Solutions des exercices pour la semaine du 1er février 2021
T.P. du jeudi 4 février : exercices 2, 5, 6a) et 6e) du résumé 2

Problème 2 du résumé 2 Système d'É.D. provenant d'un problème de réservoirs. Le réservoir *A* contient initialement 100 gal d'eau pure tandis que le réservoir *B* contient 100 gal d'eau mélangée avec 90 lb de sel. Les 2 réservoirs sont reliés entre eux (voir figure 1) et on maintient le mélange uniforme par brassage. Résolvons cet exercice en trouvant la quantité de sel dans chacun des réservoirs ($x_1(t)$ et $x_2(t)$) de 2 façons différentes :

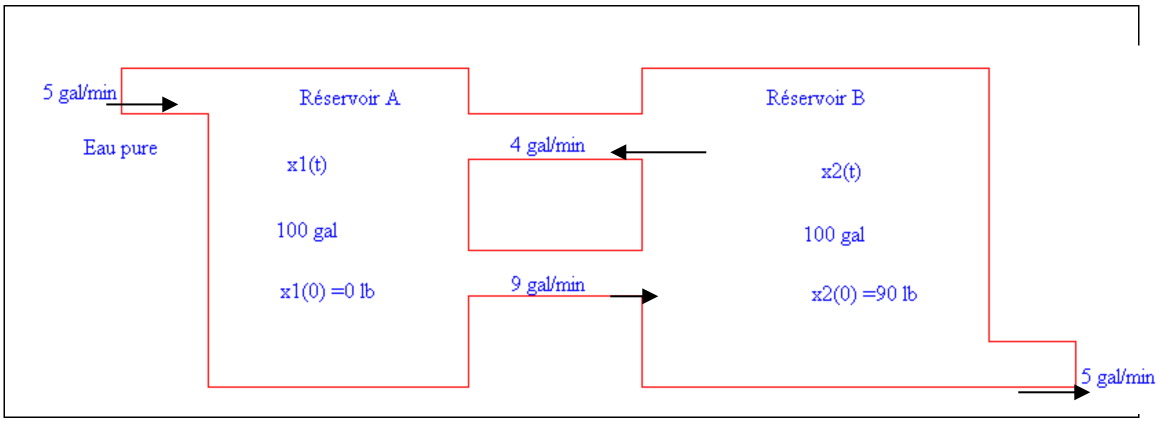

Figure 1

a) Trouvons la solution exacte $\left(x_1(t),\ x_2(t)\right)$ en utilisant la technique des transformées de Laplace.
b) Trouvons (encore) la solution exacte en utilisant les techniques de vecteurs propres.
c) Esquissons les 3 graphiques suivants, chacun dans une fenêtre appropriée

$$\left(t, x_1(t)\right),\ \left(t, x_2(t)\right)\ \text{ et }\ \left(x_1, x_2\right).$$

d) Comparons le graphique de $\left(x_1, x_2\right)$ avec celui du plan de phase généré par une méthode numérique robuste (RK par exemple).
e) Question additionnelle : trouvons la solution exacte en supposant qu'au lieu d'avoir une entrée d'eau pure de 5 gal/min, on aurait une entrée de solution saline de de concentration 2lb/gal au taux de 5 gal/min. On pourra utiliser la formule qui résout un système linéaire d'É.D.

Solution : pour les questions a), b), c) et d), le système d'É.D. est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{4}{100}x_2 - \dfrac{9}{100}x_1, & x_1(0) = 0 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{9}{100}x_1 - \dfrac{9}{100}x_2, & x_2(0) = 90 \end{cases}$$

tandis que pour la question e), on ajoutera 10 (5×2) au côté droit de la première É.D.

