

MAT 805: Compléments de mathématique

Résumé 5

Analyse complexe

michel.beaudin@etsmtl.ca

6 avril 2021

Voici les différentes sections de ce résumé fait à partir de Nspire, utilisant au besoin un éditeur d'équation pour faciliter l'entrée de certaines données.

- 1- Remarque sur une variable non déclarée
- 2- Fonction d'une variable complexe, équations de Cauchy-Riemann, intégrale curviligne
- 3- La fonction $\text{Exp}(z)$
- 4- Fonction $\text{Log}(z)$; fonction puissance générale
- 5- "Unwinding Number"
- 6- Formules
- 7- Résolutions d'équations exponentielles et logarithmiques
- 8- Fonctions trigonométriques, hyperboliques
- 9- La formule intégrale de Cauchy
- 10- Séries de Taylor, séries de Laurent
- 11- Théorème des résidus
- 12- Un autre exemple sur LambertW

1- Remarque sur une variable complexe non déclarée

Afin de pouvoir calculer une intégrale curviligne via le théorème des résidus, nous devons en premier définir les fonctions usuelles, notamment les fonctions exp et Log, ainsi que le "unwinding number". Le tout, vu dans le contexte du calcul symbolique à l'aide de Nspire CX CAS comme logiciel de support.

Mais avant de commencer, dans Nspire, une variable non déclarée est toujours considérée comme étant réelle. Ajouter un "_" à la variable la rend complexe. On voit ceci en simplifiant

$\sqrt{z^2}$ et $\sqrt{z_2}$:

$$\sqrt{z^2} \rightarrow |z|$$

$$\sqrt{z_2} \rightarrow \sqrt{z_2}$$

$$\frac{1}{z+i} \rightarrow \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+1} \cdot i$$

$$\frac{1}{z_2+i} \rightarrow \frac{1}{z_2+i}$$

2- Fonction d'une variable complexe, équations de Cauchy-Riemann, intégrale curviligne

► Si $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$, alors une fonction $f(z)$ engendre automatiquement deux fonctions à valeurs réelles, chacune à deux variables x et y , dénotées habituellement par $u(x, y)$ et $v(x, y)$. Par exemple

$$(x+i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i$$

Ainsi pour la fonction $f(z) = z^2$, on vient de voir que sa partie réelle est le champ scalaire $u(x, y) = x^2 - y^2$ et que sa partie imaginaire est le champ scalaire $v(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$.

► D'autres exemples sur lesquels des sections vont se pencher:

$$e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot \cos(y) + e^x \cdot \sin(y) \cdot i$$

$$\sin(x+i \cdot y) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + \cos(x) \cdot \sinh(y) \cdot i$$

$$\ln(x+i \cdot y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + \left(\frac{\pi \cdot \text{sign}(y)}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right) \cdot i$$

► Si $f = u + i \cdot v$ est une fonction d'une variable complexe $z = x + i \cdot y$, on aimerait avoir une condition nécessaire pour qu'elle soit dérivable en un point z . (Éventuellement, dans un voisinage du point z , on dira alors que f est analytique en z). Cette dérivée sera encore dénotée par $f'(z)$.

Puisqu'il y a une infinité de chemins dans le plan complexe qui s'approchent de l'origine -- alors que sur l'axe des x on ne peut s'approcher d'un point que par la gauche ou par la droite.

On va calculer le quotient différentiel $\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ de deux façons différentes: si $h = h_1 + i \cdot h_2$,

on va s'approcher de l'origine en suivant l'axe des x et recommencer en suivant l'axe des y .

