Solutions des exercices pour la semaine du 8 février 2021
T.P. du jeudi 11 février : exercices 7b), d), h) et o) et exercice 8 du résumé 2

Problème 7 du résumé 2 Exponentielle de matrice. En indiquant notre démarche, calculons $e^{\mathbf{A}t}$ pour chacune des matrices **A** suivantes et vérifions ensuite votre réponse en utilisant une fonction appropriée d'un système symbolique. Et trouvons une formule close pour une puissance entière $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ -1/6 & -2 \end{bmatrix}$

Une séance Nspire, dont la figure 1 plus loin montre les calculs, va nous faire voir que cette matrice possède une valeur propre double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -3/2$ et n'est donc pas diagonalisable (puisqu'elle n'est pas déjà diagonale). On va trouver un vecteur propre $\mathbf{v}_1 = [3 \quad -1]^T$ et un vecteur propre généralisé $\mathbf{v}_2 = [6 \quad 0]^T$ tel que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ et une matrice inversible $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2]$ telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N} \quad \text{où} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on aura $\mathbf{A} = \mathbf{P}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N})\mathbf{P}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^k = \mathbf{P}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N})^k\mathbf{P}^{-1}$. Utilisons la notation $\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}$ pour désigner une combinaison de r objets parmi k que Nspire dénote par nCr(k, r) et dont la formule est $\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{k!}{r!(k-r)!}$ et qui vaut 0 lorsque $r > k$. Par la formule du binôme de Newton et puisque **I** et **N** commutent et que **N** est nilpotente d'indice 2, on peut écrire que

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\left(\sum_{r=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} \lambda^{k-r}\mathbf{N}^r\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\left(\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^k\mathbf{I} + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}\lambda^{k-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\left(\lambda^k\mathbf{I} + k\lambda^{k-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{P}^{-1}.$$

Donc, avec λ valant $-3/2$ et avec k un entier positif quelconque, on a trouvé une formule pour les puissances $\mathbf{A}^k$:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\left(\lambda^k\mathbf{I} + k\lambda^{k-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(-3/2)^{k-1}\begin{bmatrix} -3/2 & k \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(3-k)(-1)^k(3/2)^k}{3} & -k(-1)^k(3/2)^k \\ \dfrac{k(-1)^k(3/2)^k}{9} & \left(\dfrac{k}{3}+1\right)(-1)^k(3/2)^k \end{bmatrix}.$$

Finalement, pour trouver la matrice $e^{\mathbf{A}t}$, voici deux manières dont on peut procéder. On applique tout simplement le théorème de Cayley-Hamilton qui dit que toute matrice carrée est un zéro de son polynôme caractéristique, donc $(\mathbf{A} + 3/2\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ et par conséquent, toujours parce que **A** et **I** commutent, on peut écrire

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}+\lambda\mathbf{I})t} = e^{\lambda\mathbf{I}t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t} = e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t} =$$

$$e^{\lambda t}\left(\mathbf{I}+(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t+\frac{\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t\right)^2}{2!}+\cdots\right) = e^{\lambda t}\left(\mathbf{I}+(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t\right) = e^{-3t/2}\begin{bmatrix} \frac{t}{2}+1 & \frac{3t}{2} \\ -\frac{t}{6} & 1-\frac{t}{2} \end{bmatrix}.$$

Si l'on ne veut pas utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, alors y va comme suit : on sait déjà que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{N}\right)\mathbf{P}^{-1}$ et donc $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{N})t}\mathbf{P}^{-1}$. La commutativité du produit de **I** et de **N** et le fait que N est nilpotente d'indice 2 permettent d'écrire que

$$e^{(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{N})t} = e^{\lambda\mathbf{I}t}\,e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t}\left(\mathbf{I}+\mathbf{N}t+\frac{\mathbf{N}^2t^2}{2!}+\cdots\right) = e^{-3t/2}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il suffit alors de multiplier le résultat précédent à gauche par **P** et à droite par $\mathbf{P}^{-1}$ et on obtient le résultat suivant, équivalent à celui de tantôt :

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-3t/2}\begin{bmatrix} \frac{t+2}{2} & \frac{3t}{2} \\ \frac{-t}{6} & \frac{2-t}{2} \end{bmatrix}.$$

