Mat 805 : Compléments de mathématiques

Michel Beaudin
michel.beaudin@etsmtl.ca
Version du 02.02.2021

Résumé 2
Matrices et systèmes d'équations différentielles linéaires
Systèmes linéaires, quasi-linéaires et stabilité

Mathématiquement parlant, il est intéressant de se demander si l'on peut généraliser aux systèmes d'équations différentielles le résultat selon lequel la solution unique à l'équation différentielle scalaire

$$\frac{dy}{dt} = a\,y,\;\; y(t_0) = y_0$$

est $y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0$. Le présent résumé se penche sur cette question. Il est toutefois nécessaire de faire des rappels (ou même des appels!) en algèbre linéaire. Les nombreux exemples et exercices auront le mérite de monter des calculs trop souvent absents des manuels d'algèbre linéaire. Utiliser un système symbolique va nous éviter de faire plusieurs calculs à la main (par exemple trouver la forme L-réduite d'une matrice) et va nous permettre de mieux apprécier le lien intime entre système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et la théorie des valeurs et vecteurs propres.

Voici les différentes sections de ce résumé.

1- Matrices : quelques notations et définitions

Comme indiqué au début de ce résumé, nous aimerions généraliser le fait que la solution à l'équation différentielle scalaire

$$\frac{dy}{dt} = a\,y,\;\; y(t_0) = y_0$$

est $y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0$ et que cette solution est unique. On va donc remplacer le scalaire *a* par une matrice **A** et la fonction *y* par une matrice (vecteur-colonne) **y**.

1.1 Notation Nous emploierons, dans ce texte, des caractères gras (non en italique) pour les matrices et les vecteurs. Ainsi, **I** désignera la matrice identité (l'ordre sera toujours clair), **0**

désignera la matrice identiquement nulle (ou un vecteur identiquement nul). Si $\mathbf{M}(t)$ est une matrice de la variable réelle t, alors on dérive $\mathbf{M}(t)$ simplement en dérivant chacune des entrées de $\mathbf{M}$.

1.2 Définition Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre n constante, donc $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $1 \le i, j \le n$. Soit $\mathbf{y}(t) = \left[y_1(t) \;\; y_2(t) \;\; \cdots \;\; y_n(t)\right]^T$ une matrice $n \times 1$ (vecteur-colonne) différentiable. Soit $\mathbf{y}_0$ une matrice $n \times 1$ constante. Un <u>système d'équations différentielles linéaires du premier ordre</u> (« homogène ») est la donnée

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

Habituellement, on ajoute une condition initiale : $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Si l'on veut généraliser le résultat sur l'É.D. scalaire, il faudrait donc savoir ce que signifie l'exponentielle d'une matrice : $e^{\mathbf{A}}$. Cela va nous mener à faire un peu d'algèbre linéaire.

1.3 Définitions Soit une matrice carrée $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ d'ordre n ($1 \le i, j \le n$)

1.3.1 Elle est dite <u>diagonale</u> si toutes ses entrées, sauf possiblement celles de sa diagonale principale, sont nulles (la diagonale principale est constituée des éléments de la forme a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$).

1.3.2 La <u>transposée de A</u>, notée $\mathbf{A}^T$, est la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en intervertissant lignes et colonnes (concept défini même si $\mathbf{A}$ n'est pas carrée). Donc $\mathbf{A}^T = \left[b_{ij}\right]$ où $b_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i, j \le n$. On montre alors que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ pour toutes matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dont le produit $\mathbf{AB}$ est défini.

1.3.3 En particulier, si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, on dit que $\mathbf{A}$ est <u>symétrique</u> et si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, on dit que $\mathbf{A}$ est <u>anti-symétrique</u>. Dans le cas où $\mathbf{A}$ admet des entrées complexes, on définit $\mathbf{A}$ comme <u>hermitienne</u> si $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$.

1.3.4 La matrice $\mathbf{A}$ est dite <u>orthogonale</u> si ses colonnes, considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, sont de norme (longueur) égale à un et sont deux à deux perpendiculaires. Ainsi $\mathbf{A}$ est orthogonale si et seulement si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Dans le cas complexe où $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^{-1}$, on dit que $\mathbf{A}$ est <u>unitaire</u>.

1.4 Exemples Les matrices suivantes sont orthogonales :

1.4.1 $\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (θ réel). Il s'agit d'une matrice de rotation dans le plan puisque

$$\mathbf{R}(\theta)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{bmatrix},$$

ce qui a le même effet que le produit du nombre complexe $e^{i\theta}$ avec $a+bi$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(a+bi) = a\cos\theta - b\sin\theta + i(a\sin\theta + b\cos\theta).$$

1.4.1 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ est aussi orthogonale comme on peut le vérifier.

1.5 Exemple La forme quadratique (courbe conique dans le plan) $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0$ peut être représentée par le produit matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 8.$$

Posons $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ainsi, on a $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 8$. Pour bien « voir » cette courbe, utilisons le changement de variable suivant (dont la provenance sera claire bientôt) : soit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x} \text{ où } \mathbf{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On voit que $\mathbf{Q}$ est orthogonale (un tel choix est toujours possible pour une matrice symétrique d'après un théorème à venir). Ainsi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{y} = 2y_1^2 + 8y_2^2 = 8$$

et donc notre courbe est une ellipse de demi-axes deux et un, centrée à l'origine et ayant subi une rotation de 45° dans le sens direct :

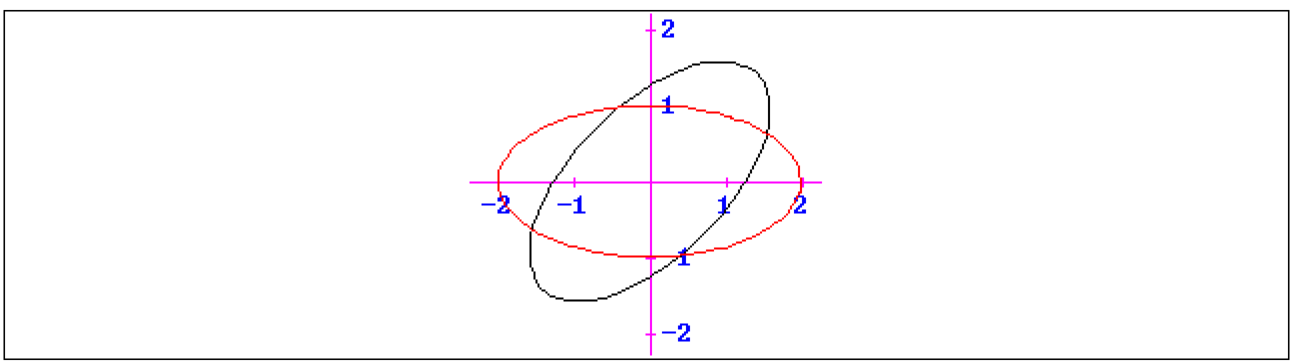


Figure 1.1

2- Valeurs propres et vecteurs propres de matrices : diagonalisation

Retournons à un système d'É.D. $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ et cherchons une solution de la forme $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ où $\mathbf{v}$ est une matrice $n \times 1$ (vecteur-colonne) non identiquement nul (on veut autre chose que la solution dite triviale). Alors en substituant, on doit avoir

$$\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = \mathbf{A}e^{\lambda t}\mathbf{v} \text{ d'où } \mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \text{ d'où } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Puisque $\mathbf{v}$ est non-nul, cela signifie que la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ n'est pas inversible, donc son déterminant — qui est un polynôme de degré n dit polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ — doit être nul. Cela amène la définition suivante.

2.1 Définitions Soit $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n.

2.1.1 Les nombres (réels et/ou complexes, possiblement répétés) λ tels que $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ sont appelées les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et les vecteurs $\mathbf{v}$ non nuls correspondants sont dits vecteurs propres. L'équation $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ est dite équation caractéristique. On remarque que si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $c\mathbf{v}$ ($c \neq 0$) est aussi un vecteur-propre associé à λ. L'ensemble des vecteurs propres constitue un espace vectoriel appelé espace propre associé à la valeur propre.

2.1.2 La matrice $\mathbf{A}$ est dite diagonalisable si l'on peut trouver une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ soit diagonale. Donc telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$$

avec $\mathbf{D}$ une matrice diagonale.

2.1.3 La multiplicité algébrique d'une valeur propre λ est l'ordre du zéro λ dans l'équation caractéristique. La dimension de l'espace-propre associé à λ est dit multiplicité géométrique de λ (donc $n - r$, où r est le rang de la matrice échelonnée-réduite $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$). Un résultat dit que la dimension de l'espace propre associé à une valeur propre de multiplicité (algébrique) k est au plus k.

2.2 Condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable Une matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable **si (et seulement si) l'on peut trouver** n vecteurs propres de $\mathbf{A}$ qui sont linéairement indépendants. En effet, soit $\mathbf{P}$ la matrice dont les colonnes sont précisément ces vecteurs propres, disons $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \cdots\ \mathbf{x}_n]$ où $\mathbf{x}_i = [x_{i1}\ x_{i2}\ \cdots\ x_{in}]^T$ est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i (i = 1, 2, ..., n). Alors $\mathbf{P}$ est inversible à cause de l'indépendance linéaire de ses colonnes et puisque $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, on a $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ où $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$.

2.3 Condition suffisante (mais non nécessaire) Pour qu'une $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, il est suffisant qu'elle admette n valeurs propres réelles, 2 à 2 distinctes. En effet, montrons qu'à des valeurs propres distinctes correspondent des vecteurs propres indépendants. Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ k valeurs propres réelles deux à deux distinctes associées aux vecteurs propres $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_k$ respectivement. Supposons quand même que l'ensemble $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_k\}$ soit linéairement dépendant. Soit r le plus grand entier tel que l'ensemble $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_r\}$ soit linéairement indépendant. Alors $r < k$ et l'ensemble $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{r+1}\}$ est linéairement dépendant. Cela signifie qu'il existe des scalaires $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{r+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{r+1} c_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ avec $c_{r+1} \neq 0$. Alors, puisque $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ (i = 1, 2, ..., k), on a $\sum_{i=1}^{r+1} c_i\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. D'où

$$\mathbf{0} = \lambda_{r+1}\sum_{i=1}^{r+1} c_i\mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^{r+1} c_i\lambda_i\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i\left(\lambda_i - \lambda_{r+1}\right)\mathbf{x}_i$$

ce qui implique que, à cause de l'indépendance linéaire de $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_r\}$ et du fait que les valeurs propres sont toutes distinctes, $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. Mais alors $c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{0}$, d'où $c_{r+1} = 0$ (car un vecteur propre n'est pas nul) et on a obtenu une contradiction.

2.4 Exemples

2.4.1 Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$. Un système symbolique trouvera facilement que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda - 8)^2(\lambda - 4)$. On a donc 3 valeurs propres réelles dont l'une double. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan (« rref » sur la TI par exemple) à la matrice $\mathbf{A} - 8\mathbf{I}$, on a ceci (nous le ferons à la main en classe pour réviser les opérations élémentaires de lignes)

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, la première colonne est une colonne pivot (dans chaque ligne non nulle, le premier élément non nul est un 1). Les autres colonnes ne sont pas des colonnes pivots et fournissent donc les variables libres. Dit autrement, la matrice originale $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ est une matrice de rang un. Cela va nous permettre de trouver deux vecteurs propres indépendants. Rappel : le <u>rang</u> d'une matrice est le nombre de ligne non nulles dans sa L-réduite échelonnée. Puisqu'un tel vecteur doit satisfaire $x + y + 2z = 0$, on peut, par exemple, choisir $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ce sont 2 vecteurs propres (lin. ind.) associés à la valeur propre 8. Et pour 4, on obtient un rang de 2, donc une variable libre

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ fait l'affaire. Alors si

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

on vérifie facilement que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, on a diagonalisé la matrice **A**. Évidemment, la matrice **P** n'est pas unique et l'ordre des valeurs propres n'est pas important.

Notons aussi la chose suivante : le polynôme caractéristique était donné par $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda - 8)^2(\lambda - 4) = -\lambda^3 + 20\lambda^2 - 128\lambda + 256$. L'important <u>théorème de Cayley-Hamilton</u> dit que toute matrice carrée est un zéro de son polynôme caractéristique. On peut d'ailleurs vérifier que $-\mathbf{A}^3 + 20\mathbf{A}^2 - 128\mathbf{A} + 256\mathbf{I} = \mathbf{0}$.

2.4.2 Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Les 3 valeurs propres sont 0, 3, et 5 et donc on peut diagonaliser **A**. En effet, on a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 5)$. On réduit :

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} - 0\mathbf{I} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Prenons } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\mathbf{v}_1$ fait l'affaire comme vecteur propre associé à la valeur propre 0. En effet, la matrice L-réduite échelonnée montre que la variable libre est « *z* ».

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Prenons } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\mathbf{v}_2$ fait l'affaire comme vecteur propre correspondant à la valeur propre 3. En effet, on voit que c'est « y » qui est libre puisque la première colonne et la troisième colonne sont des colonnes pivots. Finalement

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Prenons } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur **v3** est un vecteur propre associé à la valeur propre 5. On forme notre matrice **P** :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Et on a bien que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

2.5 Cas des matrices de format 2 × 2 Pour une matrice 2 × 2, le polynôme caractéristique dépendra du discriminant et donc, si l'on ne trouve qu'une valeur propre réelle ou deux valeurs propres complexes conjuguées, la matrice ne sera pas diagonalisable (évidemment, si la matrice ne possède qu'une valeur propre réelle double mais qu'elle est déjà diagonale, elle sera diagonalisable!).

2.6 Exemples C'est le cas avec les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

En effet, on a det(**A** – λ**I**) = $(\lambda-4)^2$ tandis que det(**B** – λ**I**) = $\lambda^2 - 10\lambda + 41 = (\lambda-5)^2 + 4^2$. Dans ce dernier cas, si l'on choisit la valeur propre dont la partie imaginaire est positive et si l'on réduit la matrice **B** – (5 + 4i)**I**, on trouve

$$\mathrm{B} - (5+4i)\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 2-4i & -5 \\ 4 & -2-4i \end{bmatrix} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, on peut choisir le vecteur propre (complexe) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 2 \end{bmatrix}$. Remarquons que si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \text{ , si } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

alors $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Revenons à $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$. En réduisant $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$, on trouve $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc on ne peut trouver qu'un seul vecteur propre associé à la valeur propre double 4, disons $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Cherchons toutefois un « vecteur propre généralisé », i.e. un vecteur $\mathbf{v}_2$ tel que $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Notez qu'on aura alors $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ puisque la matrice $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ est nilpotente d'indice 2 comme le montre un calcul direct. En réduisant la matrice augmentée, nous avons

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On voit donc que les composantes du vecteur $\mathbf{v}_2$ doivent satisfaire $x + y = -1/3$ et puisque la variable libre est « y », on peut choisir $y = 0$, ce qui donne $x = -1/3$ et on peut donc prendre $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \end{bmatrix}^T$. Alors, si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

on a

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4\mathbf{I} + \mathbf{N}$$

Cette dernière matrice n'est pas diagonale mais « simple » dans le sens que $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente d'ordre 2 ($\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$). Si l'on avait plutôt choisi $y = -1$ par exemple, alors on aurait trouvé que $x = 2/3$ et notre vecteur **v2** aurait plutôt été $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \end{bmatrix}^T$. La matrice **P** aurait alors été $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et un calcul aurait montré qu'on a encore

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4\mathbf{I} + \mathbf{N}.$$

Nous poursuivrons avec des matrices carrées d'ordre trois non diagonalisables un peu plus loin.