Les É.D. s'obtiennent en calculant « entrées – sorties ». Par exemple, pour le réservoir *A*, l'entrée est la suivante (on met les unités pour bien voir) :

$$4\,\frac{\text{gal}}{\text{min}}\cdot\frac{x_2\ \text{lb}}{100\,\text{gal}}=\frac{1}{25}x_2\,\frac{\text{lb}}{\text{min}}.$$

Sous forme matricielle, on aura donc en écrivant et simplifiant

$$\frac{d\,\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{AX},\quad \mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0\quad \text{avec } \mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix} x_1\ (t)\\ x_2\ (t)\end{bmatrix},\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-9/100 & 1/25\\ 9/100 & -9/100\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}_0=\begin{bmatrix}0\\ 90\end{bmatrix}.$$

a) Par technique de transformées de Laplace, on va poser $X_1(s)$ la transformée de Laplace de $x_1(t)$ et $X_2(s)$ la transformée de Laplace de $x_2(t)$ et on obtient le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} s\,X_1=-\dfrac{9}{100}X_1+\dfrac{1}{25}X_2\\ sX_2-90=\dfrac{9}{100}X_1-\dfrac{9}{100}X_2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} s+9/100 & -1/25\\ -9/100 & s+9/100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 90\end{bmatrix}.$$

On résout ce système par la méthode de la matrice inverse et on trouve en allant dans notre table de transformées de Laplace ceci :

$$X_1(s)=\frac{7200}{2000s^2+360s+9}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{expand}}}{=}\frac{3000}{100s+3}-\frac{600}{20s+3}\quad\leftrightarrow\quad x_1(t)=30e^{-3t/100}-30e^{-3t/20}$$

$$X_2(s)=\frac{1800(100s+9)}{2000s^2+360s+9}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{expand}}}{=}\frac{4500}{100s+3}+\frac{900}{20s+3}\quad\leftrightarrow\quad x_2(t)=45e^{-3t/100}+45e^{-3t/20}$$

b) Par la technique des valeurs et vecteurs propres, on trouve que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-9/100 & 1/25\\ 9/100 & -9/100\end{bmatrix}$ sont précisément $\lambda_1=-3/20, \lambda_2=-3/100$ et que des vecteurs propres associés sont par exemple $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$. Cela donne donc la solution générale $\mathbf{X}(t)=c_1e^{-\lambda_1 t}\mathbf{v}_1+c_2\,e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2=c_1\,e^{-3t/20}\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}+c_2\,e^{-3t/100}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$. On va trouver les constantes c_1 et c_2 en utilisant la condition initiale. On a

$$c_1\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 90\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad c_1=-c_2=-15.$$

Mais alors comme précédemment, on a bien $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30e^{-3t/100} - 30e^{-3t/20} \\ 45e^{-3t/100} + 45e^{-3t/20} \end{bmatrix}$.

c)