Cela va nous mener à devoir satisfaire les **équations de Cauchy-Riemann**:

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dy}(v) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dy}(u) = -\frac{d}{dx}(v)$$

En effet, si l'on suit l'axe des x alors $h = h_1$ et $f(z) = f(x+i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ tandis que $f(z+h_1) = f(x+i \cdot y+h_1) = u(x+h_1, y) + i \cdot v(x+h_1, y)$ et alors si la limite existe

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1} \right) = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h_1, y) - u(x, y) + i \cdot (v(x+h_1, y) - v(x, y))}{h_1} \right) = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h_1, y) - u(x, y)}{h_1} \right) + i \cdot \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{v(x+h_1, y) - v(x, y)}{h_1} \right) = \frac{d}{dx}(u)(x, y) + i \cdot \frac{d}{dx}(v)(x, y) \end{aligned}$$

Si l'on suit l'axe des y , alors $h = i \cdot h_2$. Remarquons que si h tend vers 0, alors h_2 tend vers 0 puisque i est non nul. Aussi, $1/i = -i$.

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right) = \lim_{i \cdot h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{f(z+i \cdot h_2) - f(z)}{i \cdot h_2} \right) = \\
 &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y+h_2) - u(x, y) + i \cdot (v(x, y+h_2) - v(x, y))}{i \cdot h_2} \right) \\
 &= -i \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y+h_2) - u(x, y)}{h_2} \right) + \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{v(x, y+h_2) - v(x, y)}{h_2} \right) = \frac{d}{dy}(v)(x, y) - i \cdot \frac{d}{dy}(u)(x, y)
 \end{aligned}$$

► Les équations de Cauchy-Riemann (EQR) nous donnent aussi une façon de calculer la dérivée. En les utilisant, on trouve les formules connues de dérivation. Par exemple, la dérivée de z^2 est bien $2 \cdot z$ puisque de la page précédente on sait que $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$. Mais alors

$$\frac{d}{dx}(x^2 - y^2) + i \cdot \frac{d}{dx}(2 \cdot x \cdot y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot i$$

► En général, nous allons considérer des fonctions d'une variable complexe qui sont définies dans un ensemble ouvert connexe par arcs du plan complexe (un "domain" en anglais). Cela signifie qu'on va travailler dans un sous-ensemble U du plan complexe qui est ouvert et qui, étant donnés deux points, contient un chemin (un arc paramétré comme en calcul à plusieurs variables mais en 2D ici) $r(t)$ reliant ces 2 points et restant entièrement dans U .

On tracera un tel chemin en allant dans une fenêtre 2D en mode paramétrique puisque $r(t)$ ne sera rien d'autre que la donnée d'une fonction $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $r(t) = x(t) + i \cdot y(t)$. La courbe C ainsi décrite sera dite *fermée* si $r(a) = r(b)$ et sera dite *simple* si la fonction r est injective (donc la courbe "ne se recoupe pas").

► Soit $f = u + i \cdot v$ une fonction analytique dans un "domaine" U et soit C une courbe dans U . Soit $r = r(t)$ une paramétrisation valide de C (il en existe en général plus d'une) dont la variable t varie dans l'intervalle $[a, b]$

L'intégrale curviligne de f le long de C sera dénotée par

$$\int_C f(z) dz$$

et sera calculée par une intégrale définie comme suit:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(r(t)) r'(t) dt$$

Remarque: lorsque le chemin sera fermé, la notation suivante est souvent utilisée (le sens du parcours est supposé celui contraire des aiguilles d'une montre):

$$\oint_C f(z) dz.$$

► On peut montrer que la valeur de l'intégrale --qui est un nombre complexe-- ne dépend pas de la paramétrisation: deux paramétrisations équivalentes du chemin C vont donner le même résultat. Par contre, si l'on conserve les points initiaux A et B mais change de chemin pour les relier, l'intégrale curviligne change en général de valeur à moins que la fonction soit analytique.

► On peut aussi montrer qu'invertir le sens du parcours a pour effet de changer le signe de la valeur de l'intégrale curviligne (comme pour les intégrales curviligne de champs de vecteurs dans un cours de calcul à plusieurs variables).