Disons maintenant pourquoi les matrices symétriques occupent une place si particulière :

2.7 Théorème Dans le cas d'une matrice symétrique **A** d'ordre n,
a) les valeurs propres sont toutes réelles,
b) les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux,

c) l'espace propre associé à une valeur propre de multiplicité k est de dimension k.

Donc, « une matrice symétrique est orthogonalement diagonalisable ».

Preuve : a**)** supposons que $\lambda = a + bi$ soit une valeur propre de $\mathbf{A}$ et montrons que $b = 0$. La matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ n'est pas inversible et il en est de même de la matrice $\mathbf{B}$, définie par

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\,\mathbf{I}\right) = \left(\mathbf{A} - a\,\mathbf{I}\right)^2 + b^2\mathbf{I}\,,$$

car det($\mathbf{M}$ $\mathbf{N}$) = det($\mathbf{M}$) det($\mathbf{N}$). On peut donc trouver un vecteur colonne non trivial $\mathbf{y}$ tel que $\mathbf{By} = \mathbf{0}$. Mais alors, puisque $\mathbf{A} - a\mathbf{I}$ est aussi symétrique, on a, posant $\mathbf{z} = (\mathbf{A} - a\,\mathbf{I})\mathbf{y}$,

$$0 = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\left(\mathbf{A} - a\,\mathbf{I}\right)^2\mathbf{y} + b^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \left((\mathbf{A} - a\,\mathbf{I})\mathbf{y}\right)^T\left((\mathbf{A} - a\,\mathbf{I})\mathbf{y}\right) + b^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{z}^T\mathbf{z} + b^2\mathbf{y}^T\mathbf{y}$$

et comme $\mathbf{z}^T\mathbf{z} \geq 0$ et $\mathbf{y}^T\mathbf{y} > 0$, on doit avoir $b^2 = 0$, donc $b = 0$.

b) Soient $\lambda_1,\ \lambda_2$ deux valeurs propres distinctes de $\mathbf{A}$, associées respectivement aux vecteurs propres $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$. Alors puisque $\mathbf{A}$ est symétrique, on a

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = \lambda_1\,\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 - \lambda_2\,\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = \left(\lambda_1\,\mathbf{x}_1^T\right)\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^T\lambda_2\,\mathbf{x}_2 = \left(\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1\right)^T\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}_2 = 0$$

.

c) Il faut démontrer le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt qui dit que toute base d'un sous-espace S de $\mathbf{R}^n$ peut être remplacée par une base orthonormée (i.e. dont les vecteurs sont 2 à 2 perpendiculaires et de longueur un).

Voici l'idée de la preuve : soit $m \leq n$ et soit $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_m\}$ une base de S. Ici les $\mathbf{x}_i$ sont des vecteurs-colonnes et utilisons la notation habituelle « $\cdot$ » pour désigner le produit scalaire. On pose

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{x}_2 - \left(\frac{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1}\right)\mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_3 &= \mathbf{x}_3 - \left(\frac{\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2}\right)\mathbf{y}_2 - \left(\frac{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1}\right)\mathbf{y}_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{y}_m &= \mathbf{x}_m - \left(\frac{\mathbf{y}_{m-1} \cdot \mathbf{x}_m}{\mathbf{y}_{m-1} \cdot \mathbf{y}_{m-1}}\right)\mathbf{y}_{m-1} - \ \cdots\ - \left(\frac{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_m}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1}\right)\mathbf{y}_1
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que les éléments $\{\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \cdots,\ \mathbf{y}_m\}$ sont orthogonaux (perpendiculaires) 2 à 2 et donc indépendants. On obtient une base orthonormée en normalisant les vecteurs, donc on remplace $\mathbf{y}_i$ par $\dfrac{\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_i\|}$ (i = 1, 2, ..., m). Mais alors, étant donnée une matrice symétrique **A**, on trouve toutes ses valeurs propres (qui sont réelles), pour chaque valeur propre λ de **A**, on trouve une base orthonormée de l'espace propre ; si λ est de multiplicité k, cette base contiendra k éléments. Le polynôme caractéristique de **A** étant de degré n, on obtiendra de cette façon n vecteurs-colonnes que l'on placera côte-à-côte pour obtenir la matrice orthogonale **Q**. ♦

2.8 Remarque Les étudiants qui ont fait peu d'algèbre linéaire savent que la « projection du vecteur **b** sur le vecteur **a** » est donné par la formule

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

et que le vecteur $\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ est justement perpendiculaire au vecteur **a**.

2.9 Exemple On pourra vérifier qu'en appliquant Gram-Schmidt à la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par les colonnes de la matrice **A** suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on obtient celle de l'exemple 1.4.1.

La « factorisation **QR** » du système symbolique TI-Nspire CAS confirme cela (**Q** est unitaire, **R** est triangulaire supérieure et **A** = **QR**) : voir la figure 2.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to a \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{QR}\ a,q,r$ *Done*

$$q \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$r \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 2\cdot\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$q\cdot r \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Figure 2.1

2.10 Autres exemples Voici des exemples de matrices carrées d'ordre trois non diagonalisables.

2.10.1 Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}$.

Nous allons voir que cette matrice possède une valeur propre triple ($\lambda = 2$) et qu'on peut trouver deux vecteurs propres linéairement indépendants. Mais pas trois. Donc elle n'est pas diagonalisable mais on va trouver quand même une matrice inversible **P** telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ sera « simple » dans le sens suivant. Les deux premières colonnes de la matrice **P** seront formées des vecteurs propres $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ tandis que la troisième colonne sera un vecteur **u** qui satisfait l'équation $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$, **v** étant une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. La raison pour laquelle on fait cela ici est que, contrairement à la matrice **A** de l'exemple 2.6 ou à la matrice **A** du prochain exemple (2.10.2), on ne peut pas trouver de « vecteur propre généralisé ». Nous refilons tous les calculs à Nspire pour faire cet exemple, en montrant comment s'y prendre et se vérifier. Bien qu'il existe différentes fonctions calculant directement les valeurs propres et les vecteurs propres, nous ne les utilisons pas ici. Notez que Nspire comprend que $\mathbf{A} - \lambda$ signifie $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$: donc il n'est pas nécessaire d'écrire au long $\mathbf{A} - \lambda$ Identity(3). L'exemple montrera aussi qu'il ne faut jamais réduire une matrice symbolique (contenant des paramètres) en utilisant la commande « rref ». La figure 2.2 montre qu'on a trouvé les vecteurs propres $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et qu'on a vérifié qu'ils étaient bien des vecteurs propres! Si l'on pose maintenant $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ et si l'on veut trouver un vecteur **u** tel que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$, on devra faire à la main la réduction de la matrice augmentée $[\mathbf{A} - 2\mathbf{I} \vdots \mathbf{v}]$. Dans la suite, la matrice **A** a été mise en mémoire comme « mat ».

$mat := \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}$
$\text{cPolyRoots}(\det(mat-\lambda),\lambda)$	$\{2,2,2\}$
$\text{rref}(mat-2)$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} : v2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$mat \cdot v1 - 2 \cdot v1$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$mat \cdot v2 - 2 \cdot v2$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\text{augment}(mat-2, \alpha \cdot v1 + \beta \cdot v2)$	$\begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 & \alpha+\beta \\ 3 & -3 & 3 & \beta \\ 8 & -8 & 8 & -\alpha \end{bmatrix}$

Figure 2.2

On fait maintenant la réduction de la matrice augmentée : les notations suivantes sont utilisées pour les opérations de lignes : $L_{i\,j}, L_i(c)$ et $L_{i\,j}(c)$ pour désigner respectivement les opérations suivantes. Intervertir les lignes i et j : $L_{i\,j}$. Multiplier la ligne i par c : $L_i(c)$. À la ligne i, ajouter c fois la ligne j : $L_{i\,j}(c)$. On réduit $\left[\mathbf{A}-2\mathbf{I} \vdots \mathbf{v}\right]$ où $\mathbf{v}$ est $\alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2$ **:**

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 & \alpha+\beta \\ 3 & -3 & 3 & \beta \\ 8 & -8 & 8 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{L_{21}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 & \alpha+\beta \\ 8 & -8 & 8 & -\alpha \\ 8 & -8 & 8 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{L_{32}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 & \alpha+\beta \\ 8 & -8 & 8 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1(-1/5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{-\alpha-\beta}{5} \\ 8 & -8 & 8 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2(1/8)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{-\alpha-\beta}{5} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{-\alpha}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_{21}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{-\alpha-\beta}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{5}+\frac{3\alpha}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 2.3

On voit donc de la figure 2.3 qu'il est nécessaire de choisir $\frac{\beta}{5}+\frac{3\alpha}{40}=0$, sinon on a une contradiction. Disons qu'on prenne $\alpha = 8$ et $\beta = -3$. Ainsi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{-\alpha-\beta}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{5}+\frac{3\alpha}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les composantes du vecteur **u** doivent donc satisfaire $x + y + z = -1$. Un choix possible est donc

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

On forme la matrice **P** dont les colonnes sont formées des vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et **u** :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Un calcul nous montre que la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ est « simple » dans le sens qu'on peut la décomposer en $2\mathbf{I} + \mathbf{N}$ où **I** est la matrice identité d'ordre 3 et où **N** est nilpotente d'indice 2.

La figure 2.4 montre les calculs faits sur Nspire et où « mat » est en fait la matrice **A**.

$$p:=\text{augment}\left(\text{augment}(v1,v2),\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$p^{-1}\cdot mat\cdot p \qquad \begin{bmatrix}2 & 0 & 8\\0 & 2 & -3\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$n:=\begin{bmatrix}0 & 0 & 8\\0 & 0 & -3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 0 & 8\\0 & 0 & -3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$n^2 \qquad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$2^{k-1}\cdot p\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 8\cdot k\\0 & 2 & -3\cdot k\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot p^{-1} \qquad \begin{bmatrix}\frac{-(5\cdot k-2)\cdot 2^k}{2} & \frac{5\cdot k\cdot 2^k}{2} & \frac{-5\cdot k\cdot 2^k}{2}\\ \frac{3\cdot k\cdot 2^k}{2} & \left(1-\frac{3\cdot k}{2}\right)\cdot 2^k & \frac{3\cdot k\cdot 2^k}{2}\\ 4\cdot k\cdot 2^k & -4\cdot k\cdot 2^k & (4\cdot k+1)\cdot 2^k\end{bmatrix}$$

Figure 2.4

Finalement, les puissances de la matrice **A** deviennent faciles à calculer : en effet, on a vu que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 8\\0 & 2 & -3\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}=2\mathbf{I}+\mathbf{N}$$

d'où $\mathbf{A}=\mathbf{P}(2\mathbf{I}+\mathbf{N})\mathbf{P}^{-1}$. Si k est un entier positif, alors l'associativité du produit matriciel donne $\mathbf{A}^k=\mathbf{P}(2\mathbf{I}+\mathbf{N})^k\mathbf{P}^{-1}$. Maintenant, la formule du binôme de Newton, le fait que les matrices **I** et **N** commutent et le fait que **N** soit nilpotente d'indice deux nous permettent d'écrire que

$$(2\mathbf{I}+\mathbf{N})^k=\sum_{j=0}^{k}\left(\binom{k}{j}\mathbf{N}^j 2^{k-j}\right)=\binom{k}{0}2^k\mathbf{I}+\binom{k}{1}2^{k-1}\mathbf{N}=1\cdot 2^k\mathbf{I}+k\cdot 2^{k-1}\mathbf{N}=2^{k-1}(2\mathbf{I}+k\,\mathbf{N}).$$

Mais alors $\mathbf{A}^k=2^{k-1}\mathbf{P}(2\mathbf{I}+k\,\mathbf{N})\mathbf{P}^{-1}$ et on en voit le résultat à la dernière ligne de la figure 2.4.

2.10.2 Soit la matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\3 & -5 & 0\\4 & 7 & -2\end{bmatrix}$. Ici, des calculs montreront qu'il n'y a encore qu'une seule valeur propre (–2) et qu'on ne peut trouver qu'un seul vecteur propre (l'espace propre est de dimension un). Par exemple, $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$. On trouvera alors un vecteur propre généralisé $\mathbf{v}_2$ en résolvant $(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1$. En faisant l'exemple, on verra qu'on peut choisir le vecteur $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1/11 & 1/11 & 0\end{bmatrix}^T$. Et on trouvera un autre vecteur propre généralisé $\mathbf{v}_3$ en résolvant le système $(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_2$. On verra qu'on peut prendre $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}7/363 & -4/363 & 5\end{bmatrix}^T$. On formera la matrice $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ et on aura

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=-2\mathbf{I}+\mathbf{N}$$

avec la matrice **N** nilpotente d'indice trois :

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

2.10.3 Une matrice carrée **A** d'ordre trois admettant une seule valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées ne sera pas diagonalisable dans le corps des réels (elle le serait dans le corps des complexes en choisissant des vecteurs propres complexes). Mais on va pouvoir trouver une décomposition relativement simple en utilisant le truc de l'exemple 2.6 où l'une des matrices carrées d'ordre deux avait deux valeurs propres complexes conjuguées. Pour fixer les idées, soit la matrice suivante :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}30 & 64 & 23\\ -11 & -23 & -9\\ 6 & 15 & 4\end{bmatrix}.$$

On verra que ses valeurs propres sont 1, $5\pm 2i$. On trouvera une matrice inversible **P** telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}.$$

3- Systèmes linéaires du premier ordre à coefficients constants. Matrices fondamentales.

Pour motiver cette section, nous commençons avec un exemple provenant de problèmes de réservoirs.

3.1 Exemple Imaginons 3 réservoirs T_1, T_2, T_3 formant un système fermé dans le sens que T_1 est relié à T_2 qui est relié à T_3 qui est relié à T_1. Soit donc un certain système d'équations différentielles comme le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -0.2y_1 + 0.2y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 0.2y_1 - 0.4y_2 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 0.4y_2 - 0.2y_3 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay} \text{ avec } \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & -1.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

En résolvant le système ci-haut, nous trouverions la quantité de sel au temps t dans chacun des réservoirs. Mais l'analyse matricielle laisse déjà présager que les points stationnaires du système, c'est-à-dire les solutions **x** à **Ax** = **0** sont, outre la solution triviale (ce qui signifie que tous les réservoirs étaient vides dès le départ), les vecteurs du type $\left[2c_0,\ c_0,\ 2c_0\right]$. En effet, **A** n'est pas inversible (det(**A**) = 0 comme on peut le vérifier) et donc $\lambda = 0$ est une valeur propre de **A**, dont un vecteur propre associé est de la forme $\left[2c_0,\ c_0,\ 2c_0\right]$. On peut montrer que les 2 autres valeurs propres sont les nombres complexes conjugués $-0.4 \pm 0.2i$ et qu'alors la solution est donnée par

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2c_0 + e^{-0.4t}\left(c_1\cos(0.2t) - c_2\sin(0.2t)\right) \\ y_2(t) &= c_0 + e^{-0.4t}\left(c_1\sin(0.2t) + c_2\cos(0.2t)\right) \\ y_3(t) &= 2c_0 + e^{-0.4t}\left(\left(-c_1 - c_2\right)\cos(0.2t) + \left(-c_1 + c_2\right)\sin(0.2t)\right) \end{aligned}$$

On remarque que $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \equiv 5c_0$ (la quantité totale de sel dans les 3 réservoirs est constante dans le temps puisque c'est un système fermé) et que

$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) = 2c_0, \quad \lim_{t\to\infty} y_2(t) = c_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} y_3(t) = 2c_0.$$

Ainsi, la quantité de sel dans chaque réservoir tend à se stabiliser.