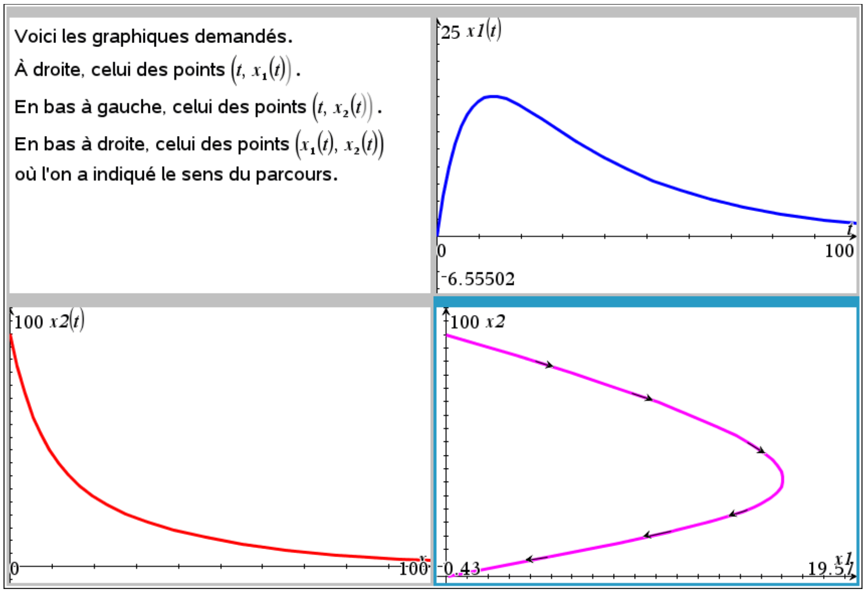

Figure 2

d) On va voir que l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta permet d'obtenir chacun de ces 3 graphiques en personnalisant les axes. Dans Nspire, la fenêtre graphique 2D en mode équations différentielles utilisent « x » et non pas « t » comme variable indépendante et les fonctions sont dénotés « $y1$ », « $y2$ », …. On expliquera au T.P. comment produire ces courbes :

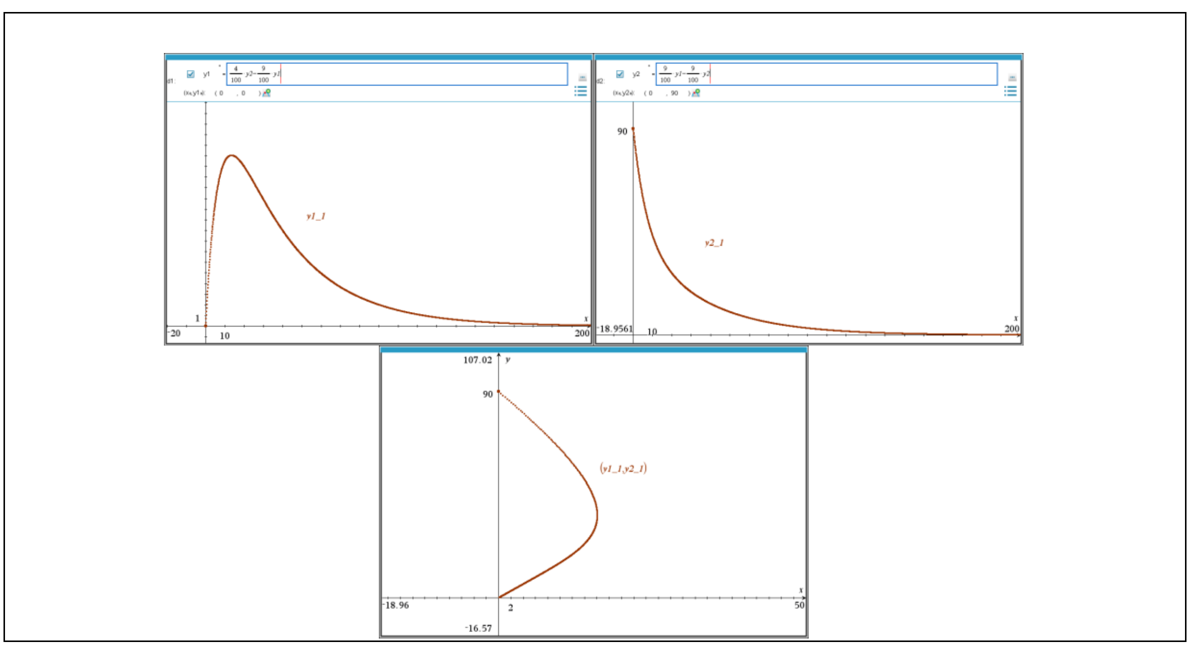

Figure 3

e) Alors le système devient

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{9}{100}x_1 + \dfrac{4}{100}x_2 + 10, & x_1(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{9}{100}x_1 - \dfrac{9}{100}x_2, & x_2(0) = 90 \end{cases}$$