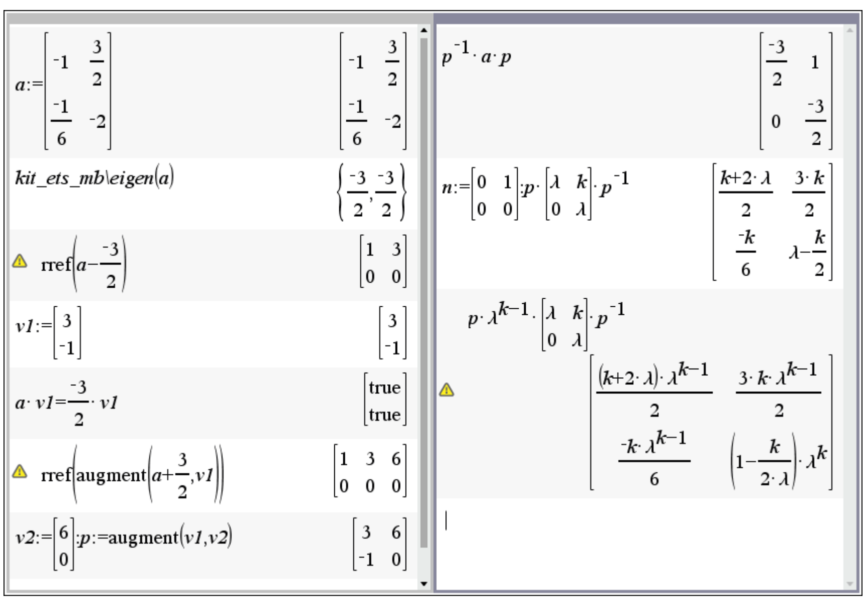

Figure 1

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Un vecteur propre associé à la valeur propre 3 est $\mathbf{v}_1 = [0 \quad 2 \quad 1]^T$, un vecteur propre associé à la valeur propre double 1 est $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ mais on ne peut pas trouver un second vecteur propre indépendant associé à la valeur propre double 1, donc la matrice **A** n'est pas diagonalisable.

Par contre, on peut trouver un vecteur propre généralisé associé à la valeur propre double 1, par exemple le vecteur $\mathbf{v}_3 = [-2 \quad 1 \quad 0]^T$ et on peut donc former une matrice inversible $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]$ telle $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{M}$ où **M** est la matrice **DD** + **N** :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{DD} + \mathbf{N}.$$

On remarque que **M** est la somme de deux matrices qui commutent, l'une diagonale **DD** et l'autre **N** nilpotente d'indice deux. Or $e^{\mathbf{DD}t} = \mathrm{diag}(\{e^{3t},\ e^{t},\ e^{t}\})$ et $e^{\mathbf{N}t} = \mathbf{I} + \mathbf{N}t$. Donc

$$e^{\mathbf{DD}t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & t\,e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, il suffit d'effectuer le calcul et on trouve

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} t\,e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & t\,e^{t} & t\,e^{t} \\ 0 & 0 & t\,e^{t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ \dfrac{e^{3t} - e^{t}}{2} & e^{3t} & 0 \\ \dfrac{e^{3t}}{4} - \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}\right) e^{t} & \dfrac{e^{3t} - e^{t}}{2} & e^{t} \end{bmatrix}.$$

Trouvons une formule pour les puissances de **A**. Si k est un entier positif, alors

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{M}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\left(\mathbf{DD} + \mathbf{N}\right)^k \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Et $\left(\mathbf{DD}+\mathbf{N}\right)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\mathbf{N}^r\mathbf{DD}^{k-r} = \mathbf{DD}^k + k\,\mathbf{N}\,\mathbf{DD}^{k-1} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{calcul direct}}}{=} \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mais alors

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3^k-1}{2} & 3^k & 0 \\ \dfrac{3^k-2k-1}{4} & \dfrac{3^k-1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \left(k \in \mathbb{N}^*\right).$$

Faisons une preuve par récurrence pourra démontrer la validité du résultat. Si $k = 1$, on a

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3^1-1}{2} & 3^1 & 0 \\ \dfrac{3^1-2\cdot 1-1}{4} & \dfrac{3^1-1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$. Supposons le résultat vrai pour $k = j$.

Donc supposons que $\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3^j-1}{2} & 3^j & 0 \\ \dfrac{3^j-2j-1}{4} & \dfrac{3^j-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (hypothèse de récurrence) et montrons alors que c'est vrai pour $j + 1$. Cela terminera la preuve par récurrence. On a

$$\mathbf{A}^{j+1} = \mathbf{A}^j \cdot \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3^j-1}{2} & 3^j & 0 \\ \dfrac{3^j-2j-1}{4} & \dfrac{3^j-1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3^j-1}{2}+3^j & 3^j\cdot 3 & 0 \\ \dfrac{3^j-2j-1}{4}+\dfrac{3^j-1}{2} & \left(\dfrac{3^j-1}{2}\right)\cdot 3+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3^{j+1}-2}{2} & 3^{j+1} & 0 \\ \dfrac{3^{j+1}-2(j+1)-1}{4} & \dfrac{3^{j+1}-1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalement, la figure 2 montre certains calculs faits sur Nspire pour justifier les réponses obtenues.