Si nous choisissons l'exemple où $y_1(0) = 50,\ y_2(0) = y_3(0) = 0$, alors nous obtenons $c_0 = 10,\ c_1 = 30$ et $c_2 = -10$ et les graphiques suivants :

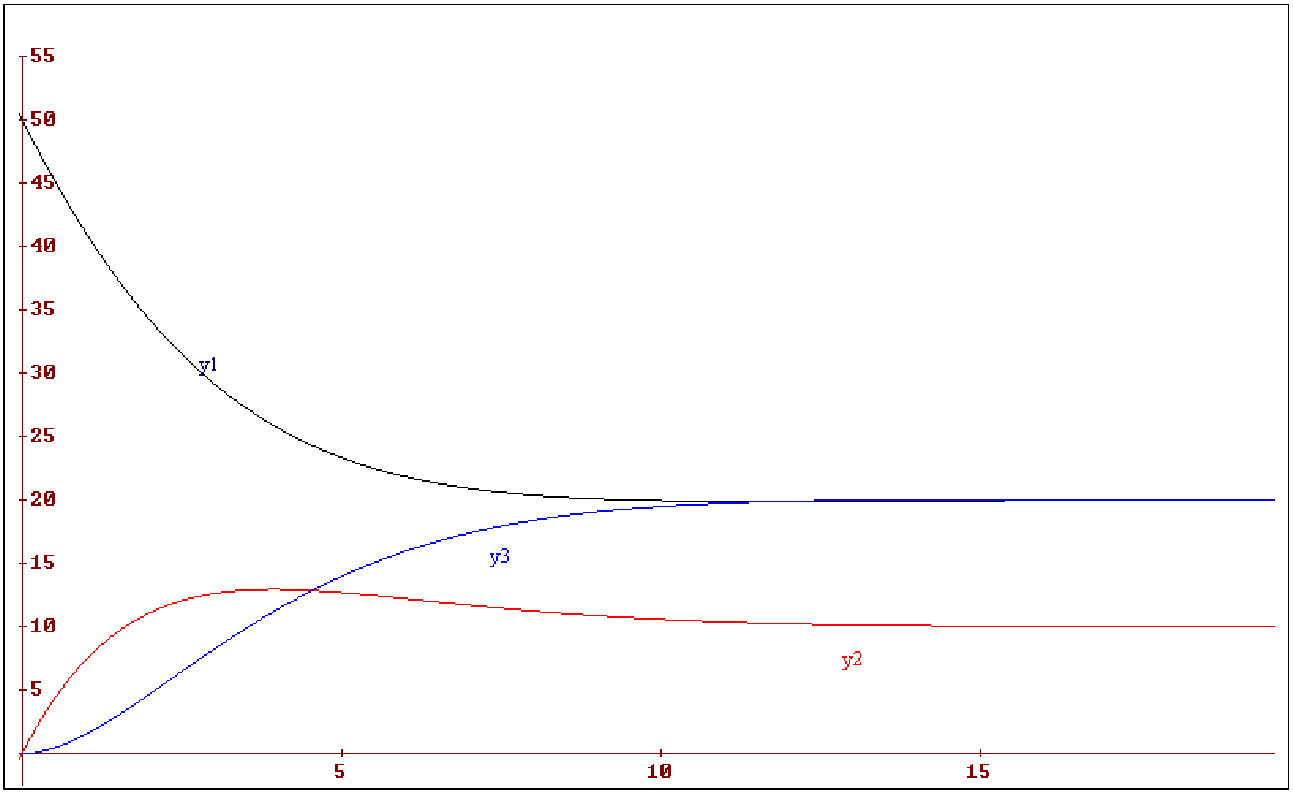


Figure 3.1

3.2 Définitions Soient **A** et **B** deux matrice carrée d'ordre n, soit α un scalaire.

3.2.1 Disons que **A** est la matrice suivante : $\|\mathbf{A}\| = \left[a_{ij}\right]$. Posons $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$. On peut vérifier que cela définit une <u>norme</u> sur l'espace (vectoriel) des matrices, autrement dit que les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\|\mathbf{A}\| \geq 0 \text{ et } \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\|$$

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

On montre alors que $\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|$. Ainsi, pour tout entier positif k, on a $\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k$ et donc le critère de comparaison des séries permet de dire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ converge absolument.

3.2.2 C'est ce qu'on appelle l'<u>exponentielle de la matrice **A**</u>, notée $e^{\mathbf{A}}$: $e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$.

3.3 Exemples Cette dernière définition n'est commode que dans certains cas ! Voici certains cas où il n'y a pas de problèmes pour trouver $e^{\mathbf{A}}$.

3.3.1 Si **A** est diagonale, disons **A** = $\mathbf{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$, alors $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{diag}(e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda_n})$. En effet, si k est un entier positif, alors $\mathbf{A}^k = \mathbf{diag}\left(\lambda_1^{\ k},\ \lambda_2^{\ k},\ \cdots,\ \lambda_n^{\ k}\right)$ et on sait que du cours d'analyse que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_m^k}{k!} = e^{\lambda_m}\ (\lambda_m \in \mathbb{C})$.

3.3.2 Si **A** est nilpotente, i.e. si, à partir d'une certaine puissance k, $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, alors la série sera finie.

3.3.3 Si **A** est diagonalisable, alors le prochain théorème nous dit que $e^{\mathbf{A}}$ est facilement calculable.

3.4 Théorème Soient **P**, **S** et **T** des matrices carrées d'ordre n. Alors

a) Si $\mathbf{Q} = \mathbf{P}\,\mathbf{T}\,\mathbf{P}^{-1}$, alors $e^{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}\,e^{\mathbf{T}}\,\mathbf{P}^{-1}$

b) Si **S T** = **T S**, alors $e^{\mathbf{S}+\mathbf{T}} = e^{\mathbf{S}}\,e^{\mathbf{T}}$

c) $e^{-\mathbf{S}} = \left(e^{\mathbf{S}}\right)^{-1}$

d) Si n = 2 et **T** = $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, alors $e^{\mathbf{T}} = e^{a}\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

Preuve : si k est un entier positif, l'associativité du produit matriciel permet d'écrire que

$$\mathbf{Q}^k = \left(\mathbf{P}\,\mathbf{T}\,\mathbf{P}^{-1}\right)\left(\mathbf{P}\,\mathbf{T}\,\mathbf{P}^{-1}\right)\cdots\left(\mathbf{P}\,\mathbf{T}\,\mathbf{P}^{-1}\right) = \mathbf{P}\,\mathbf{T}^k\mathbf{P}^{-1}$$

et le résultat a) suit. Pour b), on doit utiliser le résultat sur les séries qui dit que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sont deux séries numériques qui convergent absolument, alors la série-produit (de Cauchy) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ où $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ converge aussi absolument. Mais alors, par la formule du binôme de Newton et le fait que les matrices commutent, on a

$$e^{\mathbf{S}}e^{\mathbf{T}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{S}^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{T}^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{\mathbf{S}^i\,\mathbf{T}^{n-i}}{i!(n-i)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{S}+\mathbf{T})^n}{n!} = e^{\mathbf{S}+\mathbf{T}}\ .$$

En posant **T** = −**S**, c) s'obtient de b). Finalement, si z est le nombre complexe $z = a + bi$, alors la formule d'Euler donne $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$ et la correspondance (bijection) suivante

$a+ib \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ donne alors $e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$. ♦

3.5 Exemples

3.5.1 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$. On a trouvé à l'exemple 2.4.1 une matrice inversible

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Mais alors on obtient que

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \dfrac{3e^{8t}+e^{4t}}{4} & \dfrac{e^{4t}-e^{8t}}{4} & \dfrac{e^{4t}-e^{8t}}{2} \\ \dfrac{e^{4t}-e^{8t}}{4} & \dfrac{3e^{8t}+e^{4t}}{4} & \dfrac{e^{4t}-e^{8t}}{2} \\ \dfrac{e^{4t}-e^{8t}}{4} & \dfrac{e^{4t}-e^{8t}}{4} & \dfrac{e^{4t}+e^{8t}}{2} \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3.5.2 Soit $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont $5 \pm 4i$ (revoir l'exemple 2.6). Alors

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\, e^{5t} \begin{bmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\cos(4t) + \dfrac{\sin(4t)}{2}\right) e^{5t} & \dfrac{-5\sin(4t)\,e^{5t}}{4} \\ \sin(4t)\,e^{5t} & \left(\cos(4t) - \dfrac{\sin(4t)}{2}\right) e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Et si l'on prend (toujours à l'exemple 2.6) la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, on a trouvé que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{D}\,\mathbf{P}^{-1}$ où $\mathbf{D}$ n'est pas « diagonale » mais $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{I} + \mathbf{N}$. Puisque $\mathbf{I}$ et $\mathbf{N}$ commutent et que $\mathbf{N}$ est nilpotente d'indice 2, on a $e^{\mathbf{D}t} = e^{4t}(\mathbf{I} + \mathbf{N}t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mais alors

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{4t}\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = e^{4t}\begin{bmatrix} 1-3t & -3t \\ 3t & 3t+1 \end{bmatrix}.$$

On peut aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, cité à la fin de l'exemple 2.4.1. En effet, on considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

qui possède une valeur propre double puisque det($\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$) = $(\lambda - 4)^2$. On fait ceci :

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{A}-4\mathbf{I}+4\mathbf{I})t} = e^{(\mathbf{A}-4\mathbf{I})t}e^{4\mathbf{I}t} = e^{(\mathbf{A}-4\mathbf{I})t}e^{4t}\mathbf{I} = e^{4t}e^{(\mathbf{A}-4\mathbf{I})t} = e^{4t}\left(\mathbf{I} + (\mathbf{A}-4\mathbf{I})t + \frac{(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2t^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$= e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}t + \mathbf{0}\right) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1-3t & -3t \\ 3t & 1+3t \end{bmatrix}.$$

3.5.3 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors on trouve facilement les valeurs propres 0, $\pm i\sqrt{3}$ puisque $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda\left(\lambda^2 + 3\right)$. On calcule la matrice réduite-échelonnée correspondant à la valeur propre 0 : dénotant simplement $\underset{\text{rref}}{\sim}$ par $\sim$, on a

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On calcule la matrice réduite-échelonnée correspondant à la valeur propre complexe $i\sqrt{3}$:

$$\mathbf{A} - i\sqrt{3}\mathbf{I} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1/2 - i\sqrt{3}/2 \\ 1/2 - i\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

Soit donc où $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ et

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right) & -\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) \\ 0 & \sin\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right) \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 & 1+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) \\ \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 & 1+2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 \\ 1-\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 & 1+2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) \end{bmatrix}.$$

On remarque que les dernières matrices satisfont le problème $\frac{d\,\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX},\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ Ce n'est pas un hasard.

3.6 Théorème La fonction $t \mapsto e^{\mathbf{A}t}$ est dérivable pour tout t et $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}\,e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$

Preuve : $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)\mathbf{A}} - e^{t\,\mathbf{A}}}{h} = e^{t\,\mathbf{A}}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\,\mathbf{A}} - \mathbf{I}}{h}$ puisque $t\mathbf{A}$ et $h\mathbf{A}$ commutent. En continuant, on a

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = e^{t\,\mathbf{A}}\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h\mathbf{A})^k}{k!}}{h} = e^{t\,\mathbf{A}}\left(\mathbf{A} + \lim_{h\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^k\mathbf{A}^k}{k!}\right) = e^{t\,\mathbf{A}}\left(\mathbf{A}+\mathbf{0}\right) = e^{t\,\mathbf{A}}\mathbf{A}\,.$$

Et **A** commutant avec chaque terme de la série, on a l'autre égalité. ♦

3.7 Théorème Le système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec condition initiale

$$\frac{d\,\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay},\quad \mathbf{y}\left(t_0\right) = \mathbf{y}_0$$

admet la solution unique

$$\mathbf{y}(t) = e^{\left(t-t_0\right)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$$

et cette solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si $\mathbf{g}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle contenant le point t_0), alors le problème (non-homogène)

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay} + \mathbf{g}(t),\quad \mathbf{y}\left(t_0\right) = \mathbf{y}_0$$

admet la solution unique

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds \right).$$

Preuve : remarquons que la dernière formule est plus générale et inclut le cas $\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$. Il suffit donc de prouver cette dernière. Notons toutefois que cette formule s'obtient par la méthode de variation des paramètres. On a

$$\mathbf{y}(t_0) = e^{\mathbf{A}t_0}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds \right) = e^{\mathbf{A}t_0}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \mathbf{0}\right) = \mathbf{y}_0$$

Maintenant, en dérivant et appliquant le deuxième théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds \right)\right]$$

$$= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds \right) + e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{g}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)$$

Il reste à démontrer l'unicité. Soit $\mathbf{z}(t)$ une autre solution de $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ et soit $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds \right)$. Posons $\mathbf{w}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t)$. On a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{w}(t) = -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t) + e^{-\mathbf{A}t}\frac{d}{dt}\mathbf{z}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{g}(t)$$

d'où $\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds$ et donc $\mathbf{w}(t) = e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds$.

Mais alors $\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}(t)$. ♦

3.8 Remarque et définition Le théorème 3.7 est très utile mais il ne faut pas penser qu'il est nécessaire d'avoir trouvé l'exponentielle de la matrice **A** afin de pouvoir résoudre un système d'É.D. de la forme

$$\frac{d\,\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Plus généralement, une matrice carrée $\mathbf{M}(t)$ est appelée une matrice fondamentale ou une base du système $\frac{d\,\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$ si ses colonnes forment un ensemble de n solutions linéairement indépendantes de ce même système. Donc, en dénotant les colonnes de $\mathbf{M}(t)$ par $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$, cela signifie deux choses :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{Ax}_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Le théorème suivant est utile pour vérifier si un ensemble de solutions forme une base. On peut même le formuler pour des matrices $\mathbf{A}$ non constantes :

3.9 Théorème Soit $\mathbf{P}(t) = \left[p_{ij}(t)\right]$ une matrice carrée continue sur un certain intervalle ouvert I et soit $\mathbf{x}(t) = \left[x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ \cdots\ \ x_n(t)\right]^T$. Considérons le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}.$$

Soient $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ n solutions du système sur I. Ici, $\mathbf{x}_i(t) = \left[x_{i1}(t)\ \ x_{i2}(t)\ \ \cdots\ \ x_{in}(t)\right]^T$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Posons le déterminant suivant (appelé wronskien des solutions $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$) :

$$W = \det\left(\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}\right).$$

Alors :

a) Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ sont linéairement dépendantes sur I, $W = 0$ en tout point de I ;

b) Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ sont linéairement indépendantes sur I, alors $W \neq 0$ en tout point de I.

Preuve : a**)** Supposons que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ sont linéairement dépendantes sur I. Donc, il existe des scalaires non tous nuls c_1, c_2, ..., c_n tels que $\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{0}$ et donc W est forcément identiquement nul.

b) Supposons que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ sont linéairement indépendantes sur I mais qu'il existe un point t_0 de I tel que $W = 0$ en ce point. Alors il existe des constantes c_1, c_2, ..., c_n non toutes nulles telles que

$$c_1\mathbf{x}_1(t_0) + c_2\mathbf{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Avec ce choix de constantes, soit la fonction

$$\mathbf{f}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)\,.$$

Cette fonction satisfait le système $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}$ puisque combinaison linéaire des $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{0}$. Par le théorème d'existence et d'unicité (théorème 3.4, résumé 1), on a $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ pour tout t. Contradiction. ♦

3.10 Remarque Si nous nous restreignons au cas où $\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}$ est constante et au cas facile mais non toujours réalisé où les n solutions du système $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1\, e^{\lambda_1 t},\ \ \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2\, e^{\lambda_2 t},\ \ \cdots,\ \ \mathbf{x}_n = \mathbf{v}_n\, e^{\lambda_n t}$$

avec $\mathbf{v}_i$ n vecteurs propres indépendants de $\mathbf{A}$, alors on a

$$W = \det\left(\begin{bmatrix} v_{11}\, e^{\lambda_1 t} & v_{21}\, e^{\lambda_2 t} & \cdots & v_{n1}\, e^{\lambda_n t} \\ v_{12}\, e^{\lambda_1 t} & v_{22}\, e^{\lambda_2 t} & \cdots & v_{n2}\, e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n}\, e^{\lambda_1 t} & v_{2n}\, e^{\lambda_2 t} & \cdots & v_{nn}\, e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\right) = e^{\lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t}\ \det(\mathbf{P})$$

où $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$. Et puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle et que $\mathbf{P}$ est inversible (colonnes linéairement indépendantes), le théorème 3.9 est redémontré.

