

Résumé 3

Analyse de Fourier : séries de Fourier, applications aux É.D.O et aux É.D.P.

Voici les différentes sections de ce résumé.

- 1- Motivation (É.D.O., É.D.P.). Équation des ondes et de la chaleur
- 2- Séries de Fourier : définitions et résultats préliminaires
- 3- Convergence par points, convergence en moyenne quadratique
- 4- Intégration et différentiation des séries de Fourier
Liste d'exercices pour le résumé 3

1- Motivation (É.D.O., É.D.P.). Équation des ondes et de la chaleur.

Les 4 exemples suivants peuvent servir de motivation à la nécessité d'introduire les séries de Fourier. Le premier exemple concerne un circuit RL (voir le problème 1.32 de la liste d'exercices #1) où, à force de modifier la source, on en vient à la conclusion que la méthode des transformées de Laplace n'est plus très commode. Le second exemple se situe dans le même ordre d'idées que l'exemple 1.18.1 du résumé 1. Le troisième exemple permettra d'introduire immédiatement la méthode de séparation des variables. Le quatrième exemple est plus «historique» puisque Joseph Fourier, en étudiant l'équation de la chaleur dans une tige de métal, avait conclu que toute fonction, définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ peut être représentée, sur cet intervalle, par une série trigonométrique du type

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \dots!$$

1.1 Exemple Soit l'É.D. (en fait, celle d'un circuit RL) $L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$, $i(0) = 0$, où $E(t)$ est la source. On peut résoudre facilement cette É.D. en utilisant la formule pour les É.D. linéaires du premier ordre et dire que la constante d'intégration s'obtient en utilisant la condition initiale. En effet, un facteur intégrant est $u(t) = e^{Rt/L}$. Il est plus intéressant de remarquer que,

$$\frac{d}{dt}(u(t)i(t)) = u(t) \frac{1}{L} E(t), \quad i(0) = 0, \quad \text{et donc, } u(t)i(t) - u(0)i(0) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) E(\tau) d\tau, \quad \text{et, puisque}$$

$i(0) = 0$, on a

$$i(t) = \frac{1}{u(t)L} \int_0^t u(\tau) E(\tau) d\tau = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int_0^t e^{R\tau/L} E(\tau) d\tau .$$

En entrant l'exponentielle dans l'intégrale, un produit de convolution (dénnoté par $*$) apparaît :

$$i(t) = \int_0^t e^{-Rt/L} e^{R\tau/L} \frac{E(\tau)}{L} d\tau = \int_0^t \frac{E(\tau)}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} d\tau = \frac{E(t)}{L} * e^{-Rt/L}$$

Ce n'est pas surprenant lorsqu'on applique la méthode des transformées de Laplace : en effet, on sait que dans ce cas-ci la sortie est la convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle.

Pour la suite de cet exemple, prenons des valeurs comme $R = 5\Omega$ et $L = 1H$.

1.1.1 Si la source est $E(t) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$,

alors on trouve, par utilisation de la transformée de Laplace, que

$$i(t) = \begin{cases} 5(1 - e^{-5t}) & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 5(e^{-5(t-2)} - e^{-5t}) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

qui est une fonction continue telle que $i(2) = 5(e^{-10} - 1) - e^{-10} \approx 4.99977$:

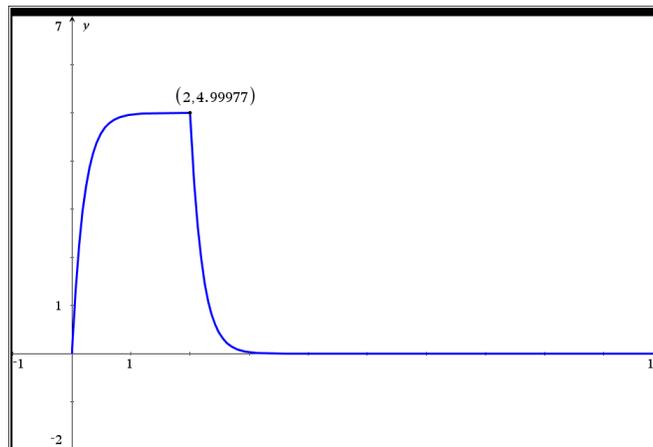


Figure 1.1

1.1.2 Si la source est $E(t) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t < 4 \\ 25 & \text{si } 4 < t < 6 \\ 0 & \text{si } t > 6 \end{cases}$,

alors on trouve

$$i(t) = \begin{cases} 5(1 - e^{-5t}) & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 5(e^{-5(t-2)} - e^{-5t}) & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ 5(1 - e^{-5t} + e^{-5(t-2)} - e^{-5(t-4)}) & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ 5(e^{-5(t-6)} - e^{-5(t-4)} + e^{-5(t-2)} - e^{-5t}) & \text{si } t \geq 6 \end{cases}$$

dont le graphe est

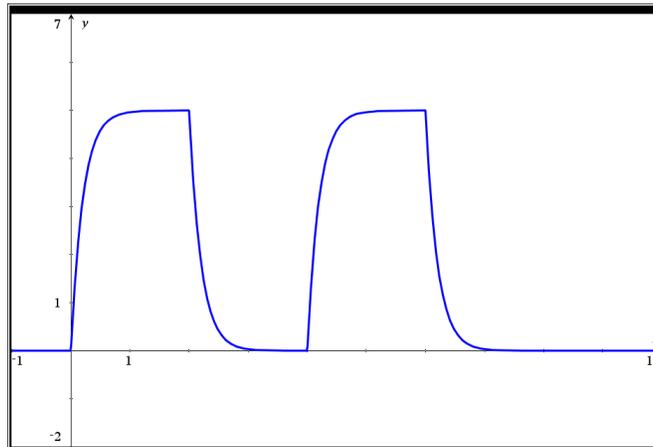


Figure 1.2

1.1.3 Si la source est $E(t) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t < 4 \end{cases}$ $E(t+4) = E(t)$

(donc source périodique, de période 4), alors on peut utiliser la propriété des transformées de Laplace des fonction périodiques : si f est périodique de période P , alors sa transformée de Laplace $F(s)$ est donnée par

$$\frac{\int_0^P f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sP}}.$$

En appliquant cette propriété, on trouve, si $I(s) \leftrightarrow i(t)$ et si l'on se sert de la série géométrique,

$$I(s) = \left(\frac{5}{s} - \frac{5}{s+5} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{-2s}} \right) = \left(\frac{5}{s} - \frac{5}{s+5} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2ns} \right).$$

Et donc

$$i(t) = 5 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - e^{-5(t-2n)}) u(t-2n)$$

dont le graphe est :

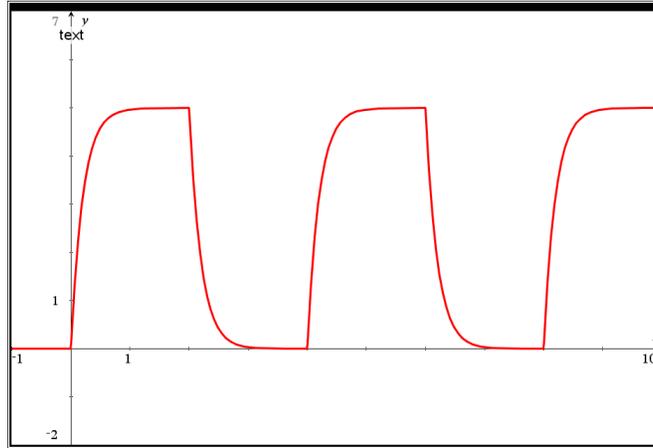


Figure 1.3

Cette fonction n'est pas périodique mais « l'est éventuellement ». En effet, l'É.D. est

$$\frac{di}{dt} + 5i = E(t), \quad i(0) = 0$$

où $E(t)$ est périodique. La solution générale est $i(t) = ce^{-5t} + i_p(t)$ où $i_p(t)$ est une solution particulière qui sera périodique (de même période que la source) et nous verrons plus loin que

$$i_p(t) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \quad (*)$$

où les coefficients sont donnés par

$$A_n = \frac{50((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2 + 100}, \quad B_n = \frac{-500((-1)^n - 1)}{n\pi(n^2\pi^2 + 100)} \quad (**)$$

Donc, on doit avoir, en utilisant la condition initiale, $0 = c + \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Il n'est pas facile de

trouver la somme des A_n . Mais on peut montrer (e.g. à l'aide des variables complexes) que c'est $-\frac{5}{2} + \frac{5}{e^{10} + 1}$. Ainsi,

$$i(t) = -\frac{5e^{-5t}}{e^{10} + 1} + i_p(t)$$

où $i_p(t)$ est donné par (*) avec A_n et B_n donnés par (**). Un graphe de la source et de $i(t)$ en tronquant $i_p(t)$ à l'ordre $n = 100$ est donné ici (ces deux fonctions ont été placées sur un même graphe bien que les unités respectives ne sont pas les mêmes : la source est en V tandis que le courant $i(t)$ est en A).