La séance suivante de Nspire prépare l'utilisation de la formule qui résout un système linéaire à coefficients constants et fournit la réponse cherchée : on verra que cette réponse est indépendante de la condition initiale et on dira bientôt que le point (200, 200) est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

$$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix} \frac{-9}{100} & \frac{1}{25} \\ \frac{9}{100} & \frac{-9}{100} \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{-9}{100} & \frac{1}{25} \\ \frac{9}{100} & \frac{-9}{100} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{xo}:=\begin{bmatrix} 0 \\ 90 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 90 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(t):=\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \mathit{Done}$$

$$\mathbf{sol}:=\mathbf{kit\_ets\_mb\backslash de\_syst}(\mathbf{a},\mathbf{g}(t),0,\mathbf{xo}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \dfrac{10\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{20}}\cdot\left(60\cdot e^{\frac{3\cdot t}{20}} - 41\cdot e^{\frac{3\cdot t}{25}} - 19\right)}{3} \\[2ex] 5\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{20}}\cdot\left(40\cdot e^{\frac{3\cdot t}{20}} - 41\cdot e^{\frac{3\cdot t}{25}} + 19\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{propFrac}(\mathbf{sol}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \dfrac{-410\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{100}}}{3} - \dfrac{190\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{20}}}{3} + 200 \\[2ex] -205\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{100}} + 95\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{20}} + 200 \end{bmatrix}$$

À long terme, chaque réservoir contiendra 200 lb de sel.

Figure 4

Notez que la fonction « de_syst » utilisée et montrée à la figure 4 ne fait qu'automatiser la formule qui dit que la solution au problème

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

est donnée par

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\, ds \right).$$

Pour tout problème d'application, cela est tout à fait justifié. Quant au calcul de l'exponentielle de la matrice A, nous allons les faire « au long » lors d'un exercice comme le problème 6 plus loin.

Problème 5 du résumé 2 Une application des matrices de rotation : générer un tore. La matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en est une de rotation autour de l'axe des z, d'un angle de θ radians, sens anti-horaire. Utilisons cette matrice et le cercle, situé dans le plan $y = 0$, centré au point (2, 0, 0) et de rayon 1, afin de générer un tore. Les 2 paramètres de notre surface seront donc la paramètre du cercle et celui de la matrice de rotation ci-haut.

Solution : le cercle en question peut être décrit par l'ensemble suivant qui en donne des équations paramétriques valides :

$$C : \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 + \cos(t),\ \ y = 0,\ \ z = \sin(t),\quad 0 \le t \le 2\pi \right\}.$$

Il suffit alors de faire le produit matriciel suivant et la surface (le tore) est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+\cos t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+\cos t)\cos\theta \\ (2+\cos t)\sin\theta \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \left(0 \le \theta, t \le 2\pi\right).$$

La figure 5 montre le cercle (côté gauche), le tore engendré (côté droit) lorsque ce cercle tourne autour de l'axe des z. Une animation afin de voir le « tore se construire » est facile à réaliser. Nous le ferons « live » au T.P.