3.11 Exemple Revenons à l'équation linéaire d'ordre 2, homogène que nous avons rappelée au résumé 1. On sait que la solution de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

est $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ lorsque $y_1,\ y_2$ sont 2 solutions indépendantes de l'É.D., donc telles que

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cela peut être reconfirmé en plongeant $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en un système du premier ordre en posant $y' = z$, d'où $y'' = z'$. Ainsi, l'É.D. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ est équivalente au système du premier ordre

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q(x) & -p(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}.$$

3.12 Théorème Comment calculer $e^{\mathbf{A}t}$. On peut procéder comme suit :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}(t)\,\mathbf{M}^{-1}(0)$$

où **M** est une quelconque matrice fondamentale de $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$. Ou encore, par transformée de Laplace inverse :

$$e^{\mathbf{A}t} = \pounds^{-1}\left[\left(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\right].$$

Preuve : remarquons que $e^{\mathbf{A}t}$ est aussi une matrice fondamentale du système $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$, par les théorèmes 3.6 et 3.4c). Soient **M**(t) et **N**(t) deux matrices fondamentales du système $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$. Alors il existe une matrice constante **C** telle que **M**(t) = **N**(t) **C**. En particulier, en prenant **N**(t) = $e^{\mathbf{A}t}$, on a

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}(t)\,\mathbf{C}^{-1} \; .$$

Mais, $\mathbf{M}(0) = e^{\mathbf{A}0}\mathbf{C} = \mathbf{I}\,\mathbf{C} = \mathbf{C}$, d'où le résultat. ♦

Finalement, appliquons la méthode des transformées de Laplace au système linéaire à coefficients constants suivant

$$\frac{d\,\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{X},\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}.$$

où **A** est une matrice d'ordre n. La solution unique de ce dernier système est évidemment $e^{\mathbf{A}t}$.

Soit $\mathbf{X}(s) = \pounds\left[\mathbf{X}(t)\right]$. Alors, on a $s\,\mathbf{X}(s) - \mathbf{I} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}(s)$ puisque **A** est constante. Donc, on a

$(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{I}$, d'où $\mathbf{X}(s) = \left(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}$ et ainsi $\mathbf{X}(t) = \pounds^{-1}\left[\left(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\right]$. ♦

3.13 Exemples

3.13.1 Résolvons le système linéaire suivant, non homogène

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}, & x_1(1) = 0 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 + \dfrac{2e^{-t}}{1+t^2}, & x_2(1) = 1 \end{cases}$$

On a donc ici $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),\ \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{g}(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Un calcul montre que

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 1 & 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

est une matrice fondamentale du système (en effet, les valeurs propres de **A** sont 0 et -1 et des vecteurs propres associés sont $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ et $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ respectivement). Et la formule du théorème 3.7 donne, si l'on utilise une matrice fondamentale autre que l'exponentielle de **A**, le résultat suivant :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}(t)\left(\mathbf{M}^{-1}(1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_1^t \mathbf{M}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\ ds\right).$$

Ce calcul peut être effectué par un système symbolique et est facile à programmer :

$$mat:=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}:g:=\begin{bmatrix} \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \\ \dfrac{2\cdot e^{-t}}{1+t^2} \end{bmatrix}:to:=1:yo:=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$kit\_ets\_mb\backslash de\_syst(mat,g,to,yo) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{-\left(4\cdot e^{t}-4\cdot \tan^{-1}(t)-4\cdot e+\pi\right)\cdot e^{-t}}{4} \\ \dfrac{-\left(2\cdot e^{t}-4\cdot \tan^{-1}(t)-4\cdot e+\pi\right)\cdot e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{propFrac}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{-\left(4\cdot e^{t}-4\cdot \tan^{-1}(t)-4\cdot e+\pi\right)\cdot e^{-t}}{4} \\ \dfrac{-\left(2\cdot e^{t}-4\cdot \tan^{-1}(t)-4\cdot e+\pi\right)\cdot e^{-t}}{2} \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} e^{1-t}+\left(\tan^{-1}(t)-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot e^{-t}-1 \\ 2\cdot e^{1-t}+\left(2\cdot \tan^{-1}(t)-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot e^{-t}-1 \end{bmatrix}$$

Figure 3.2

3.13.2 La méthode des transformées de Laplace est fort rapide pour calculer l'exponentielle d'une matrice. En effet, reprenons l'exemple 2.5.3 où l'on avait la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors on a par *Derive* :

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(s - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\cdot s}{3\cdot(s^2+3)} + \frac{1}{3\cdot s} & \frac{s}{3\cdot(s^2+3)} + \frac{1}{s^2+3} - \frac{1}{3\cdot s} & -\frac{s}{3\cdot(s^2+3)} + \frac{1}{s^2+3} + \frac{1}{3\cdot s} \\ \frac{s}{3\cdot(s^2+3)} - \frac{1}{s^2+3} - \frac{1}{3\cdot s} & \frac{2\cdot s}{3\cdot(s^2+3)} + \frac{1}{3\cdot s} & \frac{s}{3\cdot(s^2+3)} + \frac{1}{s^2+3} - \frac{1}{3\cdot s} \\ -\frac{s}{3\cdot(s^2+3)} - \frac{1}{s^2+3} + \frac{1}{3\cdot s} & \frac{s}{3\cdot(s^2+3)} - \frac{1}{s^2+3} - \frac{1}{3\cdot s} & \frac{2\cdot s}{3\cdot(s^2+3)} + \frac{1}{3\cdot s} \end{bmatrix}$$

Figure 3.3

Et la transformée de Laplace inverse de chacune des entrées est trouvable immédiatement ici et

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 & 1+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) \\ \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 & 1+2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 \\ 1-\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) & \cos\left(\sqrt{3}\,t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)-1 & 1+2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) \end{bmatrix}$$

3.14 Exemple et définition Comment faire pour trouver une matrice fondamentale dans le cas de valeurs propres multiples ? Un théorème d'algèbre linéaire dit qu'une quelconque matrice carrée d'ordre n possède toujours n vecteurs propres *généralisés* indépendants. Si λ est une valeur propre d'une matrice $\mathbf{A}$, alors un vecteur propre généralisé de rang r associé à λ est un vecteur $\mathbf{v}$ tel que

$$(\mathbf{A}-\lambda\,\mathrm{I})^r\,\mathbf{v}=\mathbf{0} \quad \text{mais} \quad (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{v}\neq\mathbf{0}.$$

Si $r = 1$, cela signifie simplement que $\mathbf{v}$ est un vecteur propre ordinaire associé à λ. Si λ est une valeur propre de multiplicité $k > 1$ mais pour laquelle il est quand même possible de trouver k vecteurs propres indépendants, on dit que λ est complète et lorsque ce n'est pas le cas, disons que λ ne possède que $p < k$ vecteurs propres indépendants, alors le nombre $d = k - p$ représente le nombre de « vecteurs propres manquants ». Considérons le système

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$$

où la matrice $\mathbf{A}$ d'ordre n possède une valeur propre réelle multiple λ et un seul vecteur propre $\mathbf{v}_1$, donc on a une seule solution de (1), $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$. On pourrait, s'inspirant de l'équation scalaire d'ordre 2 dans le cas de racine double, penser que $te^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ sera une seconde solution indépendante mais cela ne fonctionne pas car

$$\frac{d}{dt}\left(t\,e^{\lambda t}\mathbf{v}_1\right) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + t\,\lambda\,e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 \quad \text{tandis que} \quad \mathbf{A}\,t\,e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 = t\,e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = t\,e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v}_1$$

et il faudrait donc que $e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, ce qui est impossible puisqu'un vecteur propre n'est pas $\mathbf{0}$.

3.14.1 Supposons que λ est une valeur propre double. Essayons comme seconde solution,

$$\mathbf{y}_2 = t\,e^{\lambda t}\,\mathbf{v}_1 + e^{\lambda t}\,\mathbf{v}_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}\left(t\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right)$$

où $\mathbf{v}_2$ est à déterminer.

On doit avoir $\dfrac{d\mathbf{y}_2}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}_2$, d'où $e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + t\,\lambda\,e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + \lambda\,e^{\lambda t}\mathbf{v}_2 = \lambda\,te^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v}_2$, et donc $\mathbf{v}_1 + \lambda\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}_2$. Ainsi, $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ (et donc, $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^2\,\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$). On a vu à l'intérieur de l'exemple 2.6 qu'on peut toujours trouver un tel vecteur $\mathbf{v}_2$.

3.14.2 Supposons que λ est une valeur propre triple. On trouve alors encore une seconde solution

$$\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}\left(t\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right)$$

où $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ et on trouve une troisième solution indépendante

$$\mathbf{y}_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{1}{2}t^2\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\right)$$

où $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ et où $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$.

3.14.3 Plus généralement, si λ est une valeur propre de multiplicité algébrique k et de multiplicité géométrique 1, alors cela se généralise pour donner des solutions du type

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2\right) \\
\mathbf{y}_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) \\
\vdots \\
\vdots \\
\mathbf{y}_k = e^{\lambda t}\left(\frac{\mathbf{v}_1 t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{\mathbf{v}_{k-2}\,t^2}{2!} + \mathbf{v}_{k-1}\,t + \mathbf{v}_k\right)
\end{gathered}$$

où les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ sont les vecteurs $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \cdots, \mathbf{u}_1$ tels que

$$\begin{gathered}
(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{I})\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \\
(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{I})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \neq \mathbf{0} \\
\vdots \\
\vdots \\
(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{I})\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}
\end{gathered}$$

et $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{I})\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Ici, $\mathbf{v}_1$ est un vecteur propre (ordinaire) de **A** correspondant à la valeur propre λ et les autres $\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ sont des « vecteurs propres généralisés ».

3.14.4 Supposons maintenant que **A** possède une valeur propre triple λ et qu'on puisse trouver 2 vecteurs propres indépendants, disons $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Donc, on a 2 solutions indépendantes $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2$. Suite à l'exemple 2.10.1, on peut imaginer qu'une troisième solution sera de la forme

$$\mathbf{y}_3 = e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}\,t + \mathbf{v}_3\right)$$

où **v** est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et où $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$ est résoluble pour $\mathbf{v}_3$.

3.15 Exemple Trouvons une matrice fondamentale pour le système $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Nous savons (exemple 2.10.1) que **A** possède une valeur propre triple $\lambda = 2$ et 2 vecteurs propres indépendants $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$, ce qui donnera déjà 2 solutions $\mathbf{y}_1 = e^{2t}\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{y}_2 = e^{2t}\mathbf{v}_2$.

En cherchant une troisième solution de la forme $\mathbf{y}_3 = e^{2t}\left(t\,\mathbf{v} + \mathbf{u}\right)$ où **v** est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et où **u** satisfait $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$, nous avons trouvé une solution **u**, à savoir $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. Mais alors la matrice $\mathbf{M}(t)$ suivante est une matrice fondamentale :

$$\mathbf{M}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-5t \\ 1 & 0 & 3t \\ 0 & -1 & 8t \end{bmatrix}. \text{ Et } e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}(t)\,\mathbf{M}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} (1-5t)e^{2t} & 5te^{2t} & -5te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 8te^{2t} & -8te^{2t} & (8t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$$

Dans Nspire, si **A** est une matrice carrée, alors exp(**A**) ou encore $e^{\mathbf{A}}$ calcule *numériquement* l'exponentielle de la matrice mais pas de la matrice **A***t*. Nous avons rajouté la fonction et c'est toujours la variable *t* qui apparaît dans la réponse (puisque notre fonction utilise la fonction ilaplace de la librairie ets_specfunc). En remplaçant ensuite *t* par 1, on peut donc se vérifier en approximant ensuite le résultat.

$$mat := \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$kit\_ets\_mb\backslash expmat(mat) \qquad \begin{bmatrix} (1-5\cdot t)\cdot e^{2\cdot t} & 5\cdot t\cdot e^{2\cdot t} & -5\cdot t\cdot e^{2\cdot t} \\ 3\cdot t\cdot e^{2\cdot t} & (1-3\cdot t)\cdot e^{2\cdot t} & 3\cdot t\cdot e^{2\cdot t} \\ 8\cdot t\cdot e^{2\cdot t} & -8\cdot t\cdot e^{2\cdot t} & (8\cdot t+1)\cdot e^{2\cdot t} \end{bmatrix}$$

Figure 3.4

Les « gros » CAS *Maple* et *Mathematica* ont une fonction « exponentielle de matrice » :

```
> with(LinearAlgebra) :
> A := Matrix([[-3, 5,-5], [3,-1, 3], [8,-8, 10]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixExponential(A, t);
```

$$\begin{bmatrix} (-5\,t+1)\,e^{2\,t} & 5\,t\,e^{2\,t} & -5\,t\,e^{2\,t} \\ 3\,t\,e^{2\,t} & (-3\,t+1)\,e^{2\,t} & 3\,t\,e^{2\,t} \\ 8\,t\,e^{2\,t} & -8\,t\,e^{2\,t} & e^{2\,t}\,(8\,t+1) \end{bmatrix}$$

Untitled-1 *

In[3]:= $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{pmatrix}$

Out[3]= $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{pmatrix}$

In[9]:= `MatrixExp[A t]`

Out[9]= $\begin{pmatrix} -e^{2t}(5t-1) & 5e^{2t}t & -5e^{2t}t \\ 3e^{2t}t & -e^{2t}(3t-1) & 3e^{2t}t \\ 8e^{2t}t & -8e^{2t}t & e^{2t}(8t+1) \end{pmatrix}$

Figure 3.5

4- Systèmes d'équations différentielles linéaires et non linéaires. Plan de phase, points critiques et stabilité

4.1 Contexte et définitions Un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

est appelé autonome (la variable « t » n'apparaît pas à droite). Les fonctions f et g sont supposées de classe C^1 dans une certaine région R du plan des xy, appelé ici plan de phase du système. Le théorème 3.4 du résumé 1 nous assure que, étant donné un t_0 et un quelconque point $(x_0, y_0) \in R$, il y a une unique solution (on dit souvent *trajectoire*) $x = x(t)$ et $y = y(t)$ du système, solution définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 et satisfaisant $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. Un point (x_*, y_*) tel que $f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) = 0$ est dit point critique du système. Un tel point est toujours une solution du système (dite solution stationnaire ou d'équilibre). Pour un tel point, le champ de pentes de l'équation différentielle (appelé ici champ de direction)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

présente une indétermination du type 0/0. Lorsqu'on dessine le champ de direction du système d'É.D. avec des trajectoires, on obtient ce qu'on appelle le portrait de phase.