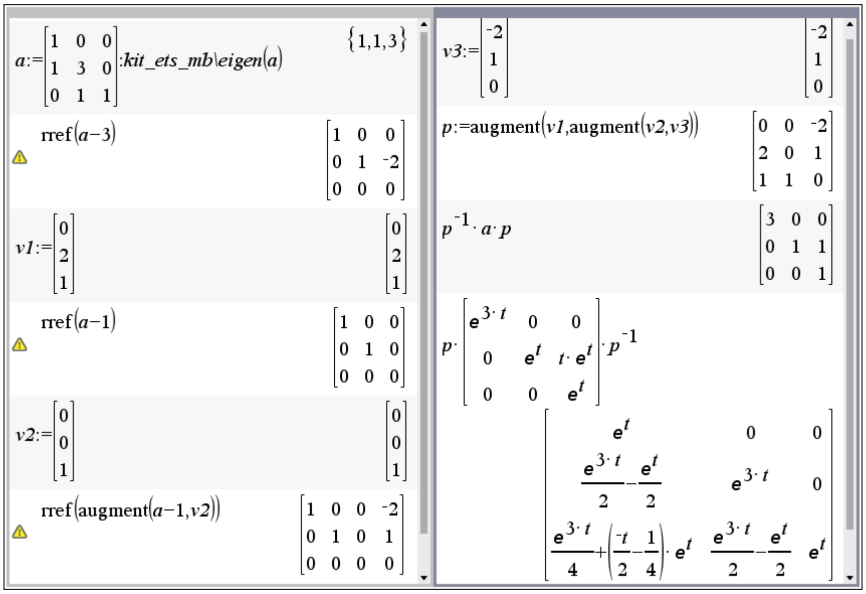

Figure 2

h) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Cette matrice possède les valeurs propres -1, -1 et 8 mais est diagonalisable. On trouve facilement une matrice inversible **P** comme celle montrée à la figure 3 :

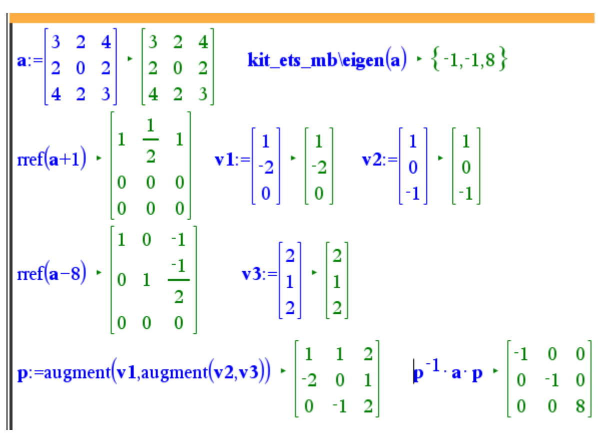

Figure 3

Suivent facilement les matrices $e^{\mathbf{A}t}$ et $\mathbf{A}^k$:

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4\cdot 8^k + 5\cdot(-1)^k & 2\cdot 8^k - 2\cdot(-1)^k & 4\cdot 8^k - 4\cdot(-1)^k \\ 2\cdot 8^k - 2\cdot(-1)^k & 8^k + 8\cdot(-1)^k & 2\cdot 8^k - 2\cdot(-1)^k \\ 4\cdot 8^k - 4\cdot(-1)^k & 2\cdot 8^k - 2\cdot(-1)^k & 4\cdot 8^k + 5\cdot(-1)^k \end{bmatrix} \quad \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4e^{8t} + 5e^{-t} & 2e^{8t} - 2e^{-t} & 4e^{8t} - 4e^{-t} \\ 2e^{8t} - 2e^{-t} & e^{8t} + 8e^{-t} & 2e^{8t} - 2e^{-t} \\ 4e^{8t} - 4e^{-t} & 2e^{8t} - 2e^{-t} & 4e^{8t} + 5e^{-t} \end{bmatrix} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$$

La figure 4 montre que la fonction « expmat » donne bien cela et on a « testé » la réponse pour $\mathbf{A}^k$ pour différentes valeurs de k (une preuve par récurrence aurait été encore possible) en montrant que la différence entre la matrice $\mathbf{A}^k$ trouvée et le calcul direct de $\mathbf{A}^k$ donne bien la matrice $\mathbf{0}$ puisque la norme de leur différence est 0 :