► Une importante inégalité sera **l'inégalité ML**: si L est la longueur de C , si M est un majorant de $|f(z)|$ sur C , alors

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M L.$$

Preuve: supposons que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la paramétrisation d'une courbe C dans l'espace. Il est bien connu que la longueur de C est donnée par la formule

$$L = \int_a^b \operatorname{norm} \left(\frac{d}{dt} (r(t)) \right) dt$$

Ici r n'est pas un vecteur mais une expression complexe, donc la norme devient le module (valeur absolue si c'était dans les réels). Mais alors si M est un majorant de $|f(z)|$ sur C , on a

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(r(t)) r'(t) dt \right| \leq \int_a^b M |r'(t)| dt = M L.$$

Exemple: soit la fonction $f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites qu'à l'origine

En effet, comme $u = \sqrt{x^2+y^2}$ et $v = 0$, on a donc

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{d}{dy}(v) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tandis que} \quad \frac{d}{dy}(u) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{d}{dx}(v) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Par conséquent, cette fonction n'est pas analytique (en aucun point du plan). Si l'on calcule son intégrale curviligne entre les points (0, 0) et (1, 1) en prenant comme chemin le segment de droite et ensuite la parabole

$y = x^2$. on trouve 2 valeurs différentes:

$f(z) = |z|$; $ch1(t) := t+i \cdot t$; $ch2(t) := t+i \cdot t^2$ • Done

$$\int_0^1 \left(f(ch1(t)) \cdot \frac{d}{dt}(ch1(t)) \right) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$$

$$\int_0^1 \left(f(ch2(t)) \cdot \frac{d}{dt}(ch2(t)) \right) dt = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{\ln(\sqrt{2}+1) - 3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot i$$

► Cela n'arrive pas pour une fonction analytique. On a alors l'important **théorème de Cauchy-Goursat**: si f est analytique dans un "domain" U et si C est un contour fermé simple de U , alors

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Preuve : une preuve est facile à donner en utilisant le théorème de Green-Riemann (du cours de calcul à plusieurs variables: on supposera que les dérivées partielles de u et v sont aussi continues, ce qui s'avère en fait inutile mais facilite la preuve): on a, si C est un contour,

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + i v)(dx + i dy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

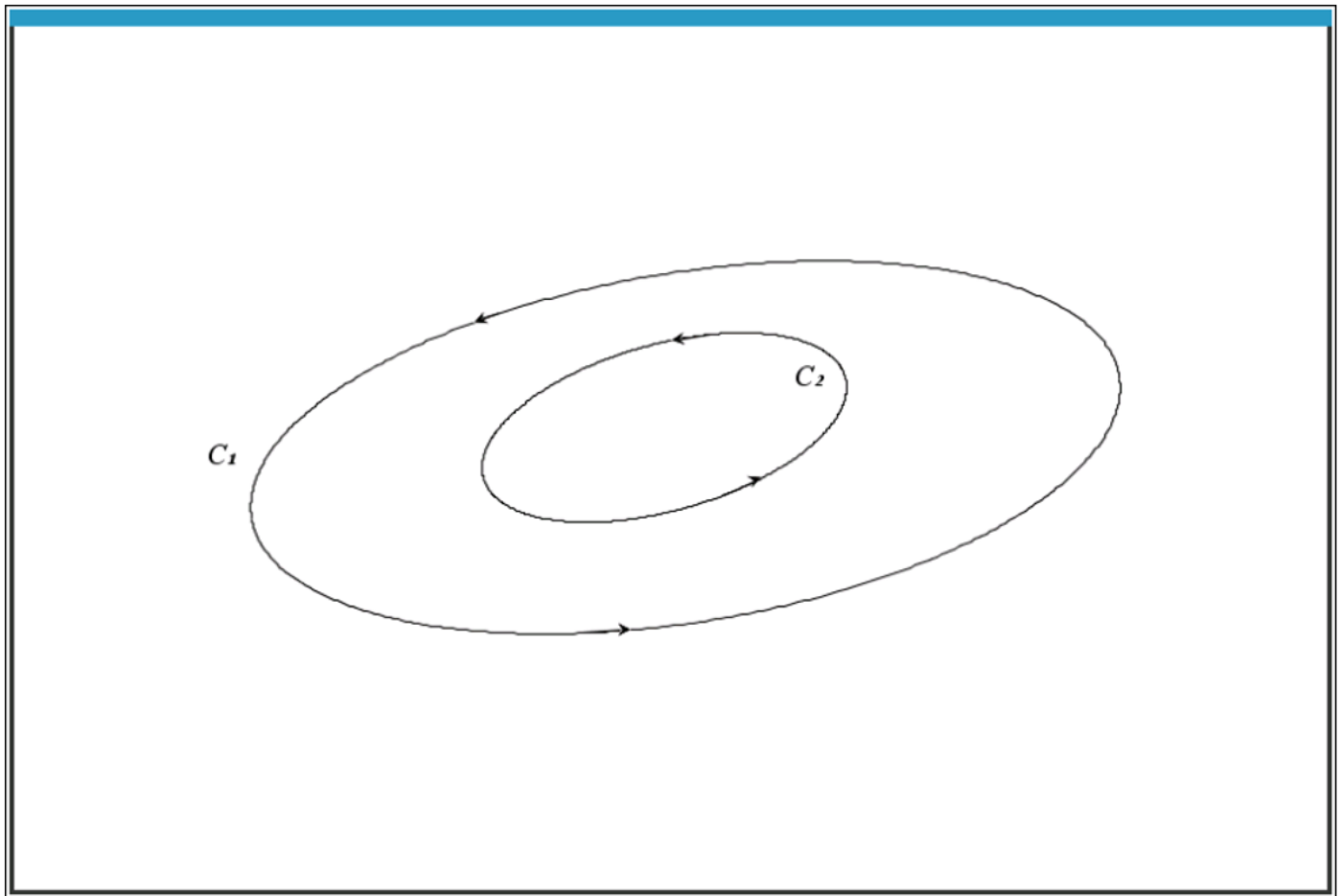
On applique le théorème de Green-Riemann qui dit que si les champs scalaires P et Q admettent des dérivées partielles premières continues sur et à l'intérieur d'un contour *fermé simple* C , alors si D désigne la région intérieure à C , on a