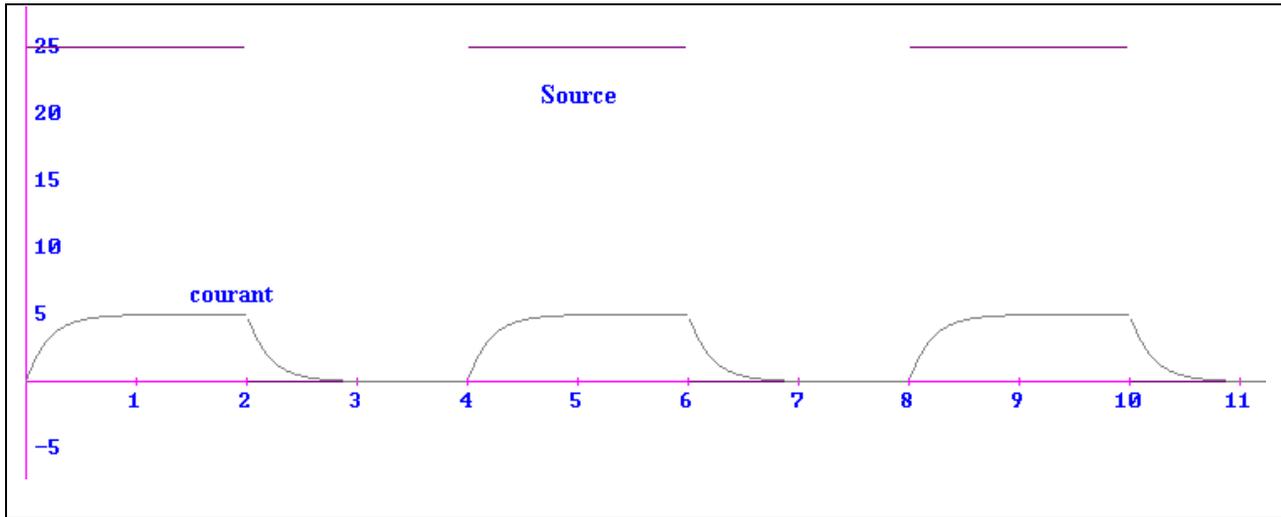


Figure 1.4

1.2 Exemple Si $E(t) = A_0 + A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$, alors on trouve facilement la solution suivante :

$$i(t) = c e^{-5t} + (a_0 + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

où $a_0 = \frac{A_0}{5}$, $a_n = \frac{5A_n - n\omega B_n}{n^2\omega^2 + 25}$, $b_n = \frac{5B_n n\omega A_n}{n^2\omega^2 + 25}$ et $c = -a_0 - a_n$.

1.3 Exemple Si $E(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$ où N est un quelconque entier positif, alors le principe de superposition et le résultat 1.2 précédent donnent la solution

$$i(t) = c e^{-5t} + a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

où $a_0 = \frac{A_0}{5}$, $a_n = \frac{5A_n - n\omega B_n}{n^2\omega^2 + 25}$, $b_n = \frac{5B_n n\omega A_n}{n^2\omega^2 + 25}$ et $c = -a_0 - \sum_{n=1}^N a_n$.

1.4 Exemple Si $E(t)$ est une quelconque fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et si l'on peut

représenter $E(t)$ par la série trigonométrique $E(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$, alors,

en théorie, sans se soucier pour l'instant de la convergence, on devrait trouver la solution suivante :

$$i(t) = ce^{-5t} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

où $a_0 = \frac{A_0}{5}$, $a_n = \frac{5A_n - n\omega B_n}{n^2\omega^2 + 25}$, $b_n = \frac{5B_n n\omega A_n}{n^2\omega^2 + 25}$ et $c = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1.5 Exemple Lorsqu'on cherche l'amplitude de la solution en régime permanent dans le cas du mouvement harmonique sous-amorti forcé avec force sinusoidale

$$m y'' + b y' + k y = F_0 \sin(\omega t) \quad (b^2 < 2mk),$$

on trouve facilement la solution particulière $y_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t - \varphi)$ où

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \text{ et cette amplitude est maximale en } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}. \text{ Mais}$$

alors, par le principe de superposition, la solution y_{ss} en régime permanent du problème

$$m y'' + b y' + k y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t)$$

sera $y_{ss} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \sin(\omega_n t - \varphi_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n)^2 + (b\omega_n)^2}}$ (dans la mesure où cette série converge et peut être dérivée terme à terme).

1.6 Exemple Équation aux dérivées partielles de la corde vibrante ou équation des ondes en une dimension. Soit une corde de longueur L homogène (la densité ρ , i.e. la masse par unité de longueur, est supposée constante), qui n'offre pas de résistance lorsqu'on l'étire (donc la tension est tangentielle à la courbe de la corde en chaque point). On attache les extrémités de la corde et la tension causée par l'étirement de la corde est très grande, ce qui permet de négliger la force gravitationnelle qui agit sur la corde. La corde va vibrer de façon verticale, donc la déflexion

(i.e. le changement de direction) de la pente en chaque point de la corde reste petite en valeur absolue. Lorsqu'on considère les forces qui agissent sur une petite portion de la corde, on procède comme ceci : on va poser $u(x, t)$ la position de la corde au point x et à l'instant t et étudier les forces pour une petite portion de la corde entre 2 points P et Q , d'abscisses x et $x + \Delta x$ respectivement. Les tensions en ces 2 points seront T_1 et T_2 respectivement.

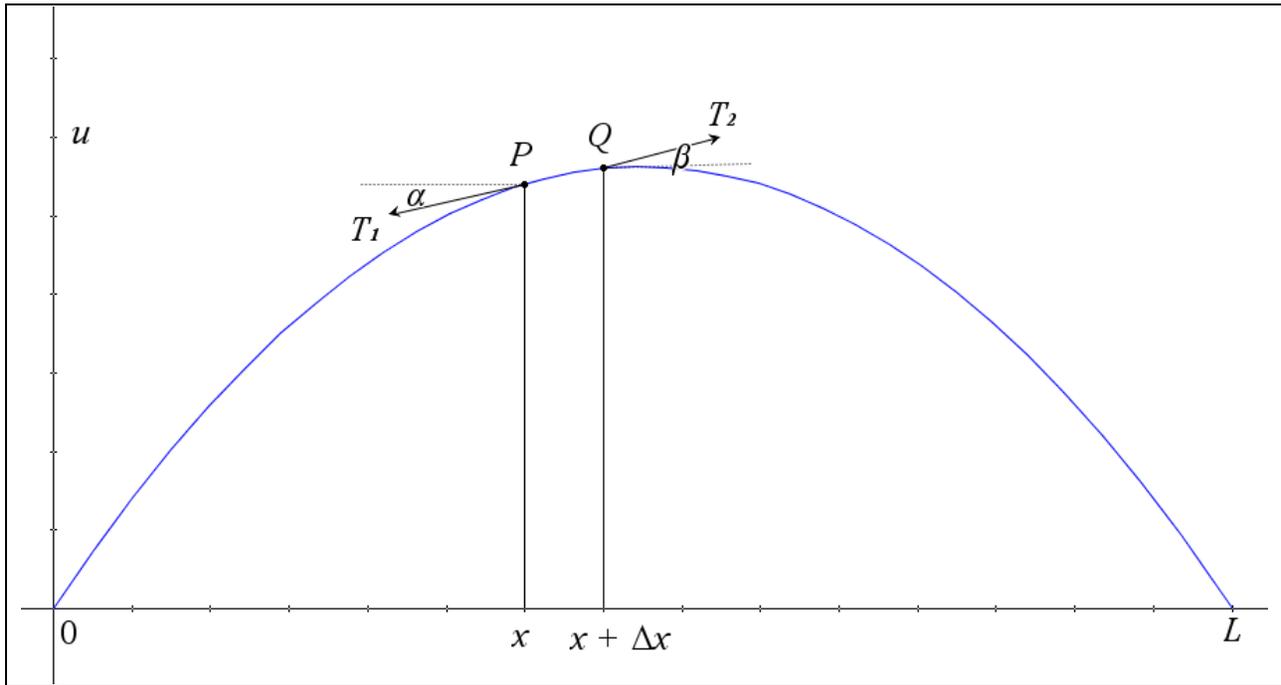


Figure 1.5

$$T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta) = T = \text{constante} \quad (\text{pas de mouvement horizontal})$$

$$T_2 \sin(\beta) - T_1 \sin(\alpha) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{deuxième loi de Newton})$$

Mais alors, on obtient $\frac{T_2 \sin(\beta)}{T_2 \cos(\beta)} - \frac{T_1 \sin(\alpha)}{T_1 \cos(\alpha)} = \tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Mais, puisque $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ sont les pentes des tangentes à la corde en x et $x + \Delta x$ respectivement, on a

$$\tan(\alpha) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \quad \text{et} \quad \tan(\beta) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

et alors $\frac{1}{\Delta x} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right) = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. En laissant tendre Δx vers 0, on obtient alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(c^2 = \frac{T}{\rho} \right)$$

(É.D.P. des cordes vibrantes)

Prenons ici les données particulières suivantes : $c = 1$, $L = 1$. Essayons de résoudre le problème consistant en l'É.D.P.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et les conditions suivantes :

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (\text{conditions aux frontières})$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (\text{conditions initiales})$$

où, par exemple, f serait donnée par le graphe suivant :

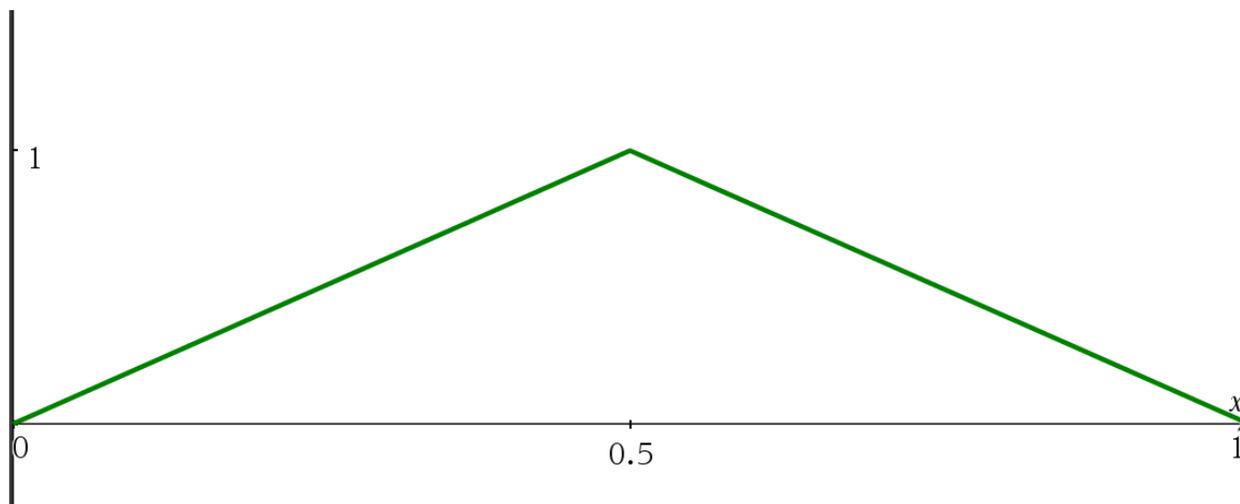


Figure 1.6

Essayons de résoudre l'É.D.P. par la méthode de séparation des variables, donc essayons une solution $u(x, t)$ qui serait à variables séparables, disons $u(x, t) = g(x)h(t)$. Alors on doit avoir

$$g(x)h''(t) = g''(x)h(t)$$

donc, $\begin{vmatrix} g(x) & h(t) \\ g''(x) & h''(t) \end{vmatrix} = 0$, d'où $\frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{h''(t)}{h(t)} = \lambda$ où λ est une constante. Traitons les 3 cas pour