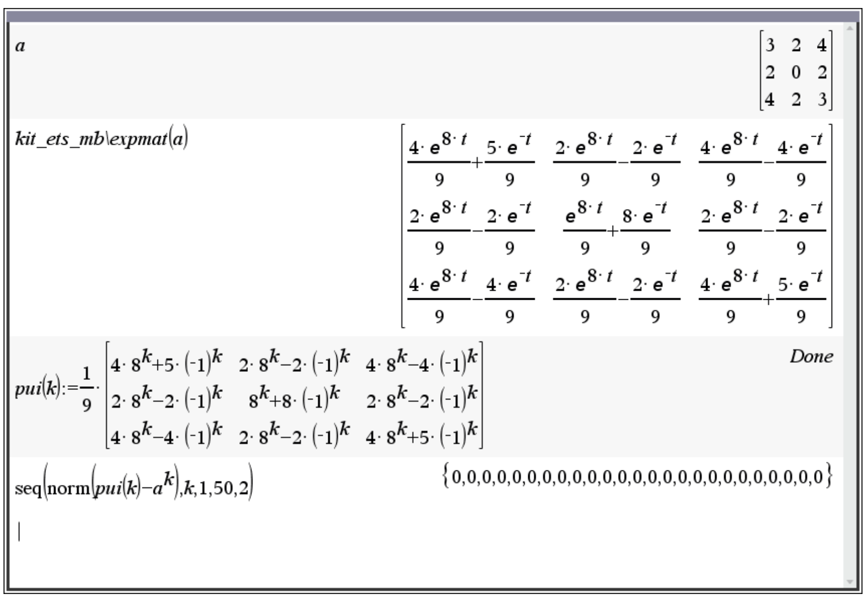

Figure 4

$$\textbf{o)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice carrée d'ordre 5 possède les valeurs propres suivantes : 1 qui est une valeur propre double et 2 qui est une valeur propre triple. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$. Notons que cela était prévisible puisque la matrice **A** est triangulaire inférieure. Et on ne pourra trouver qu'un seul vecteur propre associé à la valeur propre double 1 : nous avons choisi le vecteur $\mathbf{v_1}$ qu'on voit à la figure 5. Il en sera de même pour la valeur propre triple 2 : on ne pourra trouver qu'un seul vecteur propre et nous avons choisi le vecteur propre $\mathbf{v}_2$ à la figure 5 toujours. En effet, chacune des matrices L-réduite $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ est de rang 1 (toutes les colonnes sont des colonnes-pivots sauf la dernière qui fournit la variable libre comme l'indique la figure 5 où l'on a mis en rouge cette colonne). Cette matrice ne sera donc pas diagonalisable.

$$\mathbf{a} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{a}-\lambda) \blacktriangleright -(\lambda^5 - 8\cdot\lambda^4 + 25\cdot\lambda^3 - 38\cdot\lambda^2 + 28\cdot\lambda - 8)$$

$$\mathrm{cFactor}(\det(\mathbf{a}-\lambda),\lambda) \blacktriangleright -(\lambda-2)^3\cdot(\lambda-1)^2$$

$$\mathrm{rref}(\mathbf{a}-1) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v1} := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rref}(\mathbf{a}-2) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v2} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figure 5

On trouve ensuite un vecteur propre généralisé pour la valeur propre 1 en résolvant le système $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. On a choisi pour **v** le vecteur **vg1** = $[-1/3 \quad 35/4 \quad -29 \quad 191/6 \quad 0]^T$. Ensuite, on trouve deux vecteurs propres généralisés pour la valeur propre 2 en résolvant $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$, ce qui a donné le vecteur **vg2_1** = $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/3 \quad 1]^T$. On trouve ensuite un autre vecteur généralisé pour la valeur propre 2 en résolvant maintenant le système suivant : $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}$ = **vg2_1**, ce qui a permis de trouver **vg2_2** = $[0 \quad 0 \quad 1/9 \quad 1/9 \quad 5]^T$. Cela permet de former la matrice inversible **P** = [$\mathbf{v}_1$ **vg1** $\mathbf{v}_2$ **vg2_1** **vg2_2**] telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tous les calculs pour y arriver sont montrés aux figures 6 et 7. On voit que la dernière matrice est de la forme bloc avec une matrice $\mathbf{N}_1$ de format 2×2 et nilpotente d'indice 2 et une matrice $\mathbf{N}_2$ de format 3×3 et nilpotente d'indice 3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{N}_1 \text{ où } \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Et } \mathbf{N}_1^{\,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{N}_2 \text{ où } \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Et } \mathbf{N}_2^{\,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mais } \mathbf{N}_2^{\,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