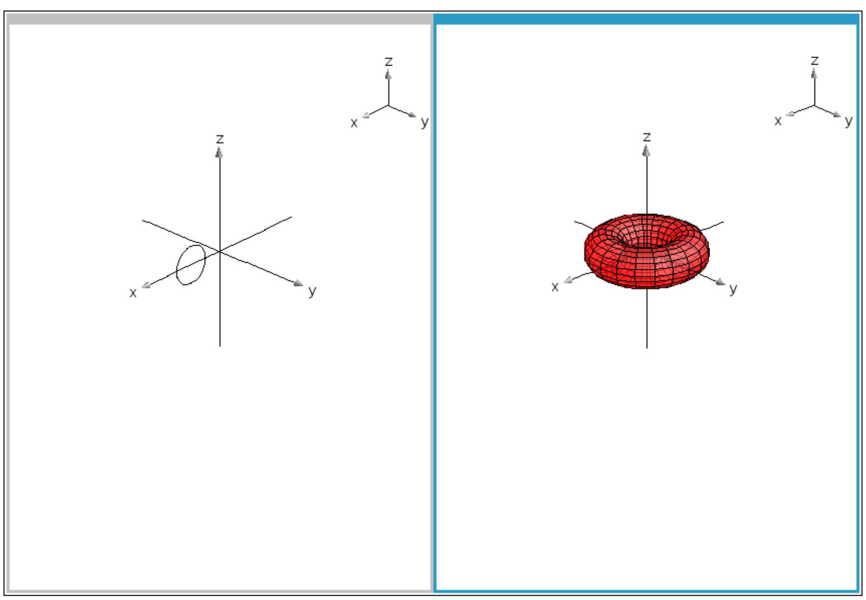

Figure 5

Problème 6 du résumé 2 Systèmes linéaires mais non homogènes.

Utilisons un système symbolique pour trouver les solutions à chacun des systèmes suivants mais en calculant « au long » soi-même la matrice $e^{\mathbf{A}t}$ avant d'utiliser la formule

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\, ds \right).$$

a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - t^2 + 6t, & y_1(0) = 2 \\ y_2' = y_1 + y_2 - t^2 + t - 1, & y_2(0) = -1 \end{cases}$

Alors on a la matrice suivante $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$ avec des vecteurs propres correspondants respectifs $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Par conséquent, on alors $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$. Et puisque pour une matrice diagonale **D** on a que la puissance *k* de cette matrice est la matrice des puissances *k* des éléments de sa diagonale, on peut écrire que

$$\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{(-1t)^k}{k!} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & e^{3t}-e^{-t} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix}.$$

Avant de mettre cette matrice en mémoire (disons comme *ee*(*t*)), il est toujours recommandé de vérifier si le calcul est bon à l'aide de la fonction « expmat » de la librairie kit_ets_mb.

$$kit\_ets\_mb\backslash expmat(a) \qquad \begin{bmatrix} \frac{e^{3\cdot t}}{2}+\frac{e^{-t}}{2} & e^{3\cdot t}-e^{-t} \\ \frac{e^{3\cdot t}}{4}-\frac{e^{-t}}{4} & \frac{e^{3\cdot t}}{2}+\frac{e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$ee(t) := \begin{bmatrix} \frac{e^{3\cdot t}}{2}+\frac{e^{-t}}{2} & e^{3\cdot t}-e^{-t} \\ \frac{e^{3\cdot t}}{4}-\frac{e^{-t}}{4} & \frac{e^{3\cdot t}}{2}+\frac{e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \qquad Done$$

Figure 6

Nous mettrons maintenant en mémoire $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -t^2 + 6t \\ -t^2 + t - 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Puisque $t_0 = 0$, alors la formule prend la forme simplifiée $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\, ds\right)$. Nspire finit le travail. La figure 7 montre que la solution cherchée est

$$\begin{cases} y_1(t) = 2e^{-t} + t^2 \\ y_2(t) = -e^{-t} - t \end{cases}$$

Et la figure 6 montre aussi qu'on a bien vérifié notre réponse!