λ . Si $\lambda = 0$, alors $g(x) = ax + b$, $h(t) = ct + d$ et les conditions aux frontières font en sorte que $u(0, t) = g(0)h(t) = b h(t) = 0$, ce qui implique que $b = 0$ d'où $u(x, t) = axh(t)$ et donc $0 = u(L, t) = aLh(t)$, ce qui force a à valoir 0, ce qui est à rejeter puisque la condition initiale f n'est pas identiquement nulle (sinon, la corde ne bouge tout simplement pas). Si $\lambda > 0$, alors

$$u(x, t) = g(x)h(t) = (c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}})(c_3 e^{t\sqrt{\lambda}} + c_4 e^{-t\sqrt{\lambda}})$$

et les conditions aux frontières impliquent que

$$0 = (c_1 + c_2)h(t) = (c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}})h(t)$$

Et puisque la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}$ est inversible, alors $c_1 = c_2 = 0$, ce qui mène encore à la solution triviale ! Reste donc le cas $\lambda < 0$ à considérer. Si $\lambda < 0$, on a donc

$$u(x, t) = g(x)h(t) = (c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})) (c_3 \cos(t\sqrt{-\lambda}) + c_4 \sin(t\sqrt{-\lambda})) .$$

On doit avoir $0 = u(0, t) = c_1 h(t) \Rightarrow c_1 = 0$. Donc, on est rendu à

$$u(x, t) = c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}) (c_3 \cos(t\sqrt{-\lambda}) + c_4 \sin(t\sqrt{-\lambda})) .$$

On doit avoir $0 = u(1, t) = (c_2 \sin(\sqrt{-\lambda})) h(t) \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$. On est donc rendu à

$$u(x, t) = \sin(n\pi x) (\alpha \cos(n\pi t) + \beta \sin(n\pi t))$$

où l'on a posé $\alpha = c_2 c_3, \beta = c_2 c_4$. Si nous faisons un bilan, on peut dire que la famille de fonctions $u(x, t) = \sin(n\pi x) (\alpha \cos(n\pi t) + \beta \sin(n\pi t))$ satisfait l'É.D.P. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et les conditions aux frontières $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Le problème est qu'il sera difficile de satisfaire la condition initiale ! En effet, il faudrait que $u(x, 0) = \sin(n\pi x) \alpha = f(x)$, ce qui n'a pas de sens si f n'est pas un sinus (le graphe de f donné tantôt n'a pas l'air d'un sinus !). Mais, puisque l'É.D.P. est linéaire, une combinaison linéaire de fonctions du type

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \sin(n\pi x) (\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t))$$

où N est un entier positif, satisfait également l'É.D.P et les conditions aux frontières. Pour satisfaire la condition initiale, il faudrait donc que $u(x, 0) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin(n\pi x) = f(x)$, ce qui est encore peu probable car f n'est pas une somme finie de sinus ! Alors, se peut-il, en faisant une somme infinie, que la fonction f triangulaire précédente soit telle que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) = f(x) ?$$

Et comment calcule-t-on les coefficients α_n ?

1.7 Exemple Équation aux dérivées partielles de la chaleur. Soit W un solide borné de frontière S , soit $U(x, y, z, t)$ la température au point (x, y, z) de W , à l'instant t (donc un champ scalaire). Soit σ une constante donnant la chaleur spécifique du matériel constituant W et soit ρ la densité (masse par unité de volume) du matériel.

Puisque la direction opposée au gradient est celle de la décroissance maximale, on a, si \mathbf{v} représente le vecteur-vitesse du flux de chaleur dans W ,

$$\mathbf{v} = -K \nabla U$$

où $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$ désigne le gradient de U et où K est une constante appelée la conductivité thermique du corps W . La quantité de chaleur qui quitte W par unité de temps, dans la direction de la normale \mathbf{n} à la surface S est donnée par l'intégrale de surface

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

dont la valeur peut être calculée en utilisant le théorème de la divergence :

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -K \nabla U \cdot \mathbf{n} \, dS = -K \iiint_W \operatorname{div}(\nabla U) \, dV = -K \iiint_W \nabla^2 U \, dV \quad (*)$$

où ∇^2 est le laplacien de U : $\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Mais, on peut aussi dire que la quantité totale de chaleur H dans le corps W est donnée par

$$H = \iiint_W \sigma \rho U(x, y, z, t) \, dV .$$

Par conséquent, le taux de variation de la chaleur H en fonction du temps est aussi donné par

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_W \sigma \rho U \, dV \right) = -\iiint_W \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dV \quad (**)$$

Puisque (*) = (**), on doit avoir $\iiint_W \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) dV = 0$ et puisque cela est vrai pour

tout solide W , on doit avoir

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U \quad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} \right)$$

(É.D.P. de la chaleur)

En particulier, si l'on considère une tige de longueur L et que $u(x, t)$ représente la température au point x de la tige ($0 < x < L$) à l'instant t , alors on peut vouloir résoudre le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ (extrémités maintenues à } 0^\circ)$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ (température initiale dans la tige)}$$

La méthode de l'exemple 1.6 pourra aussi être appliquée.

2- Séries de Fourier : définitions et résultats préliminaires

Afin d'alléger certaines démonstrations de théorèmes, nous donnons des résultats préliminaires dans les théorèmes qui suivent.

2.1 Théorème Orthogonalité du système trigonométrique. Soient des entiers non négatifs k, n . Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots; k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \begin{cases} \pi & (n = 1, 2, \dots) \\ 2\pi & (n = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots; k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx = 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Preuve : facile en utilisant les identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2} \\ \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2} \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

2.2 Théorème Si t n'est pas un multiple de 2π , on a

$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(nt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} dt = 1$$

Preuve : il est clair que le second résultat découle directement du premier. Prouvons donc le premier. On sait que $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin(a) \cos(b)$, donc, avec $a = t/2$ et $b = kt$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), cela donne

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2} + t\right) + \sin\left(\frac{t}{2} - t\right) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(t) \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{3t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(t) \\ \sin\left(\frac{t}{2} + 2t\right) + \sin\left(\frac{t}{2} - 2t\right) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(2t) \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{5t}{2}\right) - \sin\left(\frac{3t}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(2t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \sin\left(\frac{t}{2} + nt\right) + \sin\left(\frac{t}{2} - nt\right) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(nt) \quad \text{ou} \\ \sin((n+1/2)t) - \sin((n-1/2)t) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(nt)\end{aligned}$$

et on somme membre à membre les dernières égalités pour obtenir

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin((n+1/2)t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) (1 + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(nt))$$

d'où $\sin((n+1/2)t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(nt)\right)$, ce qui est le résultat cherché. \blacklozenge

2.3 Théorème Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ telle qu'il est possible de la représenter par la série suivante :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Alors, si l'intégration terme à terme des séries est permise, on a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n \geq 1) .$$

Plus généralement, si f une fonction définie sur un intervalle de longueur 2π et prolongée en dehors de cet intervalle par périodicité, alors les formules deviennent simplement

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n \geq 1)$$

où c est convenablement choisi.

Preuve : intégrons l'égalité $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx = \\ &= a_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right) = a_0 \pi \end{aligned}$$

d'où le résultat pour a_0 .

Si k est un entier positif, alors en multipliant de chaque côté par $\cos(kx)$, on a

$$f(x) \cos(kx) = \frac{a_0 \cos(kx)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx))$$

et l'intégration donne, en utilisant le théorème 2.1, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = a_k \pi$, d'où le résultat

pour a_k . Finalement, en multipliant plutôt de chaque côté par $\sin(kx)$, on a

$$f(x) \sin(kx) = \frac{a_0 \sin(kx)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx))$$

et l'intégration et l'utilisation des résultats précédents donnent $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = b_k \pi$, d'où le

résultat pour b_k . Finalement, lorsqu'une fonction g est périodique de période P et si c est réel, montrons qu'on a (bien que cela soit clair géométriquement)

$$\int_{-P/2}^{P/2} g(x) dx = \int_c^{c+P} g(x) dx.$$

Posons $x = y - P$. Alors, on a $\int_{-P/2}^c g(x) dx = \int_{P/2}^{c+P} g(y - P) dy = \int_{P/2}^{c+P} g(y) dy = \int_{P/2}^{c+P} g(x) dx$,

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_c^{c+P} g(x) dx &= \int_c^{-P/2} g(x) dx + \int_{-P/2}^{P/2} g(x) dx + \int_{P/2}^{c+P} g(x) dx = \\ &= \int_c^{-P/2} g(x) dx + \int_{-P/2}^{P/2} g(x) dx + \int_{-P/2}^c g(x) dx = \int_{-P/2}^{P/2} g(x) dx. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

2.4 Définition Soit f une fonction définie initialement sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et 2π -périodique. Alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

avec les coefficients calculés par

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n \geq 1)$$

est dite série de Fourier de f . Pour indiquer cela, sans présumer de la convergence, on écrit souvent

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

2.5 Remarque La raison pour laquelle on a écrit $\frac{a_0}{2}$ plutôt que a_0 en est une de symétrie. Et

$\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

2.6 Théorème Fonctions périodiques de période quelconque, différentes notations dont la notation complexe. Soit $L > 0$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de longueur $2L$ et périodique de période $P = 2L$ en dehors de l'intervalle. Alors la série de Fourier de f est l'expression

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

où

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c-L}^{c+L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (n \geq 0) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{c-L}^{c+L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (n \geq 1)$$

Puisque $P = 2L$, on peut aussi écrire

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right) \right)$$

où

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{c-P/2}^{c+P/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{P}\right) dt \quad (n \geq 0) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{P} \int_{c-P/2}^{c+P/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{P}\right) dt \quad (n \geq 1).$$

Si l'on pose $\omega = \frac{2\pi}{P}$, alors on peut aussi écrire que

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad \omega = \frac{2\pi}{P}$$

où

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{c-P/2}^{c+P/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \geq 0) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{P} \int_{c-P/2}^{c+P/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \geq 1)$$

Sous forme complexe, on a dénotant par i l'unité imaginaire,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{P} \int_P f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

la notation « \int_P » indiquant que l'intégrale se fait toujours sur la période.