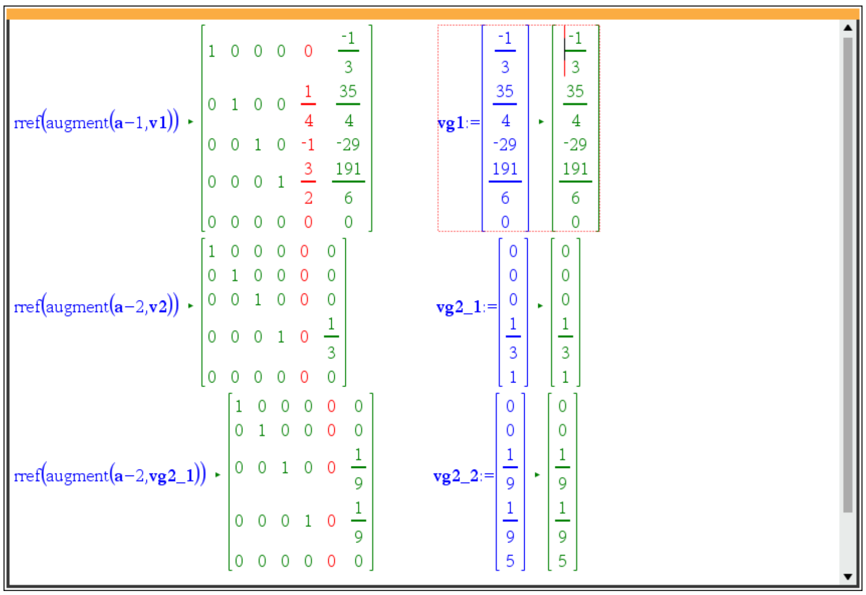

Figure 6

Nous savons que pour une matrice nilpotente $\mathbf{N}$ d'indice k, nous avons $e^{\mathbf{N}t} = \mathbf{I} + \mathbf{N}t + \dfrac{\mathbf{N}^2 t^2}{2} + \cdots + \dfrac{\mathbf{N}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!}$ $(t \in \mathbb{R})$. Nous utilisons cela pour la matrice $\mathbf{N}_1$ (avec k = 1) et pour la matrice $\mathbf{N}_2$ (avec k =2) définies précédemment et qui sont aussi montrées à la figure 7. Cela permet de trouver ceci :

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^t & \frac{t^2}{2} e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

La figure 7 montre aussi qu'on a utilisé des couleurs pour les deux blocs contenant les matrices nilpotentes qui apparaissent dans la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ et les calculs suivants montrent la provenance de la matrice ci-haut.

$$\mathbf{p}^{-1}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n1}^2 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1+\mathbf{n1}\cdot t \to \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n2} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n2}^2 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n2}^3 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1+\mathbf{n2}\cdot t+\frac{\mathbf{n2}^2\cdot t^2}{2} \to \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 7

Reste à multiplier par $\mathbf{P}$ à gauche et par $\mathbf{P}^{-1}$ à droite pour avoir la matrice $e^{\mathbf{A}t}$.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^t & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}.$$

Nous avons vérifié que le résultat du produit ci-haut est exactement la même chose que ce que donne la fonction « expmat » dont le résultat est affiché à la figure 8 :

$$\mathbf{kit\_ets\_mb\backslash expmat(a)}$$

$$\to \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\cdot t\cdot e^t & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 18\cdot e^{2\cdot t}+(-12\cdot t-18)\cdot e^t & 4\cdot e^{2\cdot t}-4\cdot e^t & e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ (54\cdot t-62)\cdot e^{2\cdot t}+(18\cdot t+62)\cdot e^t & (12\cdot t-6)\cdot e^{2\cdot t}+6\cdot e^t & 3\cdot t\cdot e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t} & 0 \\ (81\cdot t^2-78\cdot t+105)\cdot e^{2\cdot t}+(-12\cdot t-105)\cdot e^t & (18\cdot t^2+6\cdot t+4)\cdot e^{2\cdot t}-4\cdot e^t & \left(\frac{9\cdot t^2}{2}+6\cdot t\right)\cdot e^{2\cdot t} & 3\cdot t\cdot e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t} \end{bmatrix}$$

Figure 8

Pour les puissances, les blocs permettent aussi de procéder comme nous l'avons montré dans des exemples précédents. Plus précisément, nous savons que si $\mathbf{N}$ est une matrice nilpotente d'indice k, alors la puissance $(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N})^n$ où λ est réel et où n est un quelconque entier positif peut se calculer comme suit en utilisant la formule du binôme de Newton et le fait que les matrices $\lambda\mathbf{I}$ et $\mathbf{N}$ commutent :

$$\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{N}\right)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\lambda^{n-r}\mathbf{N}^r.$$

Pour $\mathbf{N}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ nilpotente d'indice 2 et λ = 1, nous avons alors

$$\left(\mathbf{I}+\mathbf{N}_1\right)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathbf{N}^r=\binom{n}{0}\mathbf{I}+\binom{n}{1}\mathbf{N}_1=\mathbf{I}+n\,\mathbf{N}_1=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Tandis que pour $\mathbf{N}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ nilpotente d'indice k = 3 et avec λ = 2, nous avons

$$\left(2\mathbf{I}+\mathbf{N}_2\right)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{n-r}\,\mathbf{N}^r=2^n\binom{n}{0}\mathbf{I}+2^{n-1}\binom{n}{1}\mathbf{N}_2+2^{n-2}\binom{n}{2}\mathbf{N}_2{}^2$$

$$=2^n\mathbf{I}+n\,2^{n-1}\mathbf{N}_1+2^{n-2}\cdot\frac{n\,(n-1)}{2}\mathbf{N}_2{}^2=\begin{bmatrix}2^n & \dfrac{2^n\,n}{2} & \dfrac{2^n\,n\,(n-1)}{8}\\ 0 & 2^n & \dfrac{2^n\,n}{8}\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