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Mais alors puisque ECR sont satisfaites, on a si C est un contour fermé simple,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u + iv)(dx + i dy) = \oint_C u dx + -v dy + i \oint_C v dx + u dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0 dA + i \iint_D 0 dA = 0. \end{aligned}$$

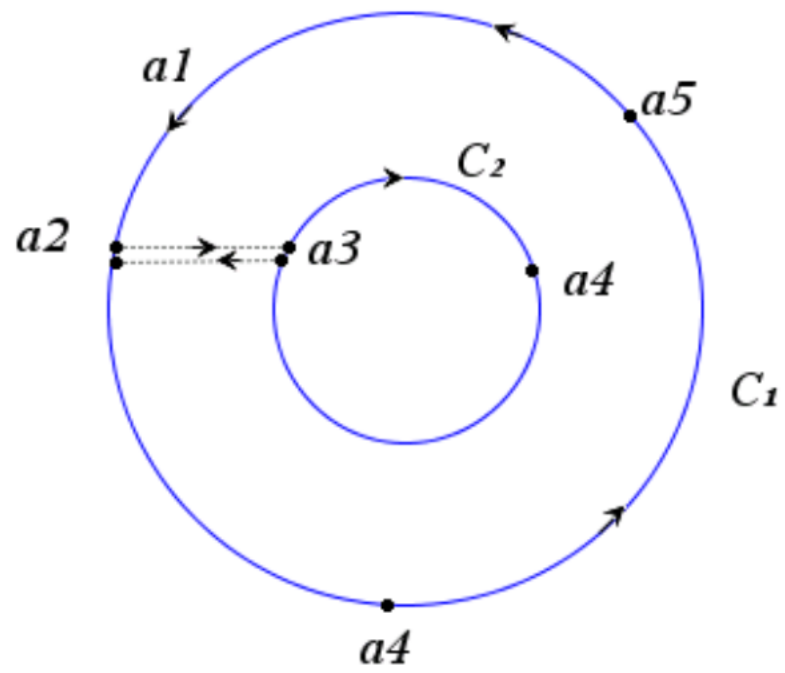
► Le théorème de Cauchy–Goursat nous permettra donc d'utiliser le "**principe de déformation des contours**" qui dit ceci: soit C_2 une courbe fermée simple entourant une autre courbe fermée simple C_1 :