Preuve : posons $t = \frac{\pi x}{L}$ et $f(x) = g(t)$. Alors

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi} + 2L\right) = f(x + 2L) = f(x) = g(t)$$

et toutes les formules sont immédiates. Pour ce qui concerne la forme complexe des séries de Fourier, rappelons que si θ est réel, la formule d'Euler implique que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

et alors on a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right) \right).$$

Si $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ($n \geq 1$), si l'on dénote par c_{-n} le conjugué $\bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$, si $c_0 = \frac{a_0}{2}$, le résultat suit. ♦

2.7 Exemple Soit $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$, $P = 2\pi$. Trouvons et traçons la somme partielle de Fourier réelle d'ordre $n = 5$. On peut passer par la forme complexe car cela facilite le calcul des coefficients. On a alors

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt = \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{(n^2 + 1)\pi} + \frac{n(-1)^n \sinh(\pi)}{(n^2 + 1)\pi} i \quad (n \in \mathbb{Z})$$

où nous avons utilisé le fait que $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$. On peut aussi, si l'on dispose d'un calculateur symbolique portable, utiliser la forme réelle. On trouve rapidement

$$a_0 = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi}, \quad a_n = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi)}{(n^2 + 1)\pi} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh(\pi)}{(n^2 + 1)\pi}$$

Mais alors on peut tracer le graphe de la « somme partielle d'ordre 5 » :

$$\sum_{n=-5}^5 c_n e^{-inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^5 (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Somme partielle à laquelle il est intéressant de superposer l'extension périodique de f . Pour ce faire, la remarque suivante nous donne un truc.

2.8 Remarque Si votre système symbolique possède une fonction MOD (modulo), il est facile de faire tracer sur toute la droite l'extension périodique d'une fonction g , initialement définie sur un intervalle $[a, b]$ et de période $P = b - a$ en dehors de l'intervalle. En effet,

$$g(\text{MOD}(x - a, b - a) + a)$$

fera l'affaire. Nous avons utilisé ce truc à la figure 2.1.

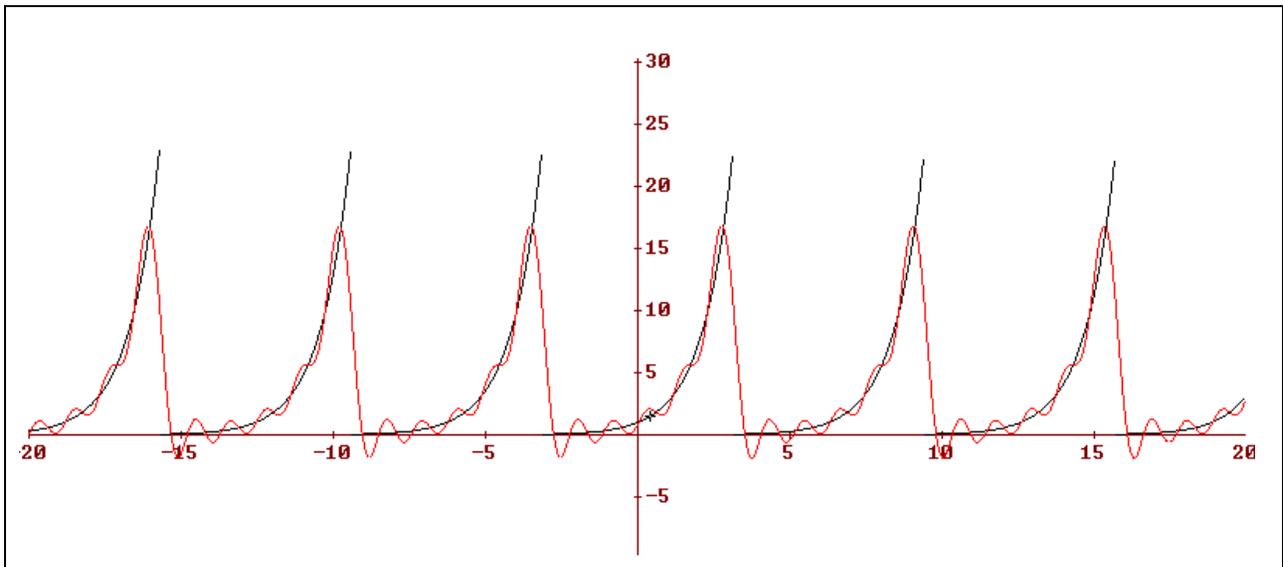


Figure 2,1

2.9 Théorème Fonctions paires, impaires, prolongement périodique. Soit $L > 0$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-L, L[$ et périodique de période $2L$. Alors

a) si f est paire (i.e. si $f(x) = f(-x) \forall x$), on a une série de Fourier cosinus :

$$b_n = 0 \quad (n \geq 1) \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (n \geq 0). \quad \text{Ainsi} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

(Si f est définie initialement sur l'intervalle $]0, L[$ et prolongée de façon paire, on a aussi le même résultat).

b) si f est impaire (i.e. si $f(x) = -f(-x) \forall x$), on a une série de Fourier sinus :

$$a_n = 0 \ (n \geq 0) \text{ et } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \ (n \geq 1). \quad \text{Ainsi } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

(Si f est définie initialement sur l'intervalle $]0, L[$ et prolongée de façon impaire, on a aussi le même résultat).

Preuve : élémentaire. ♦

2.10 Définition Soit f une fonction périodique de période $P = 2L$ dont on a trouvé la série de Fourier :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

La suite de fonctions s_n définie par

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \ (n \geq 1),$$

est dite suite des sommes partielles de Fourier d'ordre n de f (c'est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$). Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \ (x \text{ fixé}),$$

on dit que la série de Fourier de f converge par point vers f . Cela signifie donc que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un N entier positif tel que

$$n \geq N \Rightarrow |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On devra peut-être changer de N si l'on change de point x . Mais si, pour tout x , on peut trouver un tel N , alors on parle de convergence uniforme de la série de Fourier.

2.11 Lemme Si x n'est pas un multiple de π , on a
$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)}$$

Preuve : on peut démontrer cette égalité avec un truc semblable à celui du théorème 2.2 ou encore en calculant, via la série géométrique, la somme de

$$\sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x} = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^{2k-1}$$

Et en prenant ensuite la partie réelle, Mais allons-y par récurrence. Si $n = 1$, c'est vrai puisque

$$\sum_{k=1}^1 \cos(2k-1)x = \cos(x) = \frac{1}{2} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}.$$

Supposons que c'est vrai pour n . Alors, comme $2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)x &= \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} + \cos(2((n+1)-1)x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} + \cos((2n+1)x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} + \frac{2 \cos((2n+1)x) \sin(x)}{2 \sin(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} + \frac{\sin((2n+2)x) - \sin(2nx)}{2 \sin(x)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$

et la preuve est terminée, ♦

2.12 Exemple L'onde carrée et le phénomène de Gibbs. Soit la fonction impaire de période 2π , définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \quad P = 2\pi$$

Alors $a_n = 0$ ($n \geq 0$) et $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin(nt) dt = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$ ($n \geq 1$) et ainsi

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right).$$

Remarquons que la dernière série converge vers 0 en chaque multiple de π et que 0 est la valeur moyenne de f en ces points. Un graphe de

$$S_n(x) \equiv s_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

indique (preuve formelle à venir) que, pour $0 < x < \pi$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1$, mais que les « overshoot » ne semblent pas disparaître. Il semble que, au point x juste avant π ou juste après 0 où l'on dénote un maximum local, on ait environ la valeur 1.18. Nous allons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1.17898.$$

En effet, on a, si $0 < x < \pi$ et par le lemme 2.11,

$$\frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x) = \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2n}, k=1,2,\dots,n$$

En particulier, le premier de ces points est celui situé immédiatement après 0, à savoir $x = \frac{\pi}{2n}$.

On peut appliquer le test de la dérivée seconde pour se convaincre que le point critique $\pi/(2n)$ est effectivement un maximum :

$$\frac{d^2}{dx^2} S_n(x) = \frac{n \cos(2nx)}{\sin(x)} - \frac{\cos(x) \sin(2nx)}{2 \sin^2(x)}$$

En substituant x par $\frac{\pi}{2n}$, cela donne $-\frac{n}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} < 0$.