Mais alors

$$\mathbf{A}^n=\mathbf{P}\begin{bmatrix}1 & n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^n & \dfrac{2^n\,n}{2} & \dfrac{2^n\,n\,(n-1)}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 2^n & \dfrac{2^n\,n}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right).$$

Il est moins long pour nous de recopier de Nspire le résultat du dernier produit et la figure 9 montre la matrice $\mathbf{A}^n$ pour n entier positif. Encore là, il serait possible de vérifier que cette réponse est bonne en procédant avec une preuve par récurrence.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\cdot n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 18\cdot 2^n-12\cdot n-18 & 4\cdot 2^n-4 & 2^n & 0 & 0 \\ (27\cdot n-62)\cdot 2^n+18\cdot n+62 & (6\cdot n-6)\cdot 2^n+6 & \dfrac{3\cdot n\cdot 2^n}{2} & 2^n & 0 \\ \left(\dfrac{81\cdot n^2}{4}-\dfrac{237\cdot n}{4}+105\right)\cdot 2^n-12\cdot n-105 & \left(\dfrac{9\cdot n^2}{2}-\dfrac{3\cdot n}{2}+4\right)\cdot 2^n-4 & \left(\dfrac{9\cdot n^2}{8}+\dfrac{15\cdot n}{8}\right)\cdot 2^n & \dfrac{3\cdot n\cdot 2^n}{2} & 2^n \end{bmatrix}$$

Figure 9

Problème 8 Points critiques et stabilité de systèmes linéaires autonomes. Déterminons le type et la stabilité du point critique. Trouvons ensuite la solution générale (méthode au choix) et traçons quelques trajectoires dans le plan de phase. Nous utilisons le résultat suivant vu au cours qui résume les propriétés de stabilité du système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$$

où **A** étant une matrice d'ordre deux inversible (det(**A**) ≠ 0).

Valeurs propres de A	**Type des points critiques**	**Stabilité**
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Noeud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Noeud	Asymptotiquement stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point de selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Foyer (ou noeud propre (« étoile ») : **A** déjà diagonale) ou Noeud impropre (ou dégénéré : **A** non diagonale)	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Foyer (ou noeud propre (« étoile ») : **A** déjà diagonale) ou Noeud impropre (ou dégénéré : **A** non diagonale)	Asymptotiquement stable
$\lambda_1,\ \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spirale	 Instable Asymptotiquement stable
$\lambda_1 = bi,\ \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable

Figure 10

a) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$

Alors $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3.$ Donc l'origine est un *col* (point de selle) *instable*. Des vecteurs propres associés respectifs sont $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]^T$ et $\mathbf{v}_2 = [1 \quad -5]^T$ et la solution générale du système est

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{3t} + c_2 \; {}^{-3t} \\ y_2 = c_1 e^{3t} - 5c_2 e^{-3t} \end{cases} \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

La figure 11 montre le plan de phase (l'axe des « x » n'a pas été renommé mais ce serait l'axe des « y_1 » et l'axe des « y » aurait pu être renommé en « y_2 »). Les quatre trajectoires en bleu sont sur les droites d'équations $y_2 = y_1$ et $y_2 = -5y_1$. Celles sur la droite $y_2 = y_1$ auraient beau débuter très près de l'origine, elles vont s'en éloigner quand le temps avance. Celles sur la droite $y_2 = -5y_1$ se dirigent vers l'origine quand le temps avance.

