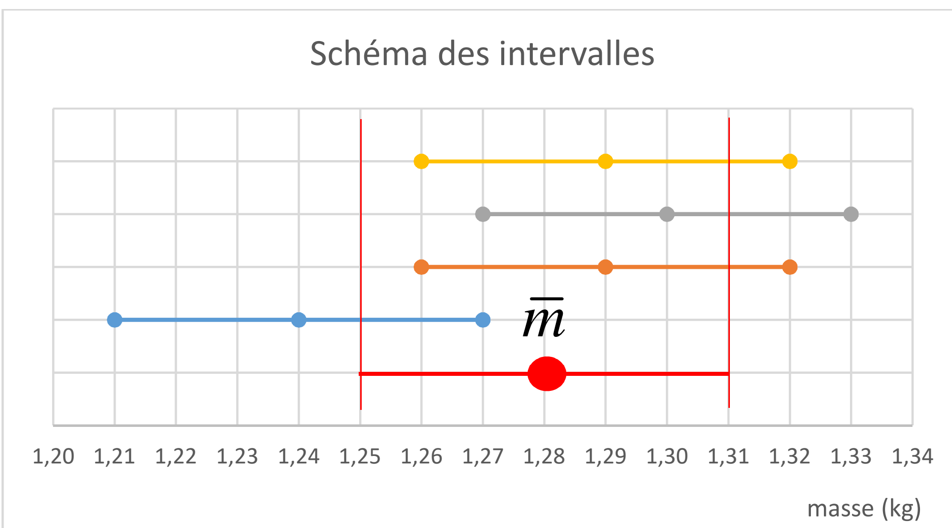
L'objectif est de construire un intervalle autour de l'estimation de la grandeur $\bar{x}$. Dans un premier temps, on attribue à cette grandeur la valeur de l'incertitude expérimentale déjà déterminer. On vérifie ensuite si toutes les mesures entrent dans l'intervalle alors défini :



Dans l'exemple ci-dessus, les mesures sont 1,23 kg, 1,27 kg et 1,25 kg. L'incertitude expérimentale, appliquée à chacune des mesures, est 0,03 kg. La moyenne $\overline{m}$ est 1,25 kg. Si on applique l'incertitude expérimentale à la moyenne, on constate que toutes les mesures entrent dans l'intervalle [1,22 :1,28] kg. On conserve donc cette incertitude et la grandeur est

$$\overline{m} = 1,25 \text{ kg } \pm \text{ } 0,03 \text{ kg}$$

Voici un deuxième exemple dans lequel une des mesures n'entre pas dans l'intervalle défini par l'incertitude expérimentale. Quand cela survient, il faut majorer l'incertitude de manière à contenir toutes les valeurs. La majoration s'applique des deux côtés, car on veut maintenir un intervalle symétrique autour de la moyenne :



Les mesures sont ici 1,24 kg, 1,29 kg, 1,30 kg et 1,29 kg, avec une incertitude expérimentale de 0,03 kg. Les mesures sont compatibles, avec un seul point commun (1,27 kg). La moyenne des mesures est 1,28 kg. Lorsqu'on applique l'incertitude expérimentale à la moyenne, on constate que la mesure de 1,24 kg n'entre pas dans l'intervalle : il faut donc majorer l'incertitude jusqu'à 0,04 kg pour inclure toutes les mesures. La grandeur est alors :

$$\overline{m} = 1,28 \text{ kg} \ \pm \ 0,04 \text{ kg}$$

1.2.7.2 Intervalle de cohérence

L'interprétation des résultats expérimentaux peut parfois comporter des comparaisons. Dans la section 1.2.4, nous avons vu comment comparer une mesure à une valeur de référence en définissant l'erreur de mesure et l'erreur relative. La valeur de référence est une grandeur publiée dans la littérature scientifique, par un fabricant d'appareil, ou une autre source fiable.

Il est aussi possible de comparer des mesures d'une même grandeur, obtenues par des méthodes ou des appareils différents. Par exemple, on peut mesurer la concentration en ions calcium dans une eau souterraine par complexométrie, qui un titrage à l'EDTA, ou à l'aide d'une électrode spécifique. On obtient alors deux mesures indépendantes de la même grandeur à déterminer.