4.1.1 Cas particulier Soit **A** une matrice constante, 2 × 2, inversible et considérons le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay} \text{ où } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T \text{ et où } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Remarquez qu'il s'agit d'un cas particulier du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

En effet, $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \end{cases}$$

avec x remplacé par y_1 et y remplacé par y_2. Puisque **A** est supposée inversible, alors le seul point critique du système $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ est (0, 0) et $\lambda = 0$ ne peut pas être une valeur propre de **A**. Ainsi, l'origine est un point critique isolé et c'est le seul point critique. Les valeurs propres de **A** sont

$$\lambda = \frac{\mathrm{Tr} \pm \sqrt{\mathrm{Tr}^2 - 4\mathrm{Det}}}{2} \quad (= \lambda_1,\ \lambda_2)$$

où $\text{Tr} = a_{11} + a_{22}$, $\text{Det} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$. Il y a donc 5 cas à considérer. On peut avoir 2 valeurs propres réelles distinctes (même signe ou signe opposé), 2 valeurs propres réelles égales (valeur propre double) et deux valeurs propres complexes conjuguées (partie réelle nulle ou non). Et la solution du système $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a la forme suivante :

- Si **A** possède 2 valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2 avec $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ des vecteurs propres correspondants respectifs, alors $\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Les exemples 4.2.1 et 4.2.2 traitent ce cas.

- Supposons que **A** possède une valeur propre double λ. Si **A** n'est pas déjà diagonale, elle n'est pas diagonalisable (revoir l'exemple 2.6 pour un tel cas). Alors on a une première solution $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ où $\mathbf{v}_1$ est le seul vecteur propre (à multiple près) qu'on a pu trouver. On trouve un vecteur propre généralisé $\mathbf{v}_2$ et la seconde solution sera (revoir l'exemple 3.14.1) $\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}\left(t\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right)$. L'exemple 4.2.3 dans sa seconde partie traite ce cas. Si par contre **A** est déjà diagonale, alors c'est un cas facile et les courbes solutions sont une famille de droite comme l'exemple 4.2.3 le début de l'exemple 4.2.3 le montrera.

- Si **A** possède des valeurs propres complexes $a \pm b\,i$, elle n'est pas diagonalisable (dans les réels : revoir l'exemple 2.6, matrice **B)** On sait qu'on trouve un vecteur propre complexe $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\ \mathbf{v}$ associé à la valeur propre $a + b\ i$ et les parties réelle et imaginaire de la solution complexe $e^{(a+bi)t}(\mathbf{u} + i\,\mathbf{v})$ sont deux solutions indépendantes. Les exemples 4.2.4 et 4.2.5 vont dans ce sens.

Allons-y donc avec de exemples pour illustrer chacun des cas précédents. Le solveur numérique RK de Nspire a été utilisé pour tracer le plan de phase qui consiste en le graphique du champ de pentes obtenu en calculant dy_1/dy_2 à partir de

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 \text{ et } \frac{dy_2}{dt} = a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2$$

et de quelques trajectoires. Notez que nous avons choisi le paramètre t entre 0 et 10 et des conditions initiales quelconques. Une résolution symbolique était évidemment possible par exponentiation de la matrice **A** et un tracé en mode paramétrique aurait pu être ensuite fait mais la précision du solveur RK et la fenêtre 2D en mode entrée É.D. est fort intéressante dans Nspire. De toutes façons, nos exemples donnent la solution symbolique par calcul des valeurs propres. Autre remarque : à l'exception de certains cas, il n'est pas très utile de résoudre l'É.D.

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2}{a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2}$$

puisque sa solution est très souvent une expression implicite qui ne nous renseigne pratiquement pas sur l'allure du graphique.

4.2 Exemples traitant toutes les possibilités

4.2.1 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ On trouverait -2 et -4 comme valeurs propres et la solution générale suivante : $\mathbf{y} = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. En d'autres termes, pour bien comprendre la notation, nous avons ici $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y}_2$ où $\mathbf{y_1} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y}_2 = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ou si l'on préfère $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ avec $y_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$ et $y_2 = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t}$.

En faisant des choix de constantes, on obtient une famille de trajectoires. Si l'on change **A** de signe, alors les valeurs propres changent de signe, on conserve les mêmes vecteurs propre et la différence, c'est que les trajectoires, plutôt que de se diriger vers l'origine, s'en éloignent lorsque *t* augmente. On aurait un portrait comme celui-ci :

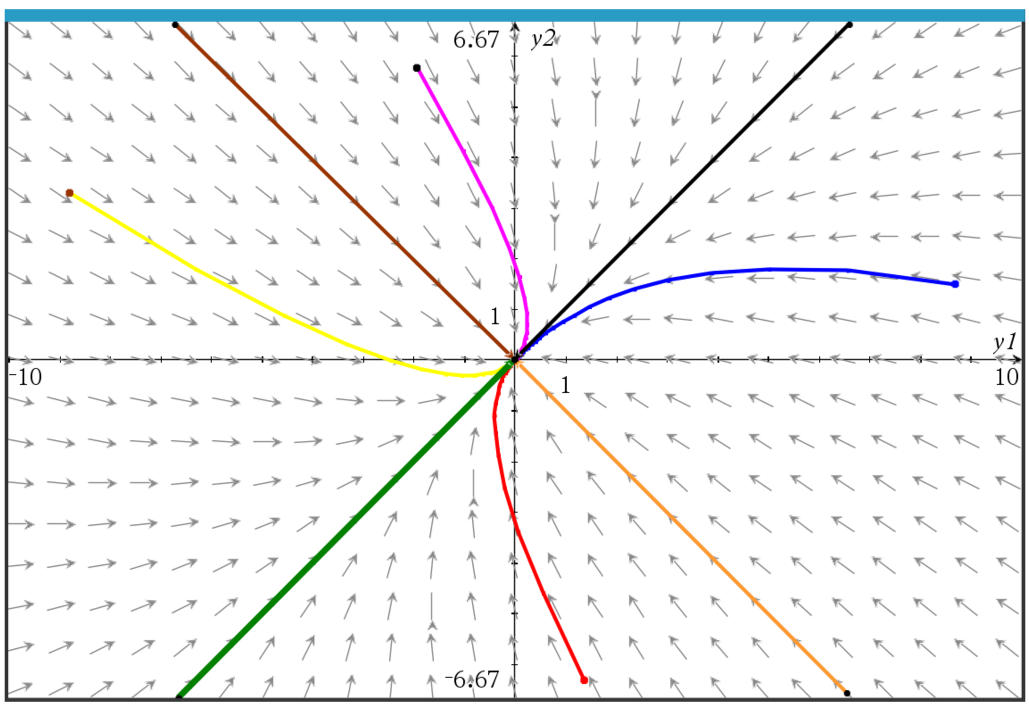


Figure 4.1

On remarque que toutes les trajectoires, sauf 2 d'entre elles, ont la même droite tangente de direction (ici c'est la droite *y2* = *y1* à cause du vecteur $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$) ; les 2 trajectoires exceptionnelles ont elles aussi une même droite tangente de direction, la droite *y2* = – *y1*, mais différente. Cela est dû au fait de la dominance d'une exponentielle sur l'autre. On dit ici que (0, 0) est un <u>noeud impropre</u>.

4.2.2 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\pm$ 1 (ou bien considérez $-\mathbf{A}$ dont les valeurs propres sont encore $\pm$ 1). On trouve facilement des vecteurs propres $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et alors $y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_2 e^{-t}$. Donc $y_1 y_2 = c$ où c est une constante, donc une famille d'hyperboles, on dit que l'origine est un <u>col</u> ou <u>point de selle</u>.

On remarque ici qu'il y a 2 trajectoires qui se dirigent vers l'origine, 2 autres qui s'en éloignent et toutes les autres ne passent pas par l'origine. Les deux trajectoires qui se dirigent vers l'origine sont obtenues en faisant le choix $c_1 = 0$ de sorte que $y_1 = 0$ et $y_2 = c_2 e^{-t}$. Alors si c_2 est choisi positif, on part sur l'axe vertical dans sa partie supérieure et se dirige vers l'origine tandis que si c_2 est choisi négatif on part encore sur l'axe vertical mais de sa partie inférieure et se dirige vers l'origine. On fait la même analyse pour les deux trajectoires sur l'axe horizontal (l'axe y_1)

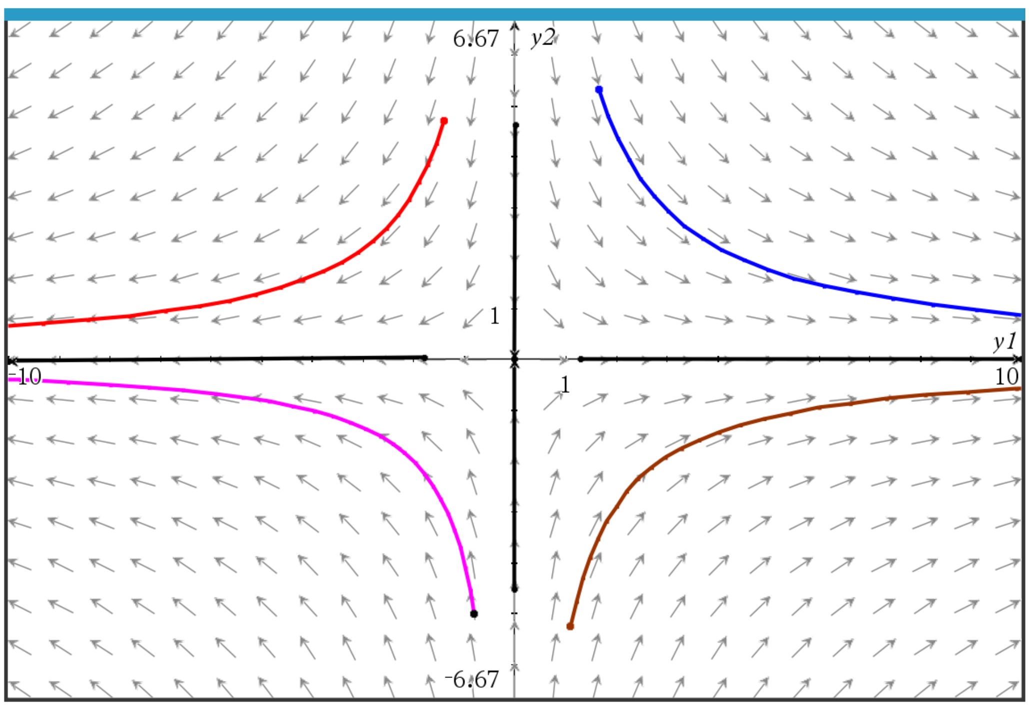


Figure 4.2

4.2.3 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ une matrice <u>déjà diagonale</u> ayant une valeur propre double égale à 1

La solution est évidente ici, aucun calcul requis : $y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_2 e^t \;\Rightarrow\; c_1 y_1 = c_2 y_2$, une famille de droite, un <u>foyer</u>. Voir la figure 4.3.

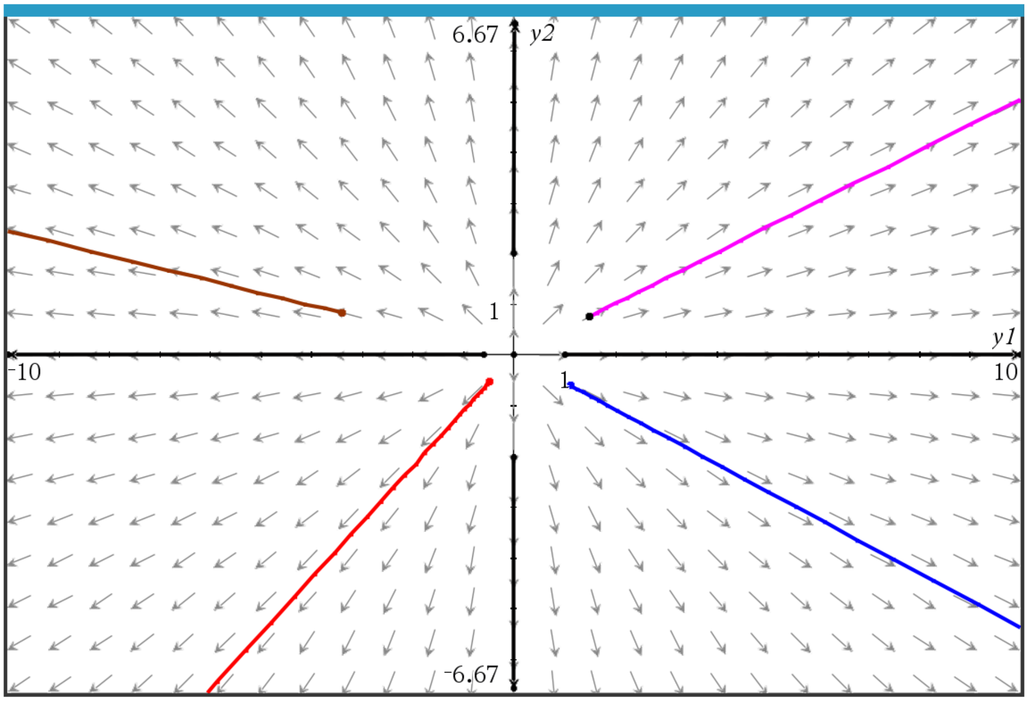


Figure 4.3

Si maintenant $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, alors $\mathbf{A}$ n'est pas déjà diagonale mais possède encore une valeur propre double, à savoir 3. Un vecteur propre associé est $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et un vecteur propre généralisé possible est $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. D'après 3.14.1, deux solutions indépendantes sont alors

$$e^{3t}\mathbf{v}_1 \text{ et } e^{3t}\left(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2\right)$$

et la solution générale est en est une combinaison linéaire :

$$\mathbf{y} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Il y a donc une seule direction propre. On dit alors que l'origine est un <u>noeud impropre ou dégénéré</u> (impropre dans un sens différent que tantôt). Voir la figure 4.4.