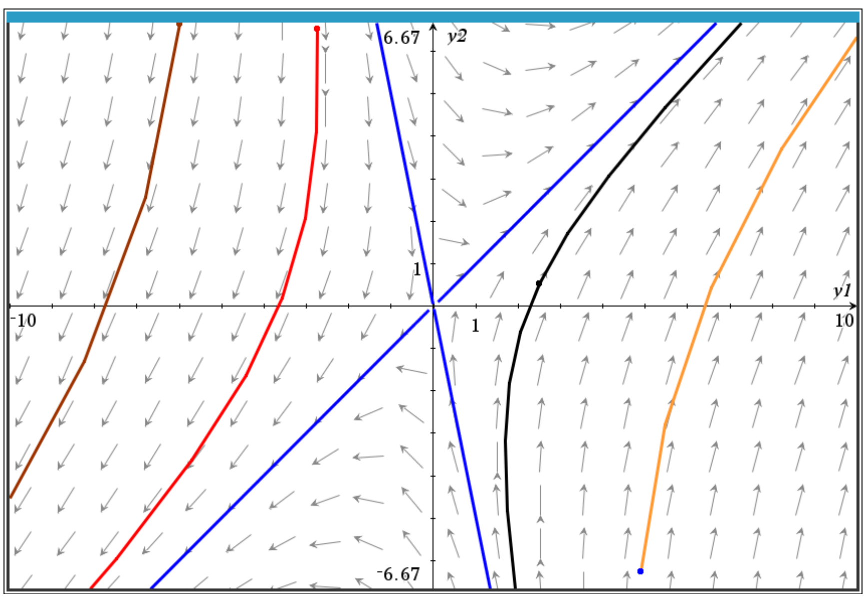

Figure 11

Illustrons « à l'envers » la situation. Supposons qu'on parte du point $(-2, 10)$ situé dans le deuxième quadrant. Alors la solution générale nous donne, quand $t = 0$,

$$\begin{cases} -2 = c_1 + c_2 \\ 10 = c_1 - 5c_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 0 \text{ et } c_2 = -2.$$

Mais alors $\begin{cases} y_1 = -2 \; {}^{-3t} \\ y_2 = 10\, e^{-3t} \end{cases} \quad \Rightarrow y_2 = -5y_1.$ On est bien situé sur la droite $y_2 = -5y_1$.

b) $\begin{cases} y_1' = -6y_1 - y_2 \\ y_2' = -9y_1 - 6y_2 \end{cases}$

Alors $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -9, \lambda_2 = -3.$ L'origine est un *nœud asymptotiquement stable*. Des vecteurs propres associés respectifs sont $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 3]^T$ et $\mathbf{v}_2 = [1 \quad -3]^T$ et la solution générale du système est

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-9t} + c_2 \; {}^{-3t} \\ y_2 = 3c_1 e^{-9t} - 3c_2 e^{-3t} \end{cases} \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voir la figure 12. On voit que toutes les trajectoires, sauf celles sur la droite $y_2 = 3y_1$sont éventuellement tangentes à la droite $y_2 = -3y_1$ puisque e^{-9t} tend vers 0 beaucoup plus vite que e^{-3t}.

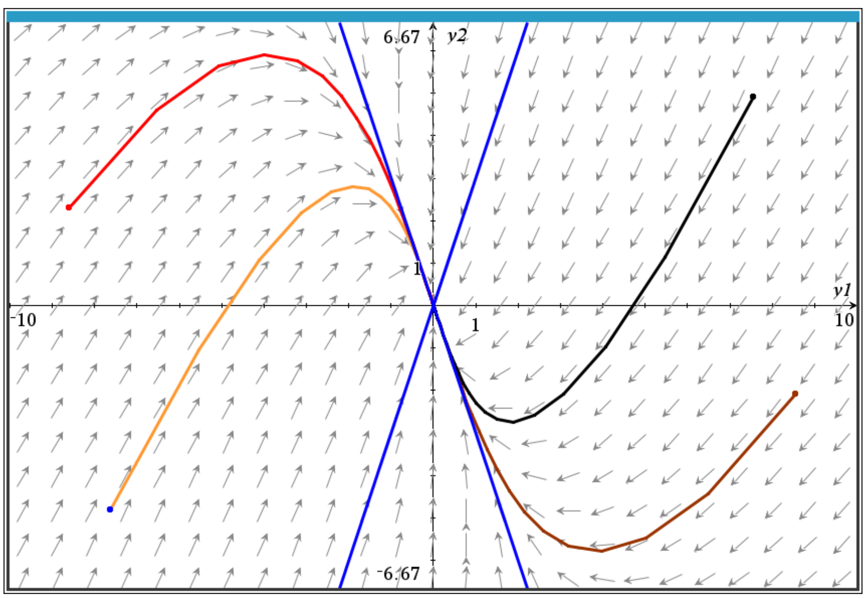

Figure 12

c) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 5y_1 - y_2 \end{cases}$

Alors $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i.$ L'origine est un *centre stable*. Un vecteur propre complexe associé à la valeur propre $3i$ est $\mathbf{vc} = \begin{bmatrix} 1+3i \\ 5 \end{bmatrix}$. Par conséquent, la solution générale du système est une combinaison linéaire des parties réelle et imaginaire de la solution complexe

$$e^{3i\,t}\mathbf{vc} = e^{3i\,t}\begin{bmatrix}1+3i\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(3t)-3\sin(3t)+i\,(3\cos(3t)+\sin(3t))\\ 5\cos(3t)+i\,5\sin(3t)\end{bmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{cases} y_1 = (c_1+3c_2)\cos(3t)+(c_2-3c_1)\sin(3t)\\ y_2 = 5c_1\cos(3t)+5c_2\sin(3t)\end{cases} \qquad c_1,\ c_2\ \in\mathbb{R}.$$