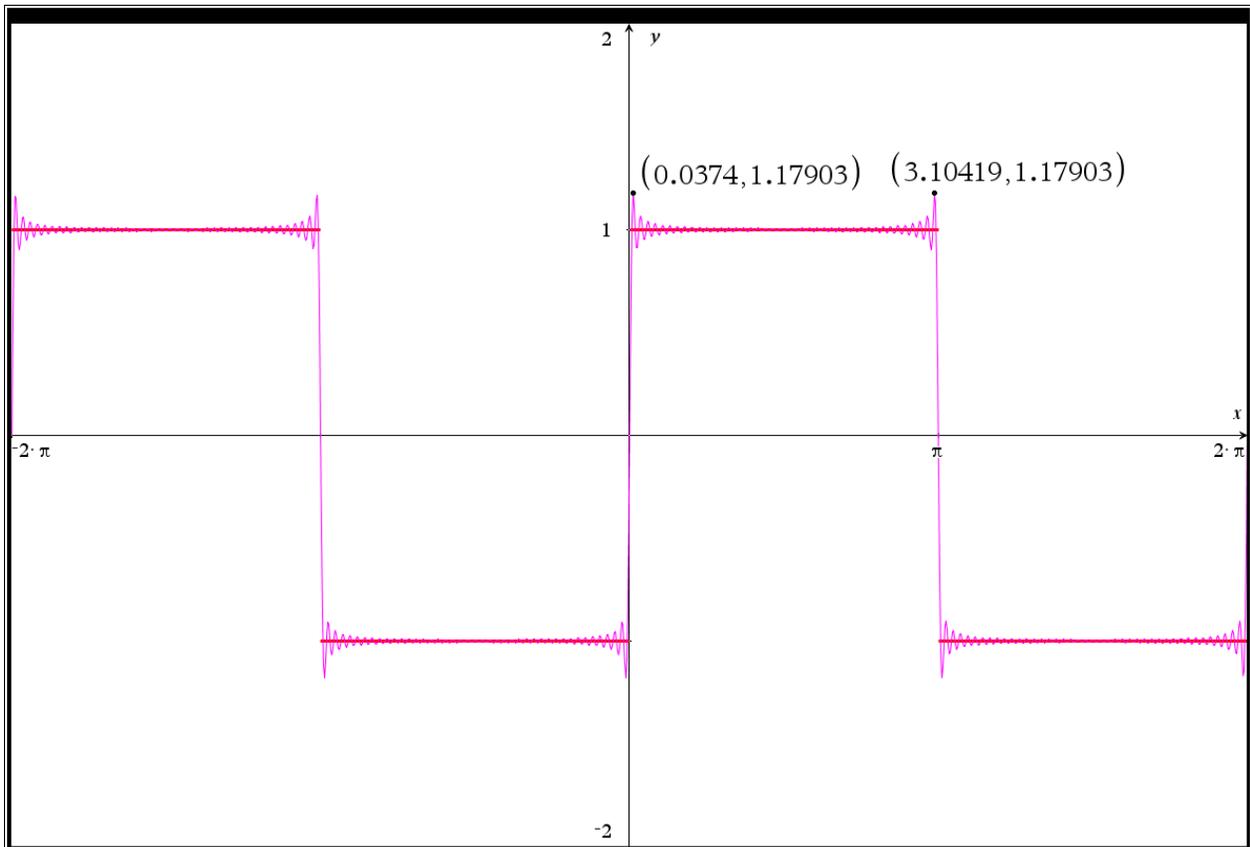


Figure 2.2

Mais alors

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \int_0^{\pi/(2n)} S'_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/(2n)} \left(\frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)}\right) \sin(2nt) dt + \int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin(2nt)}{t} dt \right]$$

Dénotons les 2 intégrales dans le dernier crochet par I et J respectivement. Pour I , l'expression à intégrer est majorée par une constante indépendante de n , disons M et alors

$$|I| \leq \int_0^{\pi/(2n)} M dt = \frac{M\pi}{2n} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Pour J , soit le changement de variable $y = 2n t$, alors $dy = 2n dt$ et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} J = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx \frac{2}{\pi} \cdot 1.85 \approx 1.17898.$$

Autre preuve possible : on avait $S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)\pi/(2n))}{2k-1}$. Or cette dernière somme

n'est rien d'autre que la somme de Riemann de la fonction $\frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)}{x}$ par la méthode du point milieu : en effet,

Figure 2.3

et on sait que lorsque n tend vers l'infini, cette somme tend vers $\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi)$.

3- Convergence par points, convergence en moyenne quadratique

Rappelons que les définitions de « continue par morceaux » et « dérivable par morceaux » ont été données dans le résumé 1.

3.1 Définitions Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ (fonction à valeurs complexes possiblement) sera dite absolument sommable sur $[a, b]$ si

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

Nous noterons par $L^1[a,b]$ la classe des fonctions absolument sommables sur $[a, b]$ (en fait, c'est un espace vectoriel normé complet quand l'intégrale est entendue au sens de Lebesgue et que la norme choisie est l'intégrale ci-haut).

Évidemment, toute fonction bornée sur $[a, b]$ satisfait cela. Nous dirons que f est de carré sommable sur $[a, b]$ si

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

et la classe de telles fonctions sera dénotée par $L^2[a,b]$. Si f et g sont 2 éléments de $L^2[a,b]$, alors, puisqu'il est évident que $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$, on est assuré que la fonction $f(x)g(x) \in L^1[a,b]$, ce qui permet de définir un produit scalaire dans $L^2[a,b]$ par

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On a alors la fameuse inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)$$

En effet, si λ est réel, on a que

$$\int_a^b (|f(x)| + \lambda |g(x)|)^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2\lambda \int_a^b |f(x)g(x)| dx + \lambda^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx \geq 0.$$

Posons $A = \int_a^b |f(x)|^2 dx$, $B = \int_a^b |f(x)g(x)| dx$ et $C = \int_a^b |g(x)|^2 dx$. On vient de voir que

$A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0 \quad \forall \lambda$ et la conclusion suit le signe du discriminant.

L'espace $L^2[a, b]$ muni du produit scalaire est un exemple d'espace de Hilbert ; la norme est alors dénotée par $\| \cdot \|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Et puisque l'intervalle $[a, b]$ est de longueur finie, on a $L^2[a, b] \subset L^1[a, b]$ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

3.2 Définition Un polynôme trigonométrique d'ordre n est une expression de la forme

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx))$$

où les nombres $A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ sont des constantes réelles. Un exemple de polynôme trigonométrique est évidemment la somme partielle de Fourier d'ordre n d'une fonction périodique.

3.3 Théorème Soit $f \in L^2[-\pi, \pi]$ une fonction 2π -périodique dont la série de Fourier est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Soit $T_n(x)$ un quelconque polynôme trigonométrique d'ordre n et soit $s_n(x)$ la somme partielle de Fourier de f . Alors :

a) $\|f - T_n\|_2 \geq \|f - s_n\|_2$. Autrement dit, on minimise l'écart quadratique moyen en choisissant précisément comme polynôme trigonométrique la somme partielle de Fourier !

b) Nous avons l'inégalité de Bessel :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

Donc, la série $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ converge et on dit que les coefficients de Fourier de f sont des suites de carré sommable ou sont des éléments de l'espace de Hilbert ℓ^2 .

c) En fait, l'inégalité de Bessel est une égalité, l'identité de Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

Donc, la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable converge toujours, en moyenne quadratique, vers cette fonction.

Preuve : a) Évidemment, le résultat pourrait être démontré pour une période quelconque. Soit

$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx))$ un quelconque polynôme trigonométrique d'ordre n

et posons $J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T_n(t))^2 dt$. En développant, on a

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)T_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(t) dt.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)T_n(t) dt &= \frac{A_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt + \frac{B_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \right) = \\ &= A_0 a_0 + \sum_{k=1}^n (A_k a_k + B_k b_k). \end{aligned}$$

Tandis que l'orthogonalité du système trigonométrique (théorème 2.1) permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(t) dt &= \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_0^2 + 2A_0 \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) + \left(\sum_{k=1}^n (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \right)^2 \right) dt &= \\ = 2A_0^2 + \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2). \end{aligned}$$

Mais alors, on peut écrire que

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - 2A_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (A_k a_k + B_k b_k) + 2A_0^2 + \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2)$$

et, en additionnant et retranchant la quantité $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$ et en réorganisant les termes, on

a

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) + \left(2 \left(A_0 - \frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2 \right) \right)$$

et on voit clairement comment J peut être minimal.

b) On vient de voir que $0 \leq J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - s_n(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$,

d'où $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt$ et on passe à la limite pour $n \rightarrow \infty$ puisqu'on a une suite croissante et majorée, donc convergente.

c) Il faut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - s_n(t))^2 dt = 0$. Cela s'appelle la complétude du système

trigonométrique et utilise des théorèmes d'analyse du genre suivant : les fonctions continues sont « denses » dans $L^2[-\pi, \pi]$ et toute fonction continue (donc un élément de $C[-\pi, \pi]$) peut être approchée d'aussi près que l'on veut par un polynôme trigonométrique, une « somme de Féjer » ici. Plutôt que d'entrer dans ces détails, contentons-nous de démontrer comment l'égalité de Parseval est obtenue lorsqu'on suppose que l'intégration terme à terme des séries est permise (nous parlerons de cela en introduisant la notion de convergence uniforme des séries de fonctions en étudiant les variables complexes). Si

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

converge uniformément vers $f(x)$, alors on a l'égalité

$$f^2(x) = \frac{a_0 f(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n f(x) \cos(nx) + b_n f(x) \sin(nx)).$$

Et en se permettant d'intégrer terme à terme, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right). \end{aligned}$$

qui donne l'identité cherchée. ♦

3.4 Remarque Dans le cas d'une période $T = 2L$ plutôt que 2π et d'une fonction f à valeurs possiblement complexes, l'identité de Parseval devient

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{T} \int_T |f(t)|^2 dt.$$

Sous forme complexe :

$$2c_0^2 + \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 = \frac{2}{T} \int_T |f(t)|^2 dt$$

3.5 Exemple En associant l'intégrale $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt$ à l'énergie d'un signal, l'identité de Parseval

nous indique quelle fraction de l'énergie totale est contenue dans la somme des premières

harmoniques. Ainsi, si f est l'onde carrée de l'exemple 3.16, on a $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = 2$ tandis que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^4 (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^4 b_n^2 = \sum_{n=1}^4 \left(\frac{2((1-(-1)^n))}{n\pi} \right)^2 = \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{9\pi^2} = \frac{160}{9\pi^2} \approx 1.80$$

et donc, les 4 premières harmoniques transportent environ 90% de l'énergie totale du signal.