En milieu professionnel, il peut arriver que l'on doive comparer des mesures obtenues par des méthodes différentes. C'est le cas lorsqu'on met au point une nouvelle méthode : on voudra comparer ses résultats avec une méthode reconnue. D'autres situations, comme l'analyse de données historiques ou le choix d'un nouvel appareil de mesure, peuvent se produire.

L'approche que nous proposons maintenant s'applique à des *mesures*, mais aussi à des *résultats expérimentaux.* Dans ces pages, le résultat expérimental est une grandeur évaluée par calcul en utilisant des grandeurs mesurées, un modèle (formule) et, s'il y a lieu, des constantes.

L'interprétation est réalisée en deux étapes :

- tracer un schéma des estimations de chaque mesure avec son incertitude ;
- vérifier la présence d'un intervalle commun et noter l'intervalle commun, s'il existe.

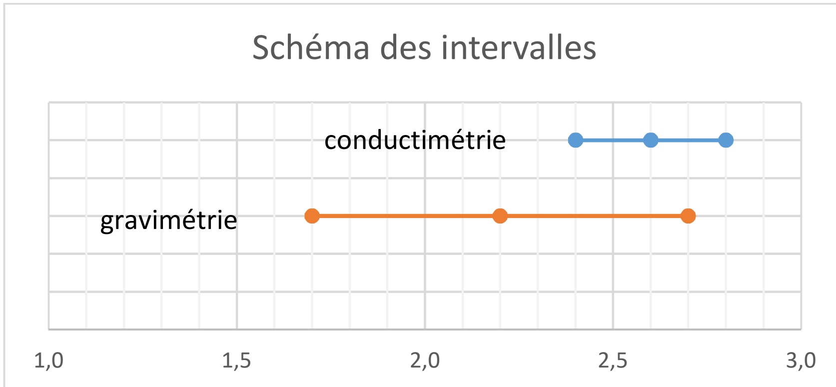
Pour bien suivre les étapes de cette démarche, voici un exemple.

Dans une séance de travaux pratiques, vous avez mesuré la concentration en sel dissous dans l'eau par deux méthodes différentes : la conductimétrie et la gravimétrie.

Les résultats expérimentaux sont :

- conductimétrie : 2,6 mmol/L $\pm$ 0,2 mmol/L
- gravimétrie : 2,2 mmol/L $\pm$ 0,5 mmol/L

La première étape consiste à représenter ces intervalles avec un schéma.

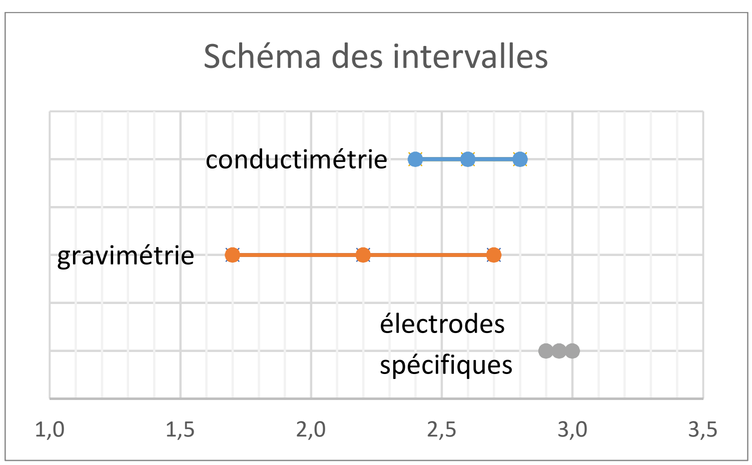


La deuxième étape consiste à repérer l'intervalle commun, s'il existe. Dans l'exemple, il y a une zone commune de 2,4 mmol/L à 2,7 mmol/L.

Lorsqu'il y a une zone commune, même petite (elle peut être réduite à un seul point), on dit que les mesures ou les résultats sont **cohérents**. On doit donner les bornes de l'intervalle, qu'on appelle l'intervalle de cohérence.

Que se passe-t-il lorsqu'il n'y a pas d'intervalle commun ?