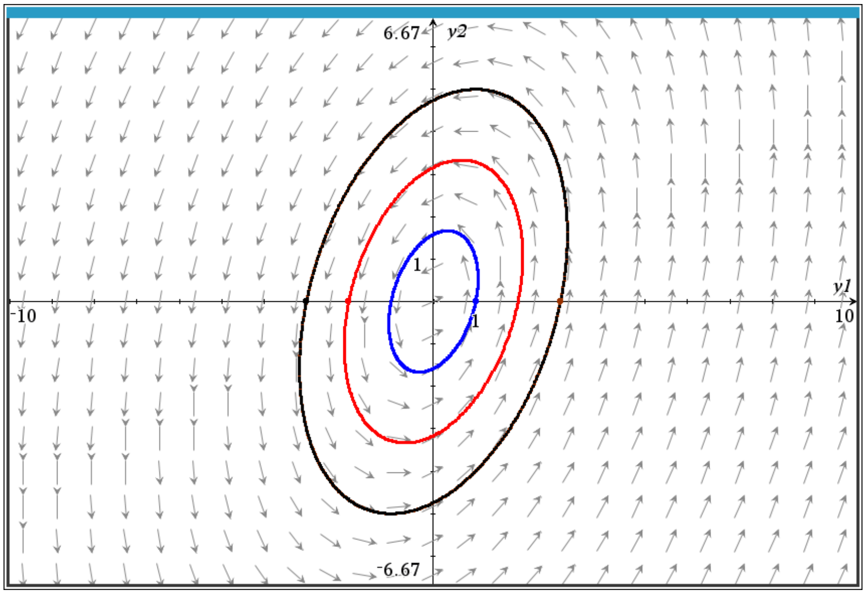

Figure 13

Le lecteur intéressé pourra montrer que si l'on élimine le paramètre, alors il s'agit de la famille d'ellipses d'équation $5y_1{}^2-2y_1y_2+2y_2{}^2=45\left(c_1{}^2+c_2{}^2\right)$.

d) $\begin{cases} y_1' = -y_1\\ y_2' = -5y_1-y_2\end{cases}$

Alors $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ -5 & -1\end{bmatrix}$ $\quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=-1$. L'origine est un *nœud impropre* (ou dégénéré) *asymptotiquement stable*. Il y a une seule direction propre $\mathbf{v}_1$ = [0 1]^T procurant une première solution $e^{-t}\,\mathbf{v}_1$ une deuxième solution indépendante est donnée par $e^{-t}\,(t\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$ en utilisant le vecteur propre généralisé $\mathbf{v}_2$ = [–1/5 0]^T. La solution générale du système est alors

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{c_2}{5}e^{-t}\\ y_2 = (c_1-c_2\,t)e^{-t}\end{cases} \qquad c_1,\ c_2\ \in\mathbb{R}.$$

La figure 14 montre le plan de phase avec quelques courbes solutions.

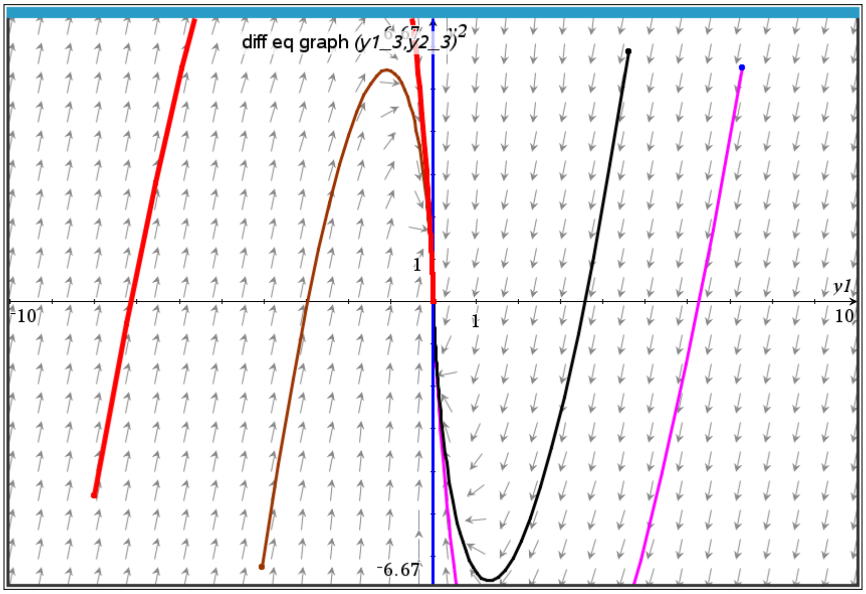

Figure 14