3.6 Remarque On a vu, dans la démonstration du théorème 3.3, que si $f \in L^2[-\pi, \pi]$, alors les suites $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont de carré sommable et donc sont des suites convergentes vers 0 : ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt = 0$$

Cela est aussi vrai pour une fonction sommable :

3.7 Lemme Soit $\phi \in L^1[-\pi, \pi]$. Alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos(mx) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \sin(mx) dx = 0$$

où m n'est pas nécessairement entier.

Preuve : ici encore, on va utiliser un théorème d'analyse qui dit que les fonctions continues dérivables par morceaux sont denses dans $L^1[-\pi, \pi]$: si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $g \in C[-\pi, \pi]$ telle que g' continue par morceaux et

$$\int_a^b |\phi(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et $\phi(x) \cos(mx) = (\phi(x) - g(x)) \cos(mx) + g(x) \cos(mx)$, d'où, par l'inégalité du triangle et propriété de l'intégrale définie,

$$\left| \int_a^b \phi(x) \cos(mx) dx \right| \leq \int_a^b |\phi(x) - g(x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \cos(mx) dx \right|.$$

En intégrant par parties pour la dernière intégrale, on obtient

$$\int_a^b g(x) \cos(mx) dx = -\frac{1}{m} \int_a^b g'(x) \sin(mx) dx + \left[\frac{1}{m} g(x) \sin(mx) \right]_a^b$$

qui tend vers 0 si $m \rightarrow \infty$, donc rendable plus petit que $\varepsilon/2$ lui aussi. La preuve est analogue pour le sinus. ♦

3.8 Lemme Intégrale de Dirichlet. Si $f \in L^1[-\pi, \pi]$, si $s_n(x)$ est sa somme partielle de Fourier, alors

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du.$$

Preuve : on a $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. En utilisant les définitions, cela devient :

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \cos(kx) + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \sin(kx) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{2 \sin((t-x)/2)} dt \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.2. Posons $t-x = u$. Alors $dt = du$ et on obtient

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du$$

mais puisque les fonctions $f(x+u)$ et $\frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)}$ sont 2π -périodiques en u et puisque l'intervalle $[-\pi-x, \pi-x]$ est de longueur 2π , le résultat est établi. ♦

3.9 Rappel Même si une fonction f n'est pas dérivable en un point x , elle peut posséder une dérivée à droite (resp. à gauche) en ce point si elle est continue à droite (resp. à gauche) en ce point. Ces dérivées sont définies par

$$f'_d(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \quad \text{et} \quad f'_g(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u}.$$

Si nous utilisons la notation $f(x+0)$ pour indiquer la limite à droite $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} f(y)$ et $f(x-0)$ pour indiquer la limite à gauche $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} f(y)$, alors en un point de discontinuité x de f , on posera

$$f'_d(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \quad \text{et} \quad f'_g(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \frac{f(x+u) - f(x-0)}{u}.$$

3.10 Théorème Convergence par points d'une série de Fourier. Soit $f \in L^1[-\pi, \pi]$ une fonction 2π -périodique.

a) En chaque point x de continuité où la dérivée à droite et la dérivée à gauche existent, la série de Fourier de f converge vers $f(x)$.

b) En chaque point de discontinuité x où la dérivée à droite et la dérivée à gauche existent, la série de Fourier de f converge vers la valeur moyenne : $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

c) Conditions de Dirichlet. Donc, si f est douce par morceaux (i.e. f et f' ont seulement un nombre fini de discontinuités sur une période et f possède en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche), alors sa série de Fourier converge toujours.

d) Si, en plus des hypothèses de c), f est continue partout, alors la série de Fourier converge absolument et uniformément vers f et peut donc être intégrée terme à terme.

Preuve : a) Soit x un point de continuité de f . On peut écrire que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - f(x)) \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+u) - f(x)}{u} \right) \frac{u}{2 \sin(u/2)} \sin((n+1/2)u) du = 0. \end{aligned}$$

Pour x fixé, montrons que la fonction $\phi(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin(u/2)}$ est absolument sommable. Le lemme 3.7 donnera le résultat. Puisque les dérivées à droite et à gauche existent, le rapport $\frac{f(x+u) - f(x)}{u}$ reste bornée quand $u \rightarrow 0$. Donc, sur un intervalle du type $[-\delta, \delta]$, la fonction $\frac{f(x+u) - f(x)}{u}$ est sommable, de même qu'en dehors de cet intervalle, donc elle est sommable sur $[-\pi, \pi]$. La fonction $\frac{u}{2 \sin(u/2)}$ tend vers 1 lorsque $u \rightarrow 0$ et est continue pour $u \neq 0$. Mais alors $\phi(u) \in L^1[-\pi, \pi]$ étant le produit d'une fonction sommable et d'une fonction bornée.

b) Soit x est un point de discontinuité de f . Nous avons à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Remarquons que, de l'égalité (théorème 2.2) $1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du$ ($n \geq 1$), on tire, à cause de la parité de l'expression à intégrer,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = \frac{1}{2} \quad (n \geq 1).$$

Il nous suffit donc de voir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = \frac{f(x+0)}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = \frac{f(x-0)}{2}.$$

Contentons-nous de démontrer la première de 2 égalités. Puisque

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+0) \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du,$$

il suffit de voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) - f(x+0)) \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du = 0$. Comme f'_d existe en

x , le rapport $\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u}$ ($u > 0$) reste borné quand $u \rightarrow 0$. Donc, la fonction

$$\phi(u) = \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \cdot \frac{u}{\sin(u/2)}$$

est absolument sommable sur $[0, \pi]$ et le lemme 3.7 donne le résultat.

c) Découle de ce qui précède.

d) Alors f' existe partout sauf « aux coins » de f et f' est bornée puisque continue par morceaux. De plus, $f(\pi) = f(-\pi)$ par continuité. On peut intégrer par parties et alors

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n\pi} [f(t) \sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt = -\frac{1}{n} b'_n$$

où nous avons utilisé la notation $b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt$. De la même manière, on trouve

$$b_n = \frac{1}{n} a'_n \text{ où } a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt .$$

Puisque f' est bornée, elle est un élément de $L^2[-\pi, \pi]$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) < \infty$. Remarquez qu'on a

$$\left(|a'_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = a_n'^2 - 2 \frac{|a'_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0 \text{ et } \left(|b'_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = b_n'^2 - 2 \frac{|b'_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

ce qui entraîne que $\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$

Ainsi, si f est continue et si f' l'est par morceaux, les suites $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont dans ℓ^1 et la convergence de la série de Fourier est donc absolue. Par le test M de Weierstrass (à venir en variables complexes), la série de Fourier converge uniformément. ♦

3.11 Exemple Tous ces théorèmes ne doivent pas faire oublier l'une des principales raisons de l'utilisation des séries de Fourier : résoudre des problèmes ! Par exemple, utilisons les séries de Fourier afin de trouver le courant, en régime permanent, dans un circuit RLC où $R = 100\Omega$, $L = 10H$, $C = 0.01F$ et $E(t)$ est la source 2π -périodique, définie par $E(t) = 200t(\pi^2 - t^2)$, $-\pi < t < \pi$. Alors, puisqu'on cherche le courant en régime permanent, aussi bien travailler avec l'É.D.O. suivante :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E'(t)$$

Ici $i = i(t)$ désigne l'intensité du courant à l'instant t et non pas l'unité imaginaire! Puisque $E'(t) = 200(\pi^2 - 3t^2)$ est une fonction paire, alors on trouve

$$b_n = 0, a_0 = 0 \text{ et } a_n = \frac{2400(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n \geq 1)$$

et ainsi, on cherchera une solution particulière à l'É.D.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 10 \frac{di}{dt} + 10 i = 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nt)$$

sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$ en appliquant la méthode des coefficients indéterminés. Un calcul direct donne

$$A_n = \frac{240(n^2 - 10)(-1)^n}{n^2(n^4 + 80n^2 + 100)} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{-2400(-1)^n}{n(n^4 + 80n^2 + 100)}$$

La figure 3.1 montre une séance Npsire pour trouver ces valeurs :

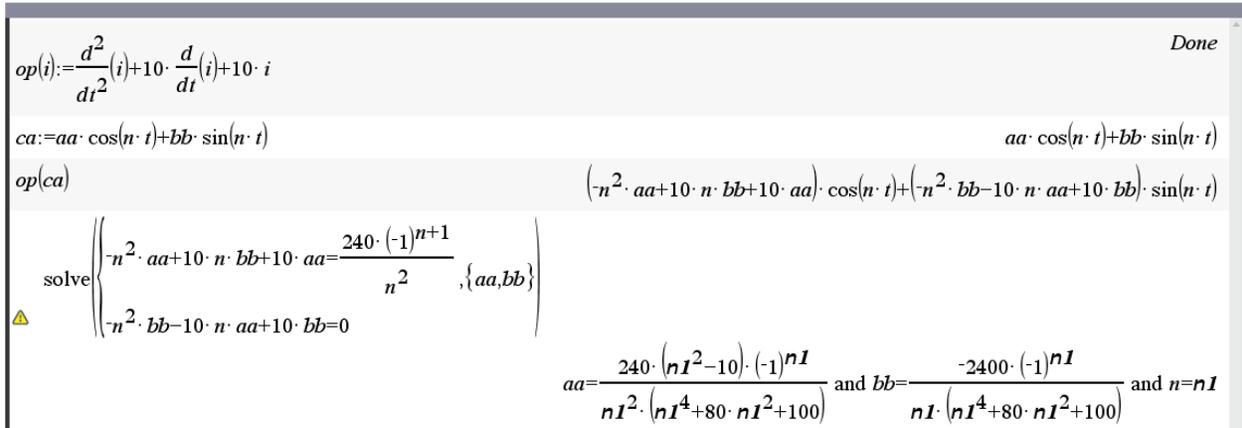


Figure 3.1

L'amplitude du régime permanent est

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{240}{n^2 \sqrt{n^4 + 80n^2 + 100}}$$

Pour $n = 1, 2, \dots$ cela décroît très rapidement et lorsque $n = 10$, on est rendu à 0.018. En effet, on n'a pas que $R^2 - 4 \frac{L}{C} < 0$, donc $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ décroît immédiatement, ce qui fait que le courant en régime permanent sera une oscillation de même fréquence que la source. Un graphe de $\sum_{k=1}^n (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))$ pour $n = 10$ est représenté à la figure 3.2 par la courbe en mauve.