Aux résultats précédents, on ajoute une grandeur estimée par une troisième méthode, des électrodes spécifiques. La valeur obtenue est 2,95 mmol/L $\pm$ 0,05 mmol/L



Sur le schéma, l'intervalle correspondant à la grandeur obtenue par la méthode des électrodes spécifiques n'a aucune plage commune avec les deux autres estimations. Les résultats sont incohérents. Ce type de résultat peut survenir lorsque l'appareil est défectueux ou la méthode fautive. En contexte d'apprentissage, les causes les plus fréquentes sont une sous-estimation des incertitudes (par exemple, on n'a pas suffisamment tenu compte du contexte expérimental) ou une erreur de calcul. Dans tous les cas, une révision s'impose avant la rédaction du rapport.

1.2.8 Propagation des incertitudes dans les calculs

Le résultat final d'une étude expérimentale ou d'un rapport de laboratoire est souvent obtenu en combinant plusieurs grandeurs dans un modèle mathématique. Ces grandeurs peuvent être des mesures, des grandeurs de référence ou des constantes.

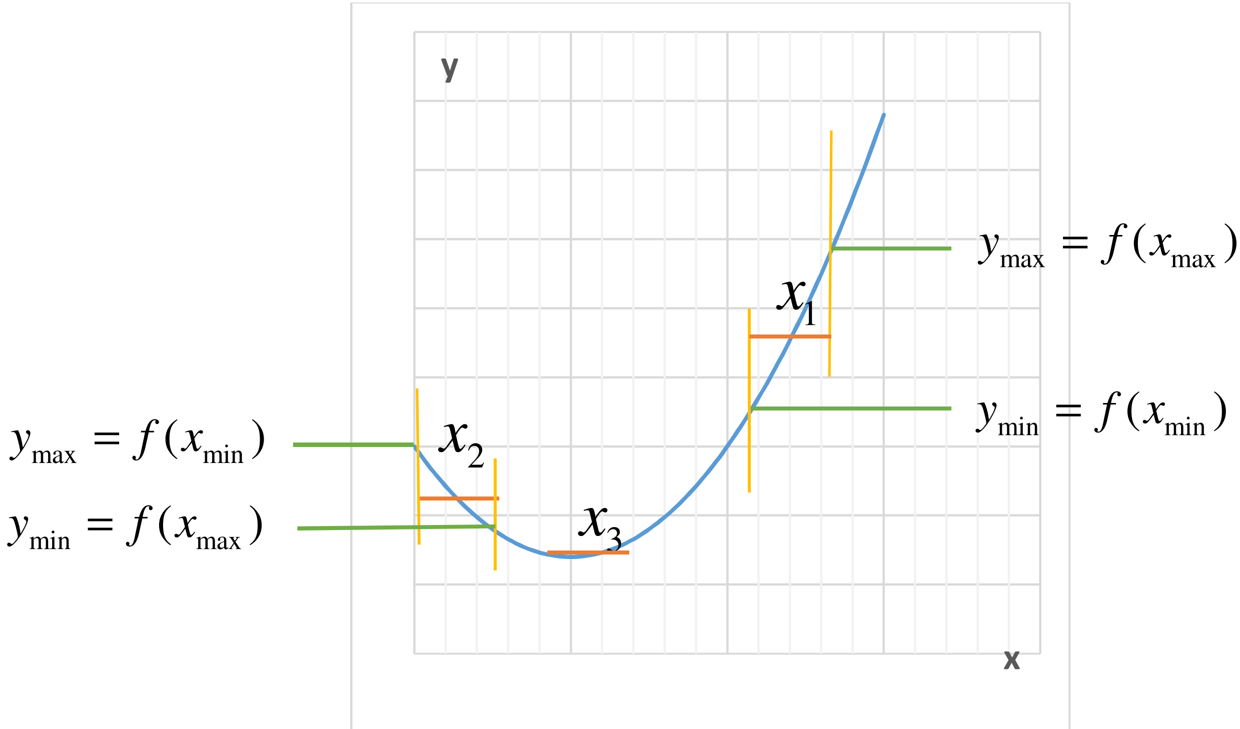
Toutes ces valeurs sont connues avec une certaine imprécision qui est exprimée par l'incertitude. Puisque les grandeurs entrant dans le calcul sont incertaines, le résultat du calcul sera aussi incertain. Il est donc nécessaire de connaître l'incertitude sur le résultat. On pourra alors exprimer le résultat expérimental avec le nombre approprié de chiffres significatifs.