Si f est analytique dans la région entre les deux courbes ("couronne" si les deux courbes de la figure ci-haut étaient des cercles). alors

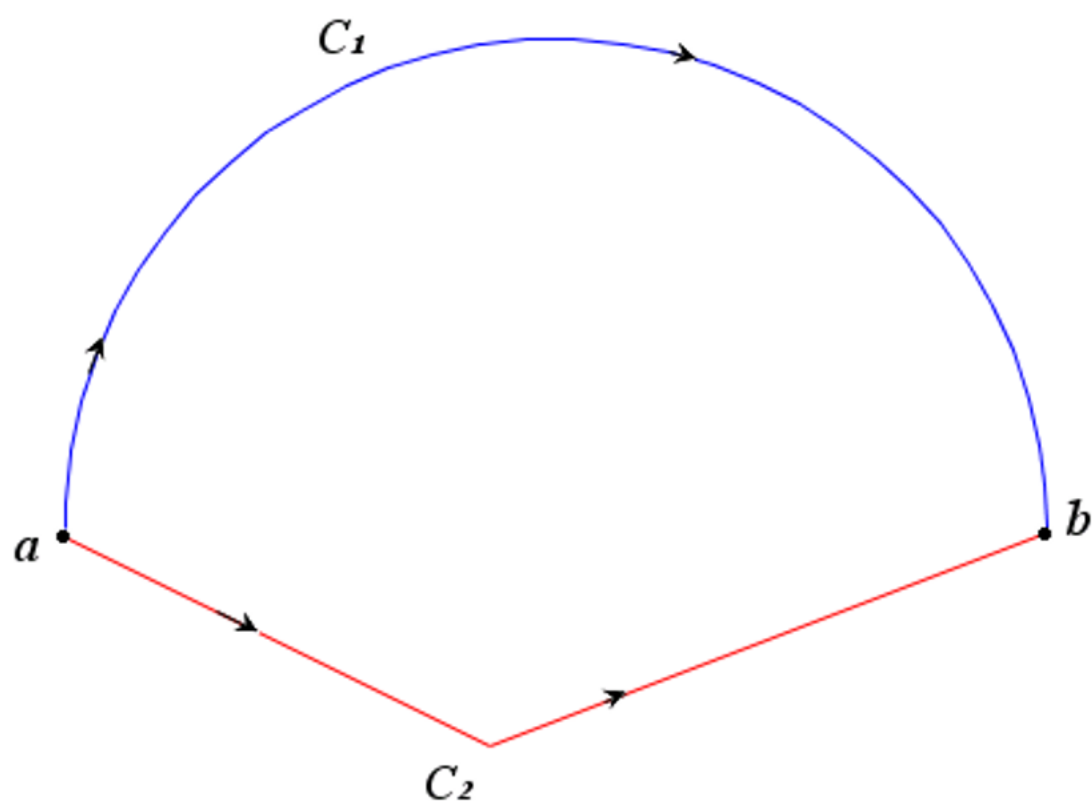
$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

En effet, il suffit de considérer le parcours fermé simple C qui consiste à suivre le chemin indiqué: on part du point a_1 sur C_1 et va en sens contraire des aiguilles d'une montre; rendu à a_2 , on suit le segment de droite en pointillés jusqu'à a_3 et suit maintenant C_1 en sens horaire pour revenir à a_3 et suivre le même segment de droite en pointillés mais en sens contraire jusqu'à a_2 . On poursuit ensuite sur C_1 vers a_4 , a_5 et retourne à a_1 pour terminer. Puisque l'intégrale curviligne sur le segment annule celle sur le segment en sens opposé et puisque C_1 était parcouru en sens horaire, le résultat suit. On illustre ici en ayant pris des cercles.



► Le théorème de Cauchy-Goursat implique aussi l'**indépendance du parcours** si f est analytique dans un domaine D . En effet, si deux parcours C_1 et C_2 joignent chacun les points a et b de D , alors il suffit de considérer le contour fermé simple C qui part de a en suivant C_1 jusqu'à b et continue sur C_2 en sens inversé pour retourner à a . Et on sait qu'on doit changer le signe d'une intégrale curviligne si l'on inverse le sens du parcours:

$$0 = \oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz \Rightarrow \int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2^-} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$



Développons maintenant une banque de fonctions usuelles.