La fenêtre choisie est la suivante : $0 < t < 6\pi, -30 < y < 30$.

Il n'est sûrement pas facile pour un système symbolique de calculer sous forme close la convolution de la réponse impulsionnelle de l'É.D.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E'(t)$$

avec la fonction périodique $E'(t)$. Par contre, le graphique pourra toujours être tracé et on obtiendra alors non seulement le courant en régime permanent mais le courant tout court! Cela permet de vérifier si notre somme partielle est suffisante puisqu'à long terme les deux courbes doivent se confondre : la courbe en rouge de la figure 3.2 a été obtenue en traçant le graphique de la convolution $h(t) * input(t)$ où $h(t)$ est la transformée de Laplace inverse de

$$\frac{1}{10s^2 + 100s + 100}$$

Un système symbolique donne ceci : $h(t) = \frac{\sqrt{15}}{300} \left(e^{-(5-\sqrt{15})t} - e^{-(5+\sqrt{15})t} \right)$.

Quand à $input(t)$, c'est le prolongement 2π -périodique de la fonction $E'(t) = 200(\pi^2 - 3t^2)$ en dehors de l'intervalle $-\pi < t < \pi$. En d'autres termes,

$$input(t) = E'(\text{mod}(t + \pi, 2\pi) - \pi).$$

Ce courant est celui du circuit dans lequel les conditions initiales (tension initiale aux bornes du condensateur et courant initial) sont supposées nulles. Cela n'est pas une perte de généralité puisque les conditions initiales n'affectent que le régime transitoire. On voit, dans cet exemple, qu'on entre très rapidement en régime permanent. Ce qui, de toutes façons, était connu du calcul des amplitudes.

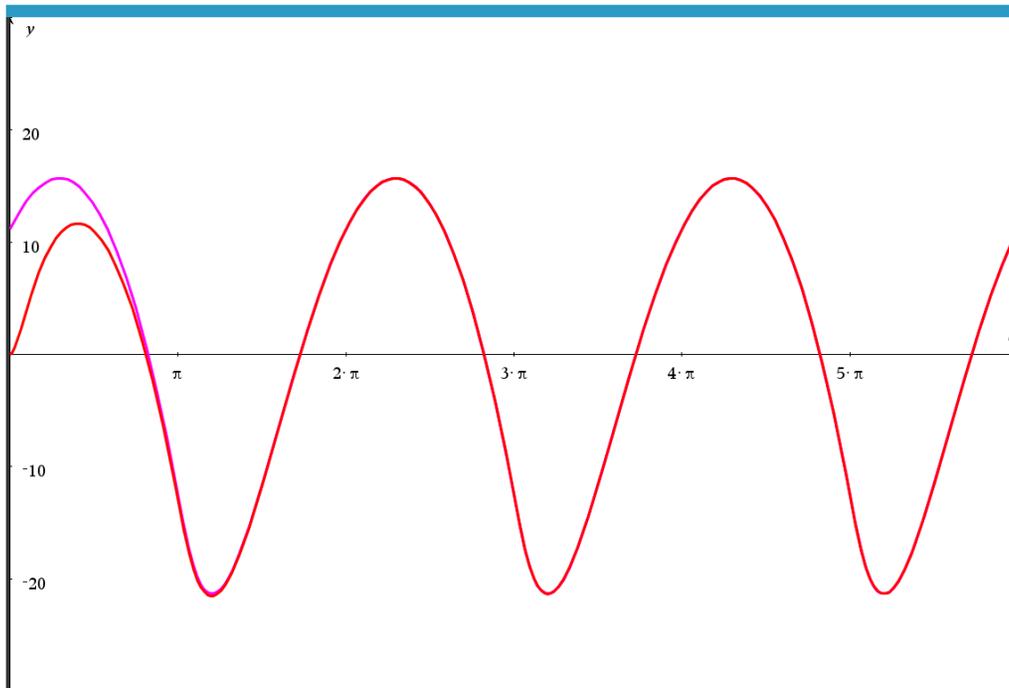


Figure 3.2

4- Intégration et différentiation des séries de Fourier

4.1 Théorème

a) Si $f \in L^2[-\pi, \pi]$ (ou de période quelconque), sa série de Fourier peut être intégrée terme à terme, que la série converge ou non. Donc, si

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

alors

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin(nx) - b_n (\cos(nx) - 1))$$

et la dernière série converge pour tout x .

b) Soit f continue sur, de période 2π , telle que f' existe (sauf en un nombre fini de points par période) avec $f' \in L^1[-\pi, \pi]$. Alors la série de Fourier de f' peut s'obtenir de celle de f en dérivant terme à terme. Donc,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin(nx) + n b_n \cos(nx)),$$

Preuve :

a) soient $-\pi < x_1 < x_2 < \pi$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz (car $L^2[-\pi, \pi] \subset L^1[-\pi, \pi]$) donne

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} s_n(x) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - s_n(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)| dx \leq \|f - s_n\|_2 \sqrt{2\pi} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

d'où le résultat.

b) En vertu du théorème 3.10a), l'hypothèse est que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Soient a'_n ($n \geq 0$) et b'_n ($n \geq 1$) les coefficients de Fourier de f' . Alors,

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0$$

et l'intégration par parties donne

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt = nb_n \quad \text{et} \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt = -na_n \quad . \quad \blacklozenge$$

4.2 Remarque Il est intéressant de jeter un coup d'œil à une [table de séries de Fourier](#) et de visualiser le dernier théorème.

Liste d'exercices pour le résumé 3

Problème 1 Vérifications/résolutions concernant certaines É.D.P.

a) Vérifiez que la fonction $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ satisfait l'équation de Laplace

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et trouvez les valeurs de a et b telles que u satisfasse les conditions aux frontières suivantes :

$$u = 0 \text{ sur le cercle } x^2 + y^2 = 1$$

$$u = 3 \text{ sur le cercle } x^2 + y^2 = 4$$

Produisez un graphe 3D de la fonction ainsi obtenue.

b) Trouvez des solutions $u(x, y)$ en utilisant la méthode de séparation des variables pour chacune des É.D.P. suivantes :

$$\text{i) } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{ii) } y^2 \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{iii) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{iv) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Problème 2 Une É.D.P. de la forme

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

est dite elliptique si $AC - B^2 > 0$, parabolique si $AC - B^2 = 0$ et hyperbolique si $AC - B^2 < 0$. Si A, B et C sont des fonctions de x, y , cela peut dépendre de la région du plan des xy .

a) Montrez que l'équation de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ est elliptique, que l'équation de la chaleur $u_t = c^2 u_{xx}$ est parabolique, que l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ est hyperbolique et que l'équation de Tricomi $y u_{xx} + u_{yy} = 0$ est de type mixte (elliptique dans le demi-plan supérieur et hyperbolique dans le demi-plan inférieur).

b) Montrez qu'en séparant les variables dans l'équation de Tricomi, on peut obtenir l'équation différentielle de Airy : $G'' - yG = 0$.

Problème 3 É.D./É.D.P. avec conditions initiales/conditions aux frontières.

a) Résolvez le problème $u''(x) - u(x) = -1$, $0 < x < 1$, $u'(0) = 0$, $u(1) = 0$.

b) Vérifiez que chacune des fonctions

$$u_{mn} = \exp\left(-z\sqrt{m^2 + n^2}\right) \cos(my) \sin(nx) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)$$

satisfait l'équation de Laplace en 3D : $\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ($0 < x < \pi, 0 < y < \pi, z > 0$)
avec les conditions aux frontières suivantes :

$$u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = u_y(x, 0, z) = u_y(x, \pi, z) = 0.$$

Finalement, utilisez le principe de superposition afin de trouver une fonction qui satisfait, en plus, la condition $u_z(x, y, 0) = (-6 + 5 \cos(4y)) \sin(3x)$.

Problème 4 Si f une fonction de période $P = 2L$ dont la série de Fourier est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Alors l'erreur en moyenne quadratique est définie par

$$E_N = \int_P f^2(x) dx - \frac{P}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) \quad (N \in \mathbb{N}^*).$$

Et cette erreur tend toujours vers 0 lorsque N tend vers l'infini et lorsque f est de carré sommable (c'est le cas si f est bornée sur l'intervalle de périodicité par exemple ; c'est encore vrai et la convergence est plus rapide si f est continue partout). Calculez explicitement la suite E_N afin de montrer cela dans les cas suivants :

$$\text{a) } f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi, \quad P = 2\pi \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad P = 2\pi$$

Problème 5 Phénomène de Gibbs.

Rappelons que, près d'un point de discontinuité, la série de Fourier tend à « overshooter » le signal. En particulier, pour l'onde carrée

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

l'exemple 2.12 permettrait de montrer, pour la somme partielle $s_n(x)$ d'ordre $2n - 1$ définie par

$$s_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1},$$

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \text{Si}(\pi) \approx 1.85 \approx 1.18 \times \pi/2$.