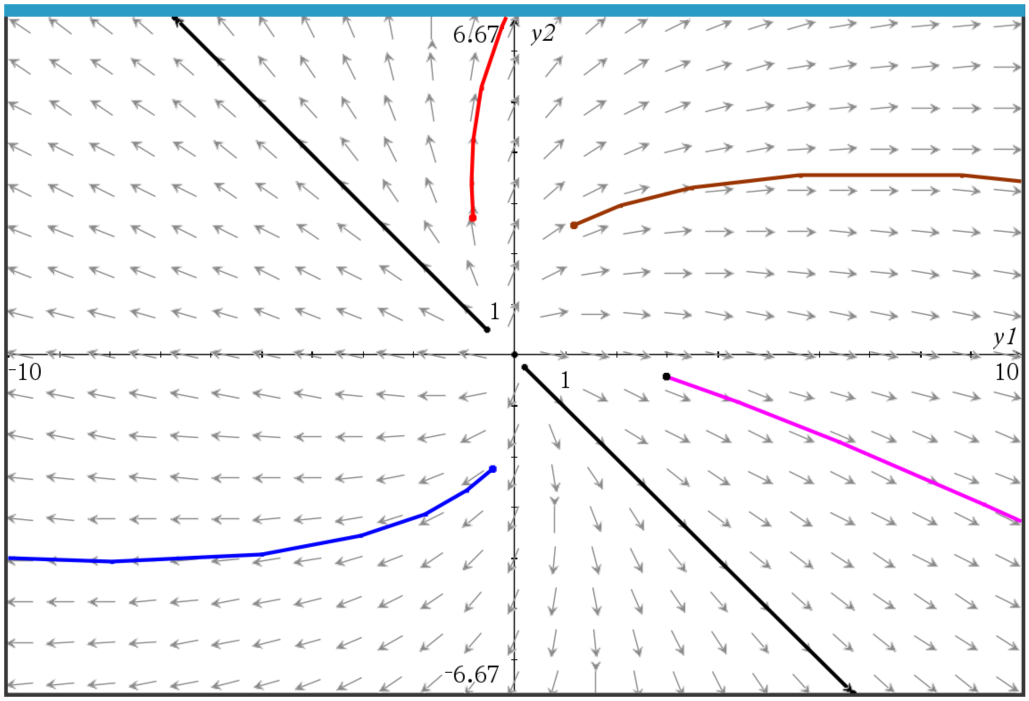


Figure 4.4

4.2.4 Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ une matrice dont les valeurs propres sont complexes et évidemment égales à $-1 \pm i$ puisqu'on a déjà la forme canonique. Un vecteur propre (complexe) associé à la valeur propre $-1 + i$ est $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ et alors 2 solutions (réelles) linéairement indépendantes sont données par $\mathbf{y}_1 = \operatorname{Re}\left(e^{(-1+i)\,t}\mathbf{w}\right)$, $\mathbf{y}_2 = \operatorname{Im}\left(e^{(-1+i)\,t}\mathbf{w}\right)$. On trouve une famille de <u>spirales</u>

$$\mathbf{y} = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Le plan de phase est dessiné à la figure 4.5. On a ici un bel exemple montrant que la solution du système nous informe beaucoup plus que la solution de l'É.D. obtenue en éliminant le temps *t*. En effet, on aurait l'É.D.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-y_1 - y_2}{-y_1 + y_2}$$

qu'on peut résoudre par la méthode des É.D. du premier ordre dites « homogènes » et dont la solution est la famille de courbes implicites

$$2\arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) - \ln\left(\frac{1}{y_1^{\,2}}\right) - \ln\left(y_1^{\,2} + y_2^{\,2}\right) = 2\ln\left(y_1\right) + C$$

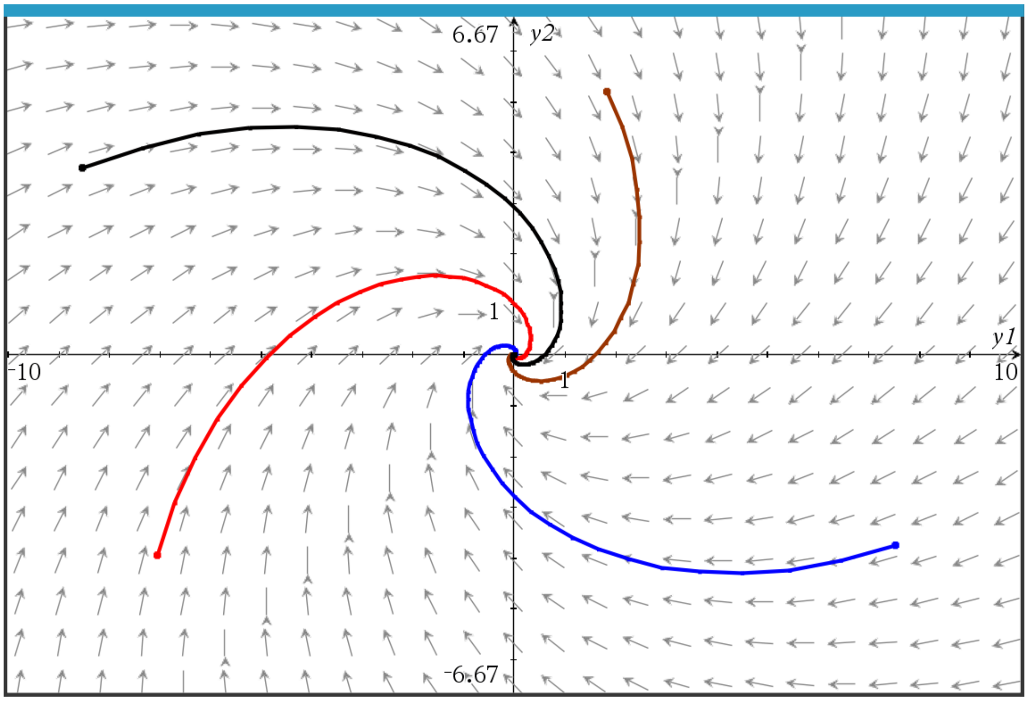


Figure 4.5

4.2.5 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont imaginaires pures, $\pm\, 2i$. Un vecteur propre associé à la valeur propre $2\,i$ est $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ et deux solutions indépendantes seraient alors $\mathbf{y}_1 = \mathrm{Re}\left(e^{2i\,t}\mathbf{w}\right) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y}_2 = \mathrm{Im}\left(e^{2i\,t}\mathbf{w}\right) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix}$. La solution du système est donc

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix},$$

C'est une famille d'ellipses puisque la solution implique que $2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c =$ constante (on peut réussir à éliminer le paramètre « t »). De toutes façons, ici le système implique que l'on a l'É.D.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-4y_1}{y_2} \qquad \Rightarrow \qquad y_2\,dy_2 = -4y_1\,dy_1 \qquad \Rightarrow \frac{{y_2}^2}{2} + 2{y_1}^2 = C.$$

On dit que l'origine est un <u>centre</u> comme le montre la figure 4.6.

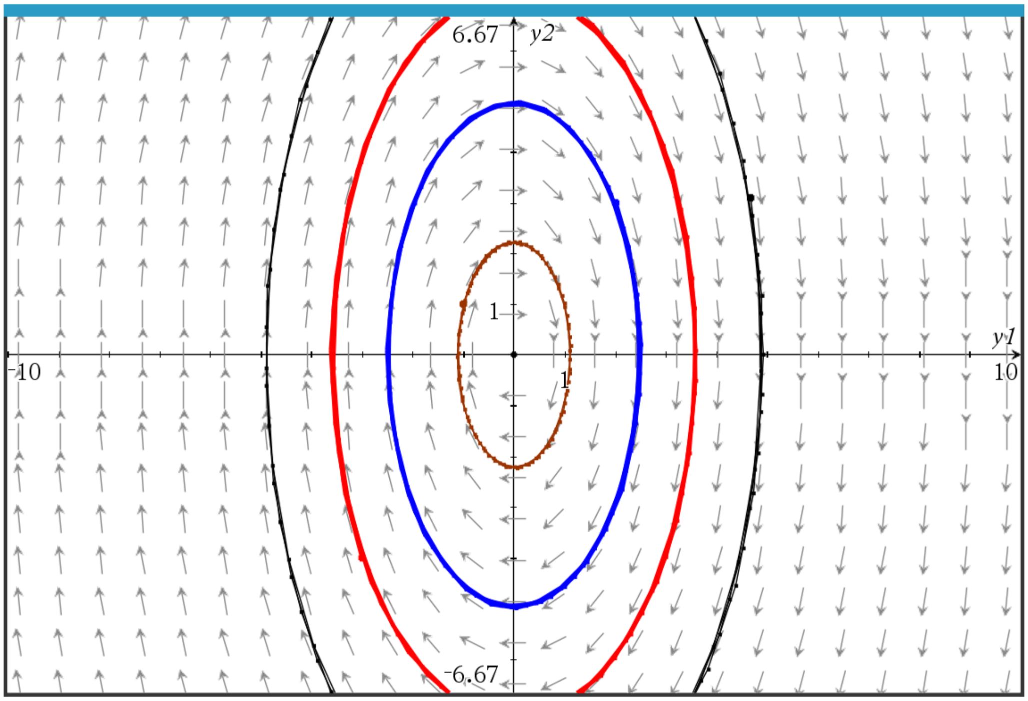


Figure 4,6

Résumons en ce qui concerne la terminologie associée à la nature du point critique du système $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ où **A** est une matrice constante, 2 × 2, <u>inversible :</u>

4.3 Définition Nature du point critique (0, 0) et terminologie :

Valeurs propres de **A**	Nature du point critique
Réelles, de même signe, distinctes	Noeud
Réelles, de signe contraire, distinctes	Col (point de selle)
Réelles et égales	Foyer (ou noeud propre (« étoile ») : **A** déjà diagonale) ou Noeud impropre (ou dégénéré : **A** non diagonale)
Complexes conjuguées	Spirale
Imaginaires pures	Centre

Figure 4.7

4.4 Remarque Un noeud est aussi appelé une <u>source</u> ou un <u>puits</u>, dépendant si toutes les trajectoires s'en approchent ou s'éloignent.

4.5 Définitions Un point critique (x_*, y_*) du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

est dit <u>stable</u> si, lorsque le point initial $(x_0,\ y_0)$ est suffisamment proche de $(x_*,\ y_*)$, alors la trajectoire $(x(t),\ y(t))$ reste près de $(x_*,\ y_*)$ pour tout $t > 0$. Plus précisément, étant donné ε > 0, il existe δ > 0 tel que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon \quad (t > 0)$$

où la norme est la norme euclidienne et où, par exemple, $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$. C'est le cas d'un noeud impropre qui est une source. Si le point critique n'est pas stable, il est dit <u>instable</u>. Le point critique $(x_*,\ y_*)$ est dit <u>asymptotiquement stable</u> s'il est stable et si, en plus, toute trajectoire qui commence suffisamment proche de $(x_*,\ y_*)$ tend vers $(x_*,\ y_*)$ lorsque $t \to +\infty$. Donc, cela signifie qu'il existe δ > 0 tel que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_*$$

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration immédiate découle de l'analyse des pages précédentes :

4.6 Théorème Soit **A** une matrice 2 × 2 inversible (donc 0 n'est pas une de ses valeurs propres). On considère le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

dont (0, 0) est le seul point critique. Soient $\lambda_1,\ \lambda_2$ les 2 valeurs propres de **A**. Alors, le point critique (0, 0) est

a) asymptotiquement stable si les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont toutes deux négatives (Note : si $\lambda_1,\ \lambda_2$ sont réelles, elles sont leurs propres parties réelles !)

b) stable mais non asymptotiquement stable si les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont toutes les deux nulles (donc $\lambda_1,\ \lambda_2 = \pm bi$).

c) instable si λ_1 ou λ_2 possèdent une partie réelle positive. ♦

4.7 Résumé Voici les propriétés de stabilité du système linéaire $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, **A** matrice d'ordre deux et inversible (det(**A**) ≠ 0).

Valeurs propres	**Type des points critiques**	**Stabilité**
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Noeud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Noeud	Asymptotiquement stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point de selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Noeud propre ou impropre	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Noeud propre ou impropre	Asymptotiquement stable
$\lambda_1,\ \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spirale	 Instable Asymptotiquement stable
$\lambda_1 = bi,\ \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable

Figure 4.8

Nous n'avons pas l'intention ni la compétence de nous lancer dans l'étude des systèmes d'É.D. non linéaires complexes. Par contre, les systèmes « presque linéaires » (« almost linear systems ») qu'on appelle quasi linéaires se comportent sensiblement comme les systèmes linéaires. Nous en parlons maintenant.

4.8 Définition Soit **A** une matrice carrée d'ordre *n* constante, soit **F** un champ de vecteurs et considérons un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point critique isolé (donc, on peut trouver un disque centré en **0** à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres points critiques). On suppose, en plus, que det $\mathbf{A} \neq 0$, donc $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est aussi un point critique isolé du système $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$. Le système est dit <u>système quasi linéaire au voisinage de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$</u> si **F** admet des dérivées partielles continues et satisfait à la condition

$$\frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \to 0 \text{ lorsque } \|\mathbf{x}\| \to 0$$

4.9 Exemple Une façon d'obtenir un système quasi linéaire consiste à « linéariser » un système. En effet, considérons de nouveau le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

On suppose que les fonction *f* et *g* sont différentiables en $(x_0,\, y_0)$. Donc,

$$f\left(x_0+u,\ y_0+v\right)=f\left(x_0,\ y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,\ y_0\right)u+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,\ y_0\right)v+R_f(u,\ v)$$

$$g\left(x_0+u,\ y_0+v\right)=g\left(x_0,\ y_0\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0,\ y_0\right)u+\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0,\ y_0\right)v+R_g(u,\ v)$$

où les restes satisfont $\dfrac{R_f(u,\ v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\to 0$ et $\dfrac{R_g(u,\ v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\to 0$ lorsque $\sqrt{u^2+v^2}\to 0.$

Si l'on suppose en plus que le point $(x_0,\ y_0)$ est un point d'équilibre du système original et si l'on effectue le changement de variables $x=x_0+u,\ y=y_0+v$, tout cela est transformé en

$$\begin{cases} u'=\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,\ y_0\right)u+\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,\ y_0\right)v+R_f(u,\ v) \\ v'=\dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x_0,\ y_0\right)u+\dfrac{\partial g}{\partial y}\left(x_0,\ y_0\right)v+R_g(u,\ v) \end{cases}$$

et donc pour les valeurs de (u, v) près de l'origine, les restes $R_f(u,\ v)$ et $R_g(u,\ v)$ sont petits et le dernier système peut être comparé au système suivant, dit <u>linéarisation</u> du système original au point d'équilibre $(x_0,\ y_0)$:

$$\begin{cases} \tilde{u}'=\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,\ y_0\right)\tilde{u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,\ y_0\right)\tilde{v} \\ \tilde{v}'=\dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x_0,\ y_0\right)\tilde{u}+\dfrac{\partial g}{\partial y}\left(x_0,\ y_0\right)\tilde{v} \end{cases}$$

Si l'on note $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}$ et que $\mathbf{J}$ désigne la matrice jacobienne du champ vectoriel $\mathbf{G}=\left[\, f(x,y)\quad g(x,y)\right]^T$ évaluée en $(x_0,\ y_0)$, on a donc $\mathbf{u}'=\mathbf{J}\mathbf{u}$. Remarquons que le système précédent est linéaire, à coefficients constants. Donc, le théorème 4.6 s'applique si det($\mathbf{J}$) ≠ 0.

4.10 Exemple Considérons le système quasi linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+2y+2x^2-3y^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-3y+7x\,y \end{cases}$$

Quasi linéaire puisque $\mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix} 2x^2-3y^2 \\ 7xy \end{bmatrix}$ est tel que $\dfrac{\|\mathbf{F}(x,y)\|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ si $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ comme on peut le vérifier en utilisant les coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. En effet, un calcul direct montre que $\dfrac{\|\mathbf{F}(r\cos\theta, r\sin\theta)\|}{\|(r\cos\theta, r\sin\theta)\|} = r\sqrt{24\sin^2\theta\cos^2\theta + 5\sin^2\theta + 4}$ ce qui tend bien vers 0 si r tend vers 0.

Les points critiques du système sont (0, 0), (0.93, −1.06), (0.28, 1.06) et (–2.35, – 0.48) comme on peut le vérifier (on peut même les trouver en mode exact). Il est bon de choisir une fenêtre « pas trop grande » ici puisque les 4 points critiques sont tous dans un voisinage de l'origine. Ensuite, nous pourrons « zoomer » sur un point critique en particulier. Des points de conditions initiales pris au hasard laissent présager que le point critique (–2.25, –0.48) semble être un nœud asymptotiquement stable selon ce qu'en montre le figure 4.9. On voudrait analyser chacun des points critiques.