3- La fonction Exp(z)

► Si $z \in \mathbb{C}$ alors c'est la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)$ qui est habituellement utilisée pour définir la **fonction**

exponentielle de z . Cette série converge pour tout z comme le montre le test du rapport. La convergence est même absolue puisque $\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!}$ et puisque la série (de nombres positifs)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|z|^n}{n!} \right) \text{ converge vers } \exp(|z|),$$

le critère de comparaison donne le résultat. La convergence est aussi uniforme sur tout ensemble compact (fermé borné) du plan complexe.

► En multipliant les séries de e^z et de e^w à l'aide du produit de Cauchy de deux séries et en utilisant la formule du binôme de Newton, on déduit l'importante règle

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w .$$

Le cas où $z = 0 + i \cdot y$ nous amène à la formule d'Euler, compte tenu des séries connues de \cos et de \sin et du fait que les puissances de i ne prennent que les valeurs $1, -1, i$ et $-i$.

$$e^{i \cdot y} = \cos(y) + i \sin(y) \cdot i$$

Ainsi la fonction $\exp(z)$ est "périodique" de période (complexe) $2 \cdot \pi \cdot i$

En particulier:

$$\left\{ e^{i \cdot \pi}, e^{i \cdot 2 \cdot n \cdot \pi} \right\} = \{ -1, 1 \}$$

► Rappelons les équations de Cauchy–Riemann: si une fonction $f = u + i \cdot v$ d'une variable complexe est dérivable en un point $z = x + i \cdot y$, alors en ce point on a nécessairement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Et la dérivée de $f(z)$ peut se calculer par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

ou encore par

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} .$$

En appliquant cela à la fonction e^z , on voit qu'elle est analytique dans tout le plan complexe et est sa propre dérivée. En effet

$$e^z = e^x \cdot e^{i \cdot y} = e^x \cdot \cos(y) + i \cdot e^x \cdot \sin(y) ,$$

donc

$$u(x,y) = e^x \cdot \cos(y) \quad \text{et} \quad v(x,y) = e^x \cdot \sin(y) .$$

Ainsi

$$\frac{d}{dz} (e^z) = e^z$$

4- Fonction $\text{Log}(z)$; fonction puissance générale

► Si $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, alors on définit le **logarithme** de z par

$$\text{Log } z = \ln(|z|) + i \cdot \text{Arg}(z).$$

Ici $\ln(|z|)$ désigne le logarithme naturel du module de z , donc comme d'habitude puisque $|z| > 0$ car z est non nul. "Arg(z)" est appelé l'argument de z et est choisi comme l'angle θ de la forme polaire de z avec la convention que

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi.$$

Dans Nspire, c'est la fonction "angle" et dans Derive, c'est "phase":

$$\text{angle}(\{-1, 1, -1+i, -1-i, 1-i, 1+i\}) \rightarrow \left\{ \pi, 0, \frac{3 \cdot \pi}{4}, \frac{-3 \cdot \pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$$

D'ailleurs, la forme polaire des nombres complexes s'obtient comme suit lorsque la format rectangulaire est choisi par défaut:

$$(1-i) \rightarrow \text{Polar} \rightarrow e^{\frac{-i \cdot \pi}{4}} \cdot \sqrt{2}$$