L'exercice consiste à étudier le phénomène de Gibbs pour chacune des 2 situations suivantes. Vous ne devez pas nécessairement calculer la limite symboliquement. Vous pouvez, par exemple, découvrir la valeur de la limite en évaluant la suite pour certaines valeurs de n .

a) $f(x) = 2x, \quad -1 < x < 1, \quad P = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \quad P = 2$

Problème 6 Soient A, B et C des constantes.

a) Montrez que la série de Fourier de la fonction quadratique et périodique de période 2π

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

est

$$f(x) \sim \frac{A\pi^2}{3} + C + 4A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2} - 2B \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}.$$

b) Utilisez le fait que f est continue en $x = \pi$ (lorsque $B = 0$) pour obtenir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

c) Utilisez un choix approprié des constantes A, B et C ainsi que l'identité de Parseval pour obtenir la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Problème 7 Soit f une fonction de période 2π dont on a trouvé la série de Fourier :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Posons $f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

a) Montrez que les fonctions f_e et f_o sont respectivement paire et impaire avec des développements de Fourier respectifs

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

b) Montrez que la fonction $f(x - \pi)$ admet le développement suivant :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

c) Utilisez les résultats précédents afin de trouver les sommes suivantes :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$

Problème 8 Oscillations en régime permanent. En utilisant les séries de Fourier, trouvez les oscillations en régime permanent pour le problème $y'' + y' + y = r(t)$ où $r(t)$ est la force périodique suivante, de période 2π :

a) $r(t) = \begin{cases} \pi t/4 & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi(\pi - t)/4 & \text{si } \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t)$

b) $r(t) = \frac{t}{12}(\pi^2 - t^2)$ si $-\pi < t < \pi$, $r(t + 2\pi) = r(t)$

Tracez ensuite le graphique de la position en régime permanent.

Problème 9 Courant en régime permanent.

En utilisant les séries de Fourier, trouvez le courant en régime permanent dans un circuit RLC pour lequel $R = 100\Omega$, $L = 10H$, $C = 0.01F$ et dont la source $E(t)$ est (en volts) :

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & \text{si } -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases} \quad E(t + 2\pi) = E(t)$$

Tracez ensuite le graphique du courant en régime permanent.

Problème 10 Oscillations en régime permanent : Laplace ou Fourier?

Soit $y'' + 6y' + 34y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ où

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad f(t+2) = f(t)$$

- Trouvez la position en régime permanent, appelons-la $y_{ss}(t)$, en utilisant les séries de Fourier.
- Trouvez la position $y(t)$ en utilisant la transformée de Laplace et la propriété des fonctions périodiques.
- Trouvez la position $y(t)$ en utilisant la convolution de la réponse impulsionnelle avec (le prolongement périodique de) l'entrée $f(t)$. Utilisez un ordinateur pour faire tracer le graphe de $y(t)$
- Vérifiez graphiquement que vos 2 réponses concordent éventuellement.

Problème 11 Oscillations en régime permanent : Laplace ou Fourier?

Soit $y'' + 4y' + 3y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ où

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad f(t+2) = f(t)$$

- Trouvez la position en régime permanent, appelons-la $y_{ss}(t)$, en utilisant les séries de Fourier.
- Trouvez la position $y(t)$ en utilisant la formule pour la transformée de Laplace d'une fonction périodique. Et servez-vous de la somme d'une série géométrique ainsi que de la propriété de translation.

c) Trouvez la position $y(t)$ en utilisant la convolution de la réponse impulsionnelle avec (le prolongement périodique de) l'entrée $f(t)$. Utilisez un ordinateur pour faire tracer le graphe de $y(t)$

d) Vérifiez graphiquement que vos 2 réponses concordent éventuellement.

Problème 12 Répondez aux mêmes questions qu'au problème 11 avec

$$y'' + 2y' + 10y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{où } f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < \pi \\ 2\pi - t & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Problème 13 Courant en régime permanent : Laplace ou Fourier?

Un circuit RLC avec une source $E(t)$ et où $v_c(0) = 0$ nous conduit à l'équation intégro-différentielle suivante, pour l'intensité du courant $i(t)$:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t).$$

Soient les données suivantes :

$$R = 110\Omega, \quad L = 1\text{H}, \quad C = 10^{-3}\text{F}, \quad E(t) = \begin{cases} 90 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad E(t + 2) = E(t)$$

(les unités du temps sont des secondes et celles de E , des volts)

a) Si $i(0) = 0$, trouvez $i(t)$ en utilisant la transformée de Laplace.

b) Esquissez le graphique du courant pour $0 < t < 12$.

c) Trouvez le courant en régime permanent en utilisant les séries de Fourier. Qu'allez-vous considérer? L'É.D.

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E'(t),$$

ce qui vous forcera à utiliser la « fonction » de Dirac ou bien l'É.D.

$$LC \frac{d^2v_c}{dt^2} + RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = E(t)$$

et faire ensuite $i(t) = C v_c'(t)$?

Problème 14 Soit le circuit RLC suivant : $R = 98 \Omega$, $L = 1\text{H}$ et $C = \frac{1}{720}\text{F}$.

a) En utilisant la transformée de Laplace, sachant que $I(s) \leftrightarrow i(t)$, $\widehat{E}(s) \leftrightarrow E(t)$, trouvez une expression pour $I(s)$.

b) Trouvez une expression pour $i(t)$ sous la forme d'une convolution faisant intervenir la source $E(t)$.

Pour le reste du problème de l'exercice, prenez la source périodique suivante :

$$E(t) = \begin{cases} 90t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 180 - 90t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad E(t+2) = E(t)$$

c) Utilisez la formule de la transformée de Laplace des fonctions périodiques afin de trouver l'expression de $i(t)$ sous forme de série infinie.

d) Faites tracer le graphique du courant sur $0 < t < 10$ en utilisant la convolution.

e) Trouvez une série de Fourier représentant le courant en régime permanent et comparez son graphique avec celui du courant obtenu en d). Il devrait éventuellement être semblable.

Problème 15 Un problème de masse-ressort conduit à l'équation différentielle suivante

$$y'' + \frac{1}{5}y' + 49y = \text{input}(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où l'entrée $\text{input}(t)$ est le prolongement 2π -périodique de la fonction $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}$

dont la série de Fourier est $f(t) \sim 1 + \frac{4 \sin t}{\pi} + \frac{4 \sin(3t)}{3\pi} + \frac{4 \sin(5t)}{5\pi} + \dots$

Posons $so(t)$ la solution complète de ce problème et posons $ssp(t)$ la solution en régime permanent de ce problème.

a) Donnez une représentation intégrale de $so(t)$, faisant intervenir la réponse impulsionnelle et l'input.

b) Si vous cherchez $ssp(t)$ sous la forme $C + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$, indiquez quelle

valeur de n sera prédominante ici. Vous pouvez effectuer des calculs pour trouver cela ou présenter un argument théorique vu en classe.

Note : avec l'ordinateur, on obtiendrait ceci :

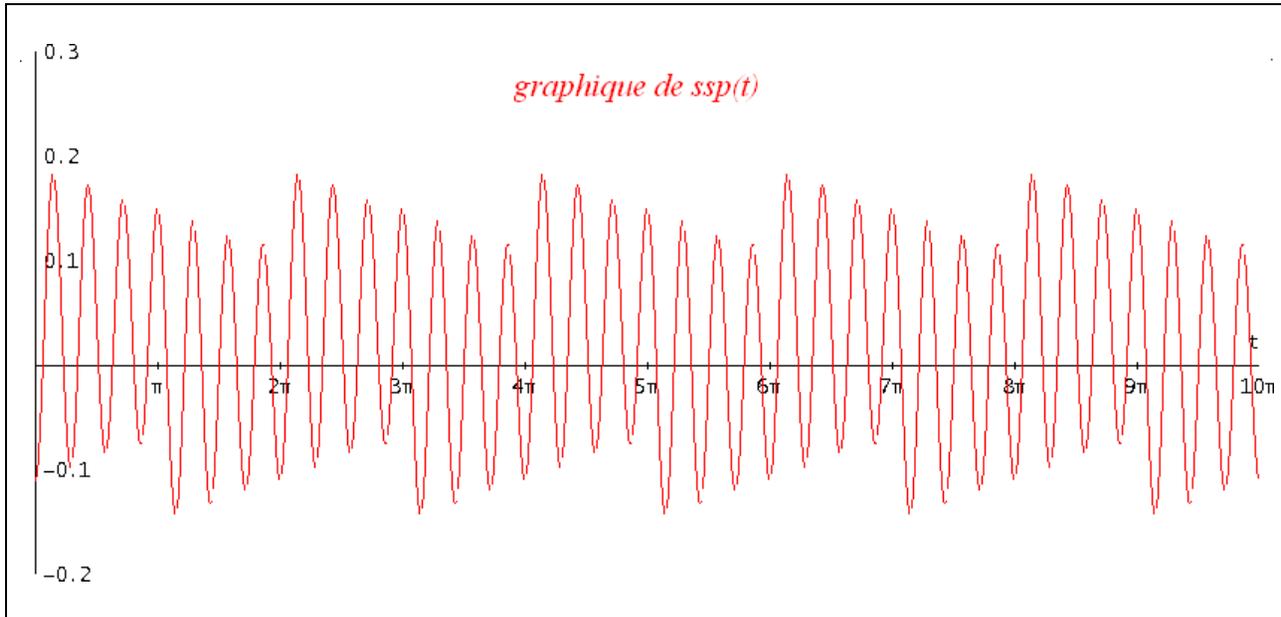


Figure du problème 15

Problème 16 Forme complexe des séries de Fourier et spectre d'amplitude

Rappelons la forme complexe des séries de Fourier pour une fonction f de période $P = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{P} \int_P f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

Le spectre d'amplitude (ou de fréquence) est le graphe des points $(n\omega_0, |c_n|)$ tandis que le spectre de phase est le graphe des points $(\varphi_n, n\omega_0)$ où $\varphi_n = \text{Arg}(c_n)$. Tracez ces graphiques pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \frac{3t}{4}, 0 \leq t < 8, f(t+8) = f(t)$

b) $f(t) = |E \sin(\lambda t)|$ où E et λ sont des constantes positives.