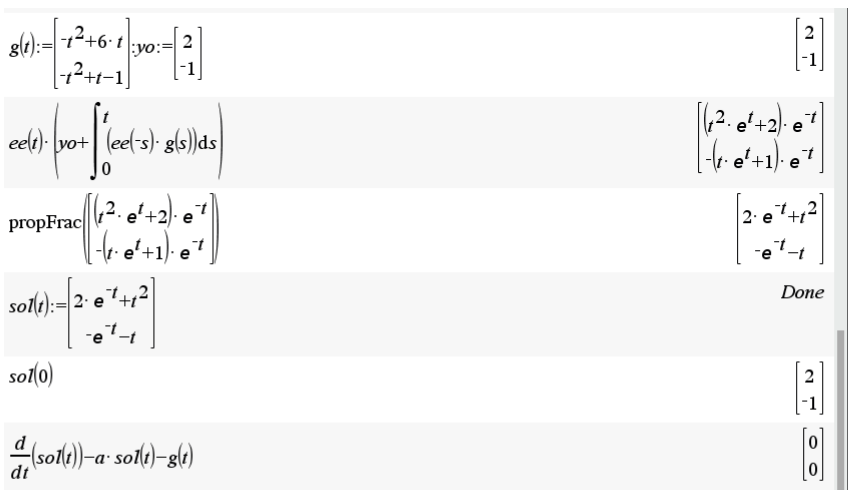

Figure 7

e) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 3t-1 \\ t^2 \\ 1 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice **A** sont trouvées en résolvant l'équation $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ qui donne l'équation polynomiale $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$ dont le théorème des racines rationnelles indique que les zéros rationnels possibles sont ±1, ±2, ±4 et ±8. On trouve facilement 1 et −2 de sorte que le polynôme se factorise dans $\mathbb{R}$ en $(\lambda - 1)(\lambda + 2)\left(\lambda^2 + 4\right)$. La matrice **A** ne sera donc pas diagonalisable dans les réels mais on pourra trouver une matrice inversible **P** telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ sera de la forme de la matrice « **DD** » suivante puisque les deux autres valeurs propres sont 0 ± 2*i* :

$$\mathbf{DD} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice **P** sera formée comme suit : $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathrm{Im}(\mathbf{vc}) & \mathrm{Re}(\mathbf{vc}) \end{bmatrix}$ où **vc** sera un vecteur propre complexe associé à la valeur propre complexe 2*i*, $\mathbf{v}_1$ sera un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ et $\mathbf{v}_2$ sera un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$. Des calculs montrent qu'on a pu choisir les vecteurs suivants :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{vc} = \begin{bmatrix} i \\ -2 \\ -4i \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 0 & 0 & \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix},$$

on trouve $e^{\mathbf{A}t}$ non montrée ici puisque trop large pour l'espace que nous avons! Par contre, la condition initiale étant donnée en $t_o = 0$, nous n'avons qu'à faire faire le calcul suivant :

$$e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)\,ds \right) \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0).$$

Lorsque suivie d'une commande "propfrac", la réponse **so**(*t*) devient plus compacte et est montrée à la figure 8.

On remarque qu'on a vérifié la réponse à la fin en testant si **so**(0) est bien égal à $\mathbf{x}_0$ et si le système est bien satisfait en vérifiant si $\frac{d}{dt}(\mathbf{so}(t)) - \mathbf{A}\,\mathbf{so}(t) - \mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$. La fonction **g** étant continue sur toute la droite, la matrice **A** étant une matrice constante, nous savons que cette solution est unique.

$$\mathbf{a} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(t) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3\cdot t-1 \\ t^2 \\ 1 \\ e^{-2\cdot t} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{xo} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{propFrac}(\mathbf{so}(t)) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{-3\cdot\cos(2\cdot t)}{40}-\frac{23\cdot\sin(2\cdot t)}{80}+\left(\frac{53}{72}-\frac{t}{24}\right)\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{94\cdot e^{t}}{45}-\frac{t^2}{4}-2\cdot t-\frac{7}{4} \\ \frac{-23\cdot\cos(2\cdot t)}{40}+\frac{3\cdot\sin(2\cdot t)}{20}+\left(\frac{t}{12}-\frac{109}{72}\right)\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{94\cdot e^{t}}{45}-\frac{7\cdot t}{2}-1 \\ \frac{3\cdot\cos(2\cdot t)}{10}+\frac{23\cdot\sin(2\cdot t)}{20}+\left(\frac{28}{9}-\frac{t}{6}\right)\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{94\cdot e^{t}}{45}-t^2-\frac{7}{2} \\ \frac{23\cdot\cos(2\cdot t)}{10}-\frac{3\cdot\sin(2\cdot t)}{5}+\left(\frac{t}{3}-\frac{115}{18}\right)\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{94\cdot e^{t}}{45}-2\cdot t-1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{so}(0) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{so}(t))-\mathbf{a}\cdot\mathbf{so}(t)-\mathbf{g}(t) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figure 8