On peut faire l'inverse:

$$\left(\sqrt{2} \angle \frac{-\pi}{4} \right) \rightarrow 1-i$$

Note: lorsqu'un nombre complexe $z = x + i \cdot y$ est écrit sous forme polaire

$$z = r \cdot e^{i \cdot \theta},$$

les formules utilisées sont les suivantes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et pour } \theta \text{ c'est}$$

$$\text{angle}(x+i \cdot y) = \frac{\pi \cdot \text{sign}(y)}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Dans Nspire "Log" est toujours entré par "ln", sinon "log" est le logarithme dans la base 10. Dans Derive, par "log" ou par "ln". Quelques valeurs:

$$\{ \ln(1), \ln(-1), \ln(i), \ln(1-i), \ln(5-12 \cdot i) \} = \left\{ 0, \pi \cdot i, \frac{\pi}{2} \cdot i, \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot i, \ln(13) + \frac{2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) - \pi}{2} \cdot i \right\}$$

$$\log_{10} \left(\left\{ 1, 10, \frac{1}{10}, 100 \right\} \right) = \{ 0, 1, -1, 2 \}$$

$$\log_a(x) = \log_a(x)$$

$$\left(\log_a(x) \right) \cdot \ln = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Quelques calculs provenant de Derive.

#1: $\text{PHASE}(1 - i)$

#2: $-\frac{\pi}{4}$

#3: $\text{LN}(-1)$

#4: $\pi \cdot i$

#5: $\text{LOG}(-1)$

#6: $\pi \cdot i$

#7: $\text{LN}(5 - 12 \cdot i)$

#8: $\text{LN}(13) + i \cdot \left(2 \cdot \text{ATAN}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{2} \right)$

Notez que $\frac{2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) - \pi}{2} = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{2}$ (prouvez-le!).

► Fait: la fonction Log est analytique dans l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C}: z \neq 0, \arg(z) \neq \pi\}$ et on a

$$\frac{d}{dz}(\text{Log}(z)) = \frac{1}{z}$$

En effet, pour démontrer cela, on procède habituellement en utilisant la forme polaire et les équivalents (en forme polaire) des équations de Cauchy-Riemann. Restons sous forme cartésienne et utilisons les équations de Cauchy-Riemann: on a

$$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i \cdot \arg(z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + i \cdot \left(\frac{\pi \cdot \text{sign}(y)}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right).$$

Remarquons que le terme $\frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(y)$ est une constante (possiblement 0 puisque lorsque y vaut 0,

alors l'argument vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$), on peut donc prendre pour u l'expression

$$u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{et prendre pour } v \text{ l'expression} \quad v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Et les équations de Cauchy-Riemann sont bien satisfaites:

$$\frac{d}{dx} \left(\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \right) - \frac{d}{dy} \left(\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right) = 0$$

.

$$\frac{d}{dy} \left(\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \right) + \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right) = 0$$

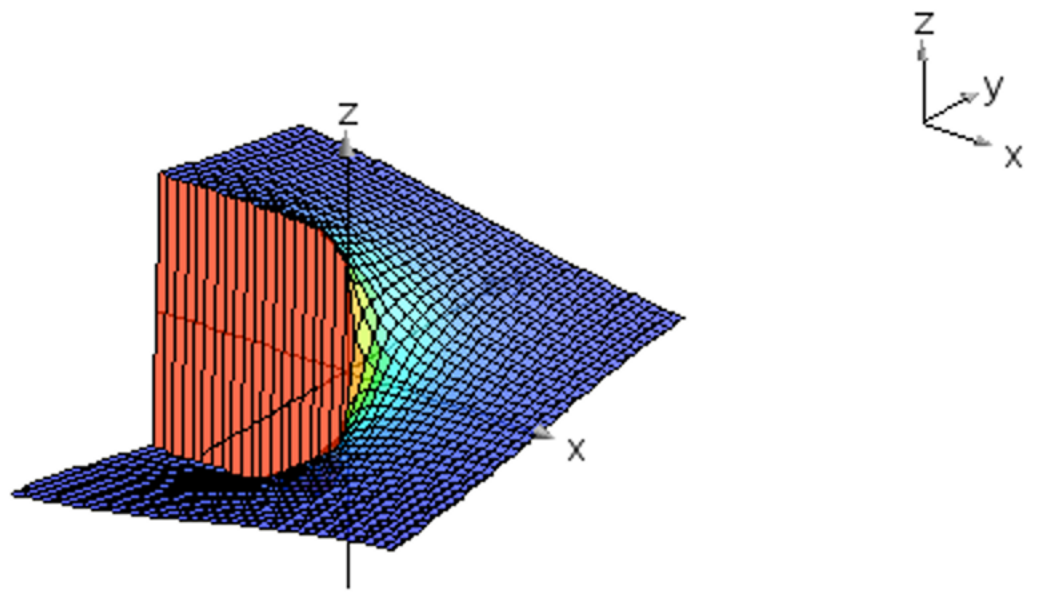
Ainsi la dérivée de $\text{Log}(z)$ vaut