Plusieurs méthodes existent pour atteindre cet objectif. Il est possible que vous ayez appris, dans d'autres contextes, à utiliser des règles simples basées sur les incertitudes ou sur les chiffres significatifs, ou même celles qui utilisent le calcul différentiel.

Dans les paragraphes qui suivent, nous utiliserons exclusivement la méthode dite des extrêmes, ou min-max. Vous pouvez explorer les autres méthodes en consultant des références[2].

[2]comme : Laflamme, Beausoleil, Villeneuve, *Mesures et incertitudes en laboratoire*, Fidès, 2018.

1.2.8.1 Méthode des extrêmes



La méthode des extrêmes s'applique facilement lorsque la fonction est monotone croissante ou décroissante sur le domaine considéré. Pour illustrer cette condition, observez le graphique. On remarque que la valeur de y atteint un minimum pour une certaine valeur de x.

Si on veut évaluer la valeur de y, avec son incertitude, pour la valeur x_1 et son incertitude, on voit que la valeur x_{min} permet d'évaluer y_{min} et x_{max} permet d'évaluer y_{max}.

Maintenant, on veut évaluer la valeur de y, avec son incertitude, pour la valeur x_2. On remarque la valeur y_{max} correspond à l'ordonnée de x_{min}, et inversement, la valeur de y_{min} est l'ordonnée de x_{max}. Ceci se produit parce que la fonction est décroissante dans l'intervalle considéré.

Cependant, si on veut évaluer la valeur de y, avec son incertitude, pour la valeur x_3, dont l'intervalle, défini par l'incertitude, contient la valeur de x correspondant au y minimum de la fonction, la valeur y_{min} n'est pas l'ordonnée de x_{min} ou x_{max}. Il est possible de déterminer le véritable minimum, graphiquement ou au moyen du calcul différentiel, mais cela ne sera pas utilisé dans ce cours.

Pour appliquer la méthode des extrêmes en vue de déterminer l'incertitude sur le résultat d'un calcul, on doit réaliser 4 étapes :

1. On calcule l'estimation de la grandeur, qu'on va noter « $\overline{x}$ », avec les valeurs mesurées et les autres grandeurs (constantes, grandeurs de référence) entrant dans le calcul ;
2. On calcule les valeurs minimales et maximales de la grandeur en tenant compte des incertitudes sur les valeurs entrant dans le calcul ;
3. On choisit ensuite l'incertitude en considérant l'écart le plus grand entre une valeur extrême (la borne maximale ou minimale) et l'estimation.
4. On note l'incertitude avec un seul chiffre significatif et on arrondit l'estimation.

Avant de débuter, il faut vérifier le domaine d'application. Parfois, il peut être utile de tracer la fonction.

Exemple 1.2.5

Au laboratoire, on mesure la masse volumique d'un liquide en pesant un échantillon et en utilisant un cylindre gradué. La masse volumique ρ se calcule :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Les mesures sont :

- volume V = 23 mL $\pm$ 1 mL
- masse m = 24,56 g $\pm$ 0,02 g

Quelle est la masse volumique, avec son incertitude ?

Étape 1

$$\overline{\rho} = \frac{24,56}{23} = 1,067826... \frac{\text{g}}{\text{mL}}$$; on n'arrondit pas le résultat à cette étape

Étape 2

Calcul de la masse volumique minimum : comme la masse est au numérateur, il faut utiliser la masse minimale, alors que pour le volume, qui est au dénominateur, il faut utiliser le volume maximum :

$$\rho_{\min} = \frac{(24,56 - 0,02)}{(23+1)} = 1,022500... \frac{\text{g}}{\text{mL}}$$

Calcul de la masse volumique maximum : on fait l'inverse, masse maximale et volume minimal :

$$\rho_{\max} = \frac{(24,56+0,02)}{(23-1)} = 1,117272...\frac{\text{g}}{\text{mL}}$$

Étape 3

On calcule l'écart à gauche :

1,067826 – 1,022500 = 0,0453 g/mL

et l'écart à droite :

1,117272 – 1,067826 = 0,0494 g/mL

L'écart est plus grand (en valeur absolue) à droite qu'à gauche, on choisit celui de droite, soit 0,0494 g/mL.