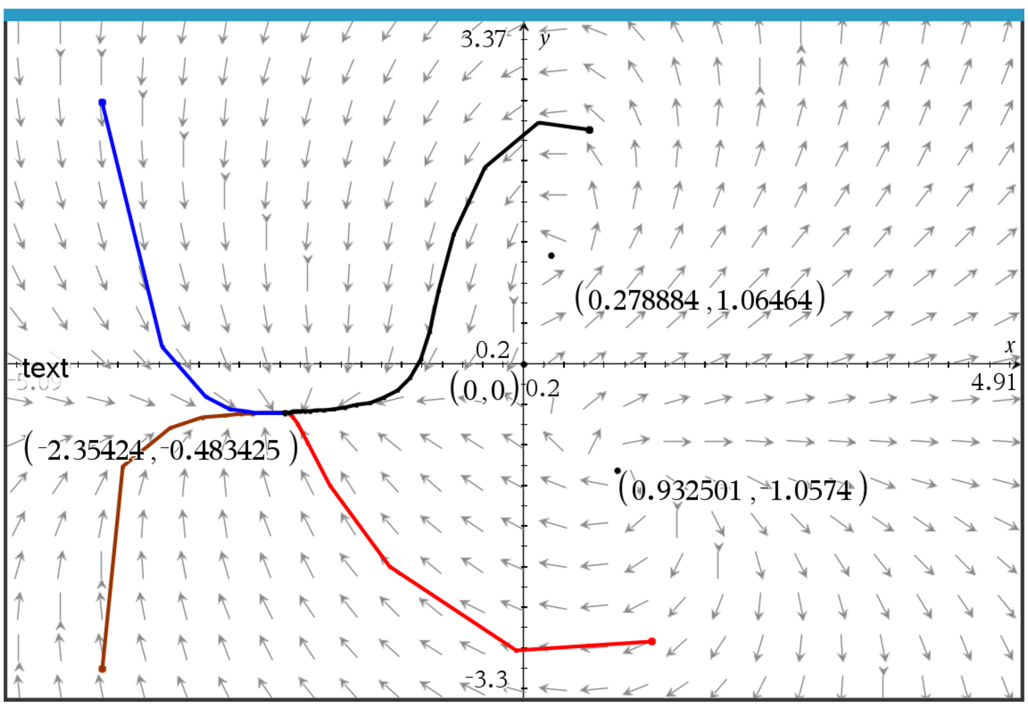


Figure 4.9

Afin de poursuivre cet exemple, nous aurons besoin du théorème suivant (non démontré) qui permet de dire que, sauf dans le cas de valeurs propres imaginaires pures ou de valeurs propres réelles doubles, le système quasi linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

($\mathbf{A}$ matrice carrée d'ordre deux) se comporte comme le système linéaire lorsque $\mathbf{x}$ est petit. En d'autres mots, si nous ne sommes pas en présence de valeurs propres imaginaires pures ou réelles doubles, un terme non linéaire petit n'affecte pas le type et la stabilité du point critique.

4.11 Théorème Soient $\lambda_1,\ \lambda_2$ les valeurs propres du système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$$

correspondant au système quasi-linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Alors le type et la stabilité du point critique (0, 0) sont donnés dans le tableau suivant :

Valeurs propres	**Système linéaire**		**Système quasi-linéaire**	
	Type	**Stabilité**	**Type**	**Stabilité**
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Noeud	Instable	Noeud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Noeud	Asympt. stable	Noeud	Asympt. stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point de selle	Instable	Point de selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Noeud imp. ou pr.	Instable	Noeud ou Spirale	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Noeud imp. ou pr.	Asympt. stable	Noeud ou Spirale	Asympt. stable
$\lambda_1,\ \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spirale	 Instable Asympt. stable	Spirale	 Instable Asympt. stable
$\lambda_1 = bi,\ \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable	Centre ou Spirale	Indéterminée

Figure 4.10

4.12 Suite de l'exemple 4.10 Regardons la nature des 4 autres points critiques. La matrice jacobienne de

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{bmatrix} 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ 4x - 3y + 7xy \end{bmatrix}$$

est donnée par

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 4 + 4x & 2 - 6y \\ 4 + 7y & -3 + 7x \end{bmatrix}.$$

La séance suivante de Nspire montre les calculs requis :

$mat:=\text{zeros}\left(\left\{4\cdot x+2\cdot y+2\cdot x^2-3\cdot y^2,4\cdot x-3\cdot y+7\cdot x\cdot y\right\},\{x,y\}\right)$	$\begin{bmatrix} 0.932501 & ^-1.0574 \\ 0.278884 & 1.06464 \\ 0 & 0 \\ ^-2.35424 & ^-0.483425 \end{bmatrix}$
$jac(x,y):=\begin{bmatrix} 4+4\cdot x & 2-6\cdot y \\ 4+7\cdot y & ^-3+7\cdot x \end{bmatrix}$	*Done*
$nat(i):=\text{eigVl}(jac(mat[i,1],mat[i,2]))$	*Done*
$nat(1)$	$\{5.62876+4.89603\cdot i,5.62876-4.89603\cdot i\}$
$nat(2)$	$\{2.03386+6.38395\cdot i,2.03386-6.38395\cdot i\}$
$nat(3)$	$\{5.,^-4.\}$
$nat(4)$	$\{^-5.20548,^-19.6912\}$

Figure 4.11

On retourne voir la figure 4.10 (tableau) et on peut affirmer que (0.93, –1.06) et (0.28, 1.06) correspondent à une spirale instable, que l'origine (0, 0) est un point de selle (instable) et que (–2.35, – 0.48) correspond à un noeud asymptotiquement stable.

4.13 Exemple Pendule simple, intégrale elliptique. Soit un objet de masse m attaché au bout d'une tige de longueur L dont la masse est négligeable par rapport à l'objet. Considérons la figure suivante :

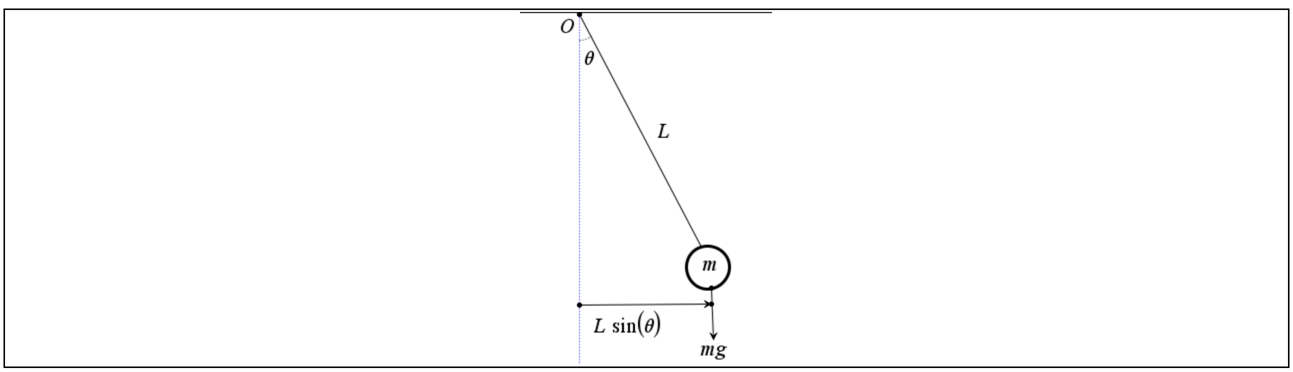


Figure 4.12

Soit $\theta(t)$ l'angle à l'instant t entre la verticale et la tige, le sens positif étant le sens anti-horaire. On peut supposer une force de résistance proportionnelle à la vitesse avec « c » la constante de proportionnalité. On peut montrer que l'équation différentielle obtenue sera

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-cL\frac{d\theta}{dt}-mgL\sin(\theta).$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\alpha\frac{d\theta}{dt}+\omega^2\sin(\theta)=0$$

où l'on a posé $\alpha = \dfrac{c}{mL}, \omega^2 = \dfrac{g}{L}$. Traitons le cas où l'on néglige la force de résistance, donc $c = 0$ et donc $\alpha = 0$. En posant $\theta(t) = x(t),\ y = \dfrac{dx}{dt}$, on transforme cette É.D. du deuxième ordre en le système (non linéaire) du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

On va supposer les conditions initiales suivantes : $x(0) = \theta(0) = \alpha,\ \ y(0) = \theta'(0) = 0$. On peut déjà trouver les trajectoires puisque, du système ci-haut, on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 \sin x}{y}$$

d'où, par intégration de cette É.D. séparable, par utilisation de la c.i. $y(\alpha) = 0$ et par utilisation de l'identité trigonométrique du double de l'angle, on trouve

$$y^2 = 2\omega^2 \left(\cos x - \cos \alpha\right) = 4\omega^2 \left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Soit $E = 2\omega^2 \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Alors, $y = \pm\sqrt{2E - 4\omega^2 \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$. On voit donc que la quantité sous le radical demeure positive if $E > 2\omega^2$ (il y avait suffisamment d'énergie pour que le pendule tourne toujours, pas d'oscillation). Si $0 < \alpha < \pi$, alors $E < 2\omega^2$ et il y aura des oscillations.

Cela sera mieux compris si l'on remarque que les points critiques du système sont de la forme $\left(n\pi,\ 0\right)\ \ n \in \mathbb{Z}$. Remarquons que le théorème 4.11 s'appliquera car il s'agit bien d'un système quasi linéaire puisqu'on peut écrire

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x = -\omega^2 x + \omega^2 \dfrac{x^3}{3!} - \cdots \end{cases}$$

Ou si l'on préfère : $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\omega^2 x^3}{6} - \dfrac{\omega^2 x^5}{120} + \cdots \end{bmatrix}$

La matrice jacobienne du système est

$$\mathbf{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2\cos(x) & 0 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres de $\mathbf{J}(n\pi,0)$ sont $\pm\omega\sqrt{(-1)^{n+1}}$. On en déduit que les points de la forme $(2n\pi,\ 0)$ $n\in\mathbb{Z}$ sont des centres stables et que ceux de la forme $((2n+1)\pi,\ 0)$ $n\in\mathbb{Z}$ sont des points de selle instables (cela correspond à ce qu'on s'attend physiquement).

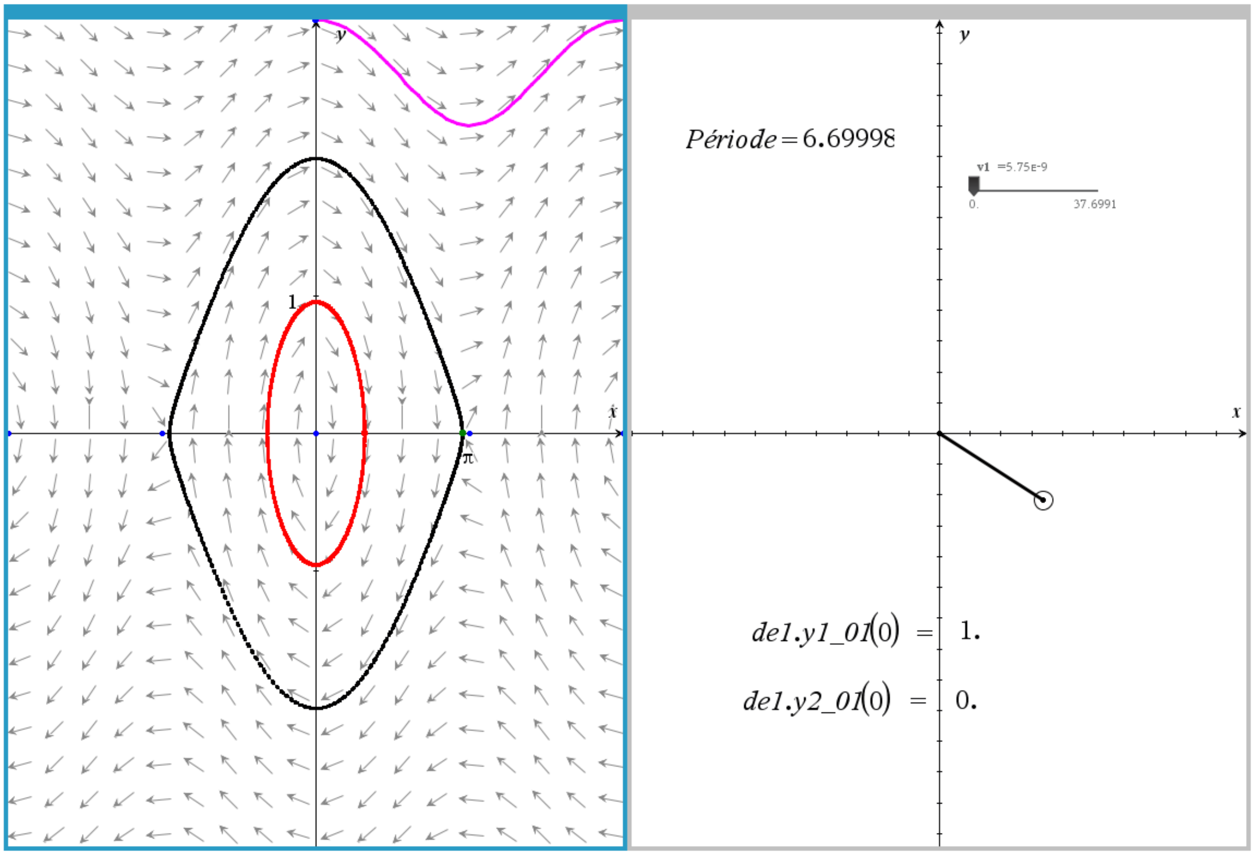
Revenons à $y^2=2\omega^2(\cos x-\cos\alpha)$ et trouvons la période d'oscillation *T*. On a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\alpha).$$

Ainsi, $dt=-\sqrt{\dfrac{L}{2g}}\dfrac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$ puisque θ décroît quand t croît (pour t petit). Mais alors, en utilisant la notation $k=\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, la formule du double de l'angle et le changement de variables $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=k\sin z$, on peut montrer que (détails en classe)

$$T=4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}=4\sqrt{\frac{L}{g}}F\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

où $F(k,\ \phi)\equiv\displaystyle\int_0^{\phi}\frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}}$ est appelée <u>intégrale elliptique de première espèce</u>. Remarquons que si α tend vers 0, alors la période d'oscillation tend vers la période $4\sqrt{\dfrac{L}{g}}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{\omega}$, qui est celle du sytème linéaire $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-\omega^2 x\end{cases}$ ou de l'É.D. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$. En classe, nous regarderons le plan de phase et différentes trajectoires. Et une animation permettra de mesurer la période d'oscillation :



y
1
x
π
y
Période = 6.69998
v1 =5.75E-9
0.
37.6991
x
de1.y1_01(0) = 1.
de1.y2_01(0) = 0.