Étape 4

L'incertitude doit être exprimée avec un seul chiffre significatif : 0,05 g/L. On doit ensuite arrondir l'estimation

$$\bar{\rho} = 1,07\frac{\text{g}}{\text{mL}} \pm 0,05\frac{\text{g}}{\text{mL}}$$

1.2.8.2 Grandeurs de référence

Il arrive fréquemment que les formules de calcul contiennent des grandeurs de référence, comme des constantes physiques, en plus des grandeurs mesurées. Pour ces grandeurs de référence utilisées dans les calculs, on considère généralement que l'incertitude est l'unité du dernier chiffre significatif indiqué dans la référence.

Par exemple, dans la relation $PV = nRT$, R est la constante des gaz parfaits dont la valeur est publiée dans les ouvrages de référence. Dans les notes de cours, on donne la valeur $R = 8,314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ pour la constante des gaz parfaits ; avec l'incertitude, ce sera $R = (8,314 \pm 0,001)\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$. Attention, ceci n'est pas la véritable précision avec laquelle la constante est connue ! Il s'agit d'un outil pour évaluer l'incertitude sur un résultat expérimental en utilisant des valeurs de référence dans la documentation disponible.

Pour les constantes mathématiques, comme « 2 » et « π » dans le calcul de la circonférence d'un cercle $2\pi r$, on considère que l'incertitude est négligeable si on utilise les constantes prédéfinies dans une calculatrice ou un logiciel de calcul.

Exemple 1.2.6

La formule d'Antoine permet d'estimer la pression de vapeur P_{eau}^{0} si on connaît la température (en degré Celcius). Les valeurs numériques dans la formule sont des constantes empiriques publiées dans des manuels de référence.

$$\log P_{eau}^{0} = 10,23 - \frac{1750}{T + 235}$$

Quelle sera la valeur de P_{eau}^{0} , avec son incertitude, pour une mesure T = (22,6 ± 0,1)°C ?

Étape 1 : Calcul de l'estimation

Tout d'abord, isolons P_{eau}^{0} algébriquement :

$$P_{eau}^{0} = 10^{10,23 - \frac{1750}{T+235}}$$

Avec T = 22,6°C : $P_{eau}^{0} = 10^{10,23 - \frac{1750}{22,6+235}} = 2732,2582 \text{ Pa}$; on n'arrondit pas immédiatement.

Étape 2 :

Les valeurs 10,23; 1750 et 235 sont des constantes empiriques. Leur incertitude sera une unité du dernier chiffre significatif. Par exemple, 10,23 ± 0,01.

Calcul de la pression minimale : il faut faire attention au choix des grandeurs minimales et maximales dans la formule

$$P_{eau_{\min}}^{0} = 10^{(10,23-0,01) - \frac{(1750+1)}{(22,6-0,1)+(235-1)}} = 2474,5104 \text{ Pa}$$

Calcul de la pression maximale :

$$P^0_{\substack{eau \\ \max}} = 10^{(10{,}23+0{,}01)-\frac{(1750-1)}{(22{,}6+0{,}1)+(235+1)}} = 3014{,}9026 \text{ Pa}$$

Étape 3

Calcul des écarts :

à gauche : 2732,2582 - 2474,5104 = 261 Pa

à droite : 3014,9026 - 2732,2582 = 283 Pa

L'écart est plus élevé à droite, donc 283 Pa.

Étape 4

On écrit l'incertitude avec un seul chiffre significatif, soit 300 Pa. Il faut également arrondir l'estimation de la pression de vapeur. L'ordre de grandeur de l'incertitude est la centaine, donc on arrondit à 2700 Pa.