Figure 4.13

Liste d'exercices pour le résumé 2

Problème 1 Calcul de valeurs propres, de vecteurs propres et d'exponentielle de matrices. Pour chacune des matrices **A** :

a) Trouvez le spectre (= ensemble des valeurs propres) et des vecteurs propres associés.

b) Calculez ensuite la matrice exponentielle $e^{\mathbf{A}t}$ ($t \in \mathbb{R}$).

c) Vérifiez votre réponse en b) en testant si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ et $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}$ lorsque $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

d) Essayez aussi de trouver une formule générale pour une puissance entière positive de chacune des matrices. Donc essayez de trouver une formule pour $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -30 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Problème 2 Système d'É.D. provenant d'un problème de réservoirs. Le réservoir *A* contient initialement 100 gal d'eau pure tandis que le réservoir *B* contient 100 gal d'eau mélangée avec 90 lb de sel. Les 2 réservoirs sont reliés entre eux (voir figure) et on maintient le mélange uniforme par brassage. Résolvez cet exercice en trouvant la quantité de sel dans chacun des réservoirs ($x_1(t)$ et $x_2(t)$) de 2 façons différentes :

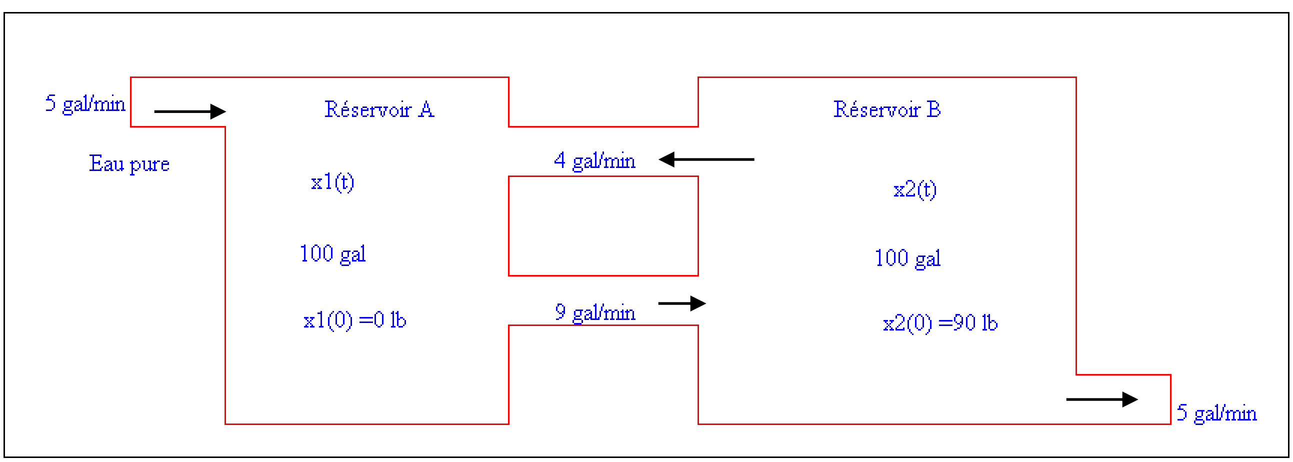


Figure pour le problème 2

a) Trouvez la solution exacte $(x_1(t),\ x_2(t))$ en utilisant la technique des transformées de Laplace.
b) Trouvez (encore) la solution exacte en utilisant les techniques de vecteurs propres.
c) Esquissez les 3 graphiques suivants, chacun dans une fenêtre appropriée

$$(t, x_1(t)),\ (t, x_2(t)) \text{ et } (x_1, x_2).$$

d) Comparez le graphique de (x_1, x_2) avec celui du plan de phase généré par une méthode numérique robuste (RK par exemple).
e) Reprenez cet exercice en supposant que l'entrée au taux de 5 gal/min est une solution saline de concentration 2 lb/gal plutôt que d'être de l'eau pure.

Problème 3 Système d'É.D. provenant d'un problème de réservoirs. Chaque réservoir (voir figure plus loin) contient 50 L de liquide et les 2 réservoir sont reliés entre eux tel qu'indiqué, avec les informations requises pour les débits. Le réservoir *A* contient initialement 25 kg de sel tandis que le réservoir *B* n'en contient pas (seulement de l'eau). On maintient le mélange uniforme par brassage. Résolvez cet exercice en trouvant la masse de sel dans chacun des réservoirs ($x_1(t)$ et $x_2(t)$) de 2 façons différentes :

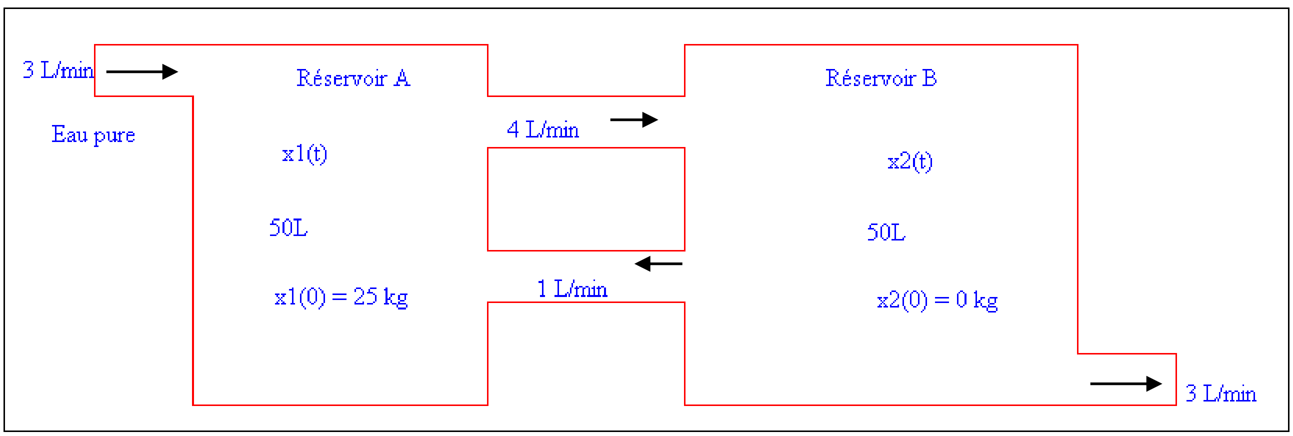


Figure pour le problème 3

a) Trouvez la solution exacte $(x_1(t),\ x_2(t))$ en utilisant la technique des transformées de Laplace.
b) Trouvez (encore) la solution exacte en utilisant les techniques de vecteurs propres
c) Esquissez les 3 graphiques suivants, chacun dans une fenêtre appropriée :

$$(t, x_1(t)),\ (t, x_2(t)) \text{ et } (x_1, x_2).$$

d) Comparez le graphique de (x_1, x_2) avec celui du plan de phase généré par une méthode numérique robuste.
e) Reprenez cet exercice en supposant que l'entrée au taux de 3L/min est une solution saline de concentration 0.1 kg/L plutôt que d'être de l'eau pure.

Problème 4 Une application des matrices symétriques : la classification de coniques. Trouvez la nature de la courbe conique (possiblement une paire de droites) en transformant la forme quadratique :

a) $-11x_1^2 + 84x_1 x_2 + 24x_2^2 = 156$ **b)** $41x_1^2 - 24x_1 x_2 + 34x_2^2 = 10$

c) $4x_1^2 + 12x_1 x_2 + 13x_2^2 = 16$ **d)** $3x_1^2 + 10x_1 x_2 + 12x_2^2 + 10x_1 + 10x_2 = 3$

(indice pour **d)** : effectuez un changement de variable pour éliminer les termes linéaires)

Vérifiez vos réponses en faisant tracer, sur l'ordinateur, les courbes implicites ci-haut.

Problème 5 Une application des matrices de rotation : générer un tore.

La matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en est une de rotation autour de l'axe des z, d'un angle de θ radians, sens anti-horaire. Utilisez cette matrice et le cercle, situé dans le plan $y = 0$, centré au point (2, 0, 0) et de rayon 1, afin de générer un tore. Les 2 paramètres de votre surface seront donc la paramètre du cercle et celui de la matrice de rotation ci-haut.

Problème 6 Systèmes linéaires mais non homogènes.

Utiliser un système symbolique pour trouver les solutions à chacun des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - t^2 + 6t & y_1(0) = 2 \\ y_2' = y_1 + y_2 - t^2 + t - 1 & y_2(0) = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 - 2e^{-t} \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$

c) $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

e) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 3t-1 \\ t^2 \\ 1 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

f) $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Problème 7 Exponentielle de matrice. En indiquant votre démarche, calculez $e^{\mathbf{A}t}$ pour chacune des matrices **A** suivantes et vérifiez ensuite votre réponse en utilisant une fonction appropriée d'un système symbolique. Pour certaines des matrices, tentez de trouver une formule close pour une puissance entière $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ -1/6 & -2 \end{bmatrix}$ **c)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **e)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **f)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ **h)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **i)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

j) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **k)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **l)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

m) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ **n)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **o)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Problème 8 Points critiques et stabilité de systèmes linéaires autonomes. Déterminez le type et la stabilité du point critique. Trouvez ensuite la solution générale (méthode au choix) et tracez quelques trajectoires dans le plan de phase.

a) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y_1' = -6y_1 - y_2 \\ y_2' = -9y_1 - 6y_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 5y_1 - y_2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -5y_1 - y_2 \end{cases}$

Problème 9 Soit **A** une matrice 2 × 2 constante inversible. Si le système $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ possède un point de selle en (0, 0), prouvez que le système $\mathbf{y}' = \mathbf{A}^2\mathbf{y}$ possède un noeud instable en (0, 0).

Problème 10 Points critiques et stabilité de systèmes ou É.D. non linéaires mais linéarisés.

Déterminez le type et la stabilité de chacun des points critiques en linéarisant le système ou le système correspondant à l'É.D.

a) $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 - y_1^3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y_1' = -4y_2 \\ y_2' = \sin(y_1) \end{cases}$

c) $y'' + y - \frac{1}{2}y^2 = 0$ **d)** $y'' - 9y + y^3 = 0$ **e)** $y'' + \cos y = 0$

Problème 11 Un système non linéaire, celui de Lotka-Volterra. Considérons le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(3-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(x-3) \end{cases}$$

a) Le système étant autonome, obtenez une É.D. en x et y et résolvez-la.

b) Trouvez les points critiques du système. Ce système est-il quasi linéaire? Si oui, trouvez les points critiques du système linéaire associé et étudiez la nature et la stabilité des points critiques du système original.

c) En utilisant une méthode numérique robuste, approximez les populations des proies $x(t)$ et des prédateurs $y(t)$ sur l'intervalle [0, 5] dans chacune des situations suivantes :

(i) $x(0) = 2, y(0) = 4$; **(ii)** $x(0) = 2, y(0) = 5$ et **(iii)** $x(0) = 2, y(0) = 7$.

Cela va permettre de voir ce qui se passe lorsque la population initiale des proies est fixée mais que celle des prédateurs augmente.

Problème 12 Un système non linéaire, celui de Lotka-Volterra. Considérons le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - \dfrac{1}{2}x\,y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + \dfrac{1}{4}x\,y \end{cases} \quad x(0) = 10,\ y(0) = 5$$

Tracez les graphiques de x et y en fonction du temps ainsi que le portrait de phase. Quelle semble être la nature du point critique (8, 2)?

Problème 13 Ressort non linéaire. Trouvez et classifiez les points critiques pour chacune des équations différentielles du deuxième ordre suivantes.

a) $x'' + 20x - 5x^3 = 0$
b) $x'' + 2x' + 20x - 5x^3 = 0$
c) $x'' + 4x - 5x^3 + x^5 = 0$

Problème 14 Bifurcations. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon\, x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \varepsilon\, y \end{cases}$$

Montrez que le point critique (0, 0) est une spirale stable si $\varepsilon < 0$, un centre si $\varepsilon = 0$ et une spirale instable de si $\varepsilon > 0$. Donc, de petites perturbations du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

peuvent changer à la fois le type et la stabilité du point critique. Illustrez cela avec les valeurs suivantes de ε : $-0.2, -0.05, 0, 0.05$ et 0.2 et tracez les trajectoires dans une fenêtre comme, par exemple, $-1 < x, y < 1$.

Problème 15 Bifurcations. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + \varepsilon y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

Montrez que le point critique (0, 0) est une spirale stable si $\varepsilon < 0$, un noeud stable si $0 \leq \varepsilon < 1$. Donc, de petites perturbations du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

peuvent changer le type du point critique (0, 0) sans en changer la stabilité.

Problème 16 Systèmes quasi linéaires. Pour chacun des systèmes quasi linéaires suivants, montrez que l'origine est un point critique et étudiez-en la stabilité.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 2y - 7x^2 y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x^2 y^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^3 y^2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases}$

Problème 17 Systèmes quasi linéaires. Pour chacun des systèmes quasi linéaires suivants, déterminez les points critiques, classifiez-les ou dites pourquoi on ne peut se commettre. Générez finalement un portrait de phase du système.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + x^3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y + y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$

Problème 18 Oscillations non linéaires.

Soit l'É.D.O gouvernant des oscillations non linéaires

$$y'' + \left(\frac{1-y^2}{10}\right) y' + y = 0,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = 0\,.$$

Utilisez une méthode numérique robuste pour montrer que, lorsque le temps augmente de 0 à 20, la solution $y(t)$ exhibe des oscillations qui s'amortissent lorsque $y_0 = 1$ et des oscillations qui prennent de l'expansion lorsque $y_0 = 3$.

Problème 19 Ressort non linéaire, équation de Duffing.

Il s'agit d'un modèle pour les vibrations d'une masse attachée à un ressort non linéaire :

$$y'' + {\omega_0}^2 y + r\,y^3 = 0, \quad y(0) = a,\; y'(0) = 0.$$

où r est un paramètre constant et où $\omega_0 > 0$. Pour ce modèle, on cherche à savoir si la période de vibration varie lorsque le paramètre r varie et si la période de vibration varie lorsque les conditions initiales varient.

(On sait que si $r = 0$, alors la solution est $y = a\cos(\omega_0 t)$ et donc la période de vibration est $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$, l'amplitude est a et la période de vibration est ainsi indépendante des conditions initiales.

En utilisant une méthode numérique robuste, approximez la solution pour les valeurs $r = 1$ et $r = 2$ ainsi que pour les valeurs $a = 1, 2$, et 3.

Problème 20 Pendule non linéaire avec force d'amortissement.

Considérons la force d'amortissement proportionnelle à la vitesse, donc, selon l'exemple 4.13, on peut écrire ($\theta = x$)

$$m\,L\,x'' = -m\,g\sin x - c\,x' \quad (c > 0).$$

Si, de plus, il y a présence de force extérieure, alors on aboutit à l'É.D.

$$m\,L\,x'' + c\,x' + m\,g\sin x = f(t).$$

L'exercice suivant montre qu'il y a toute une différence entre le pendule linéaire et celui non linéaire.

a) Trouvez la solution en régime permanent pour le problème

$$x'' + 0.2x' + x = A\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

et remarquez que l'amplitude de ce régime permanent est quintuplée si vous quintuplez A. Illustrez tout cela en prenant $A = 0.5$ et ensuite $A = 2.5$ et tracez le graphe de la solution $x(t)$ sur l'intervalle $0 < t < 80$ dans chacun des 2 cas.

Mais cela n’est pas le cas pour le problème non linéaire.   En effet :

b) Tracez le graphe de la solution $x(t)$ (obtenue de façon numérique) du problème

$$x'' + 0.2x' + \sin x = A\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

Prenez les valeurs $A = 0.5$ et ensuite $A = 2.5$, encore sur l’intervalle $0 < t < 80$. Remarquez la nature complètement différente lorsque A passe de 0.5 à 2.5 ici.

Problème 21 Linéaire versus non linéaire.

A) Considérons le problème $x'' + c\,x' + \omega^2 x = f(t), \quad x(0) = x_0,\, x'(0) = v_0$ où c est une constante et où $\omega \neq 0$. On sait que la solution du problème peut s’écrire sous la forme $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où x_h est la solution de l’équation complémentaire $\left(x'' + c\,x' + \omega^2 x = 0\right)$ et où x_p est une solution particulière dépendant de f. Utilisez vos connaissances afin de démontrer les résultats suivants :

a) Si $c > 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} x_h(t) = 0$. Donc, la solution complémentaire peut être vue comme le terme transitoire.

b) Si f est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus et de période T, alors la solution particulière, appelée solution en régime permanent ou « steady state » et dénotée $x_{ss}(t)$, est aussi périodique de période T. L’amplitude de $x_{ss}(t)$ dépend de c, ω^2 et f mais ne dépend pas des conditions initiales.

c) La solution complémentaire x_h dépend des conditions initiales, de c et de ω^2.

B) Considérons maintenant le problème non linéaire suivant :

$$x'' + 0.2x' + \sin x = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Pour chacune des conditions initiales suivantes :

$$\begin{gathered} x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.1, \\ x(0) = 0.1, \quad x'(0) = 0.1, \end{gathered}$$

tracez le graphique de la solution $x(t)$ sur l’intervalle $0 < t < 280$. Remarquez la valeur de l’amplitude lorsque $x(t)$ tend vers $x_{ss}(t)$ et trouvez le temps requis pour que $x_{ss}(t)$ soit atteint. Cela devrait être très différent du problème $x'' + 0.2x' + x = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.