La notation avec les zéros avant la virgule est ambigüe : il faut utiliser la notation scientifique :

Pression de valeur $P^0_{eau} = (2{,}7 \pm 0{,}3) \times 10^3 \text{ Pa}$

Une autre approche consiste à employer un préfixe approprié pour l'unité de mesure :

$$P^0_{eau} = 2{,}7 \text{ kPa} \pm 0{,}3 \text{ kPa}$$

1.2.9 Exercices préparatoires

1. Combien de chiffres significatifs y a-t-il dans
   a. $1,24 \times 10^3$
   b. 0,0053
   c. 10 000
   d. 4,001 0
   e. 0,1230

2. Arrondissez les quantités suivantes à 3 chiffres significatifs
   a. 0,072 688
   b. 1,475
   c. 63 333,33
   d. « **e** »
   e. 0,999 99

3. Calculez selon le cas l'incertitude relative ou absolue et exprimez la mesure selon la méthode des chiffres significatifs :

mesure	incertitude absolue	incertitude relative	mesure exprimée avec un nombre acceptable de chiffres significatifs
a. 33,51 mm	0,5 mm		
b. 400 N		5 %	
c. 1,782 m		2 %	
d. 101,35 kPa	500 Pa		
e. 0,168 05 g	0,1 mg		

4. Calculez l'estimation de la grandeur et son incertitude à partir des mesures répétées :
   a. V_1 = 1,7 mL $\pm$ 0,3 mL et V_2 = 1,9 mL $\pm$ 0,3 mL
   b. m_1 = 317 mg $\pm$ 4 mg ; m_2 = 308 mg $\pm$ 4 mg ; m_3 = 328 mg $\pm$ 4 mg

5. Vous avez mesuré 5 fois la différence de hauteur dans un manomètre en U. Les mesures sont :

   33 mm 34 mm 35 mm 33 mm 37 mm

L'incertitude expérimentale sur chacune des mesures est 2 mm.

Quelle est l'incertitude sur la moyenne des mesures ?

6. La masse volumique ρ se calcule avec la formule :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Calculez la masse volumique et son incertitude si les mesures sont :

m = 734 g $\pm$ 2 g et *V* = 872 mL $\pm$ 1 mL.

7. La surface d'un cercle se calcule avec la formule : $S = \pi r^2$. Le rayon *r* mesuré est 25,1 mm $\pm$ 0,5 mm. Quelles sont alors la surface du cercle et son incertitude ? Exprimez votre réponse avec le bon nombre de chiffres significatifs.

8. Le pH d'une solution se calcule avec la formule $pH = -\log\left[H^+\right]$. Le pH s'exprime sans unités et la grandeur $\left[H^+\right]$, qui s'appelle la *molarité des ions H^+,* est exprimée en mol/L. Si le pH mesuré est 3,22 $\pm$ 0,02, quelle est la molarité des ions H^+, en mol/L, avec son incertitude et le nombre correct de chiffres significatifs ?

Réponses

1. a) 3 b) 2 c) notation ambiguë, 1 chiffre significatif (peut-être) d) 5 e) 4

2. a) 0,0727 b) 1,48 c) $6{,}33 \times 10^4$ d) 2,72 e) 1,00

3. a) 1,5 % 33,5 mm

   b) 2×10^2 N $4{,}0 \times 10^2$ N

   c) 0,04 m 1,78 m

   d) 0,49 % 101,3 kPa

   e) 0,060 % 0,1681 g

4. a) $\overline{V} = 1{,}8\ \text{mL} \pm 0{,}3\ \text{mL}$ b) les mesures sont incompatibles

5. La moyenne est 34 mm. Si on applique l'Incertitude expérimentale de 2 mm, la mesure de 37 mm n'entre pas dans l'intervalle : il faut majorer l'incertitude. La réponse est 3 mm.

6. 0,842 g/mL $\pm$ 0,004 g/mL

7. Avec la méthode des extrêmes, on trouve un écart de 78 mm^3 à gauche et de 80 mm^3 à droite. On choisit le plus élevé et on écrit l'incertitude avec un seul chiffre significatif ; pour la clarté, on utilise la notation scientifique : $(1{,}98 \pm 0{,}08) \times 10^3$ mm^3

8. $(6{,}0 \pm 0{,}3) \times 10^{-4}$ mol/L