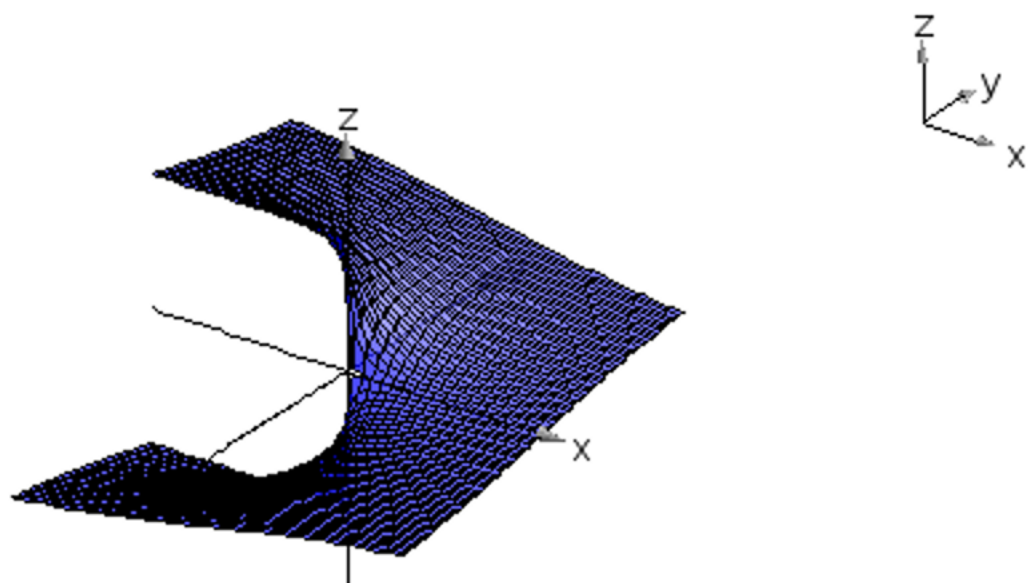
$$\frac{d}{dx} \left(\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \right) + i \cdot \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i$$

Cela est bien $1/z$ puisque

$$\frac{1}{x+i \cdot y} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i.$$

La page suivante montre le graphe 3D de la fonction $\arg(z)$. Cette fonction est continue le long de l'axe réel positif (nous avons augmenté la résolution pour le voir) mais discontinue sur l'axe réel négatif (La discontinuité est reliée à cause de la résolution). En utilisant le graphisme paramétrique, on peut faire mieux. Voir le graphe "amélioré".





► Finalement, si $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, on définit z exposant w par

$$z^w = e^{w \cdot \text{Log}(z)}$$

Exemples:

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$(2+4 \cdot i)^w = 20^{\frac{w}{2}} \cdot \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot w - \frac{\pi \cdot w}{2}\right) - 20^{\frac{w}{2}} \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot w - \frac{\pi \cdot w}{2}\right) \cdot i$$

► **La formule de De Moivre:** si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^n = \cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta).$$

En effet,

$$(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^n = (e^{i \cdot \theta})^n = e^{n \cdot i \cdot \theta} = e^{i \cdot n \cdot \theta} = \cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)$$

Cela permet de résoudre des équations du type $z^n = w$ où w est un nombre complexe donné.

En effet, il suffit d'utiliser la forme polaire: si $w = R \cdot e^{i \cdot \varphi}$ et si l'on pose $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$, alors la formule de De Moivre implique que

$$r^n = R \quad \text{et} \quad n \cdot \theta = \varphi + 2 \cdot k \cdot \pi.$$

On en déduit facilement que

$$r = \sqrt[n]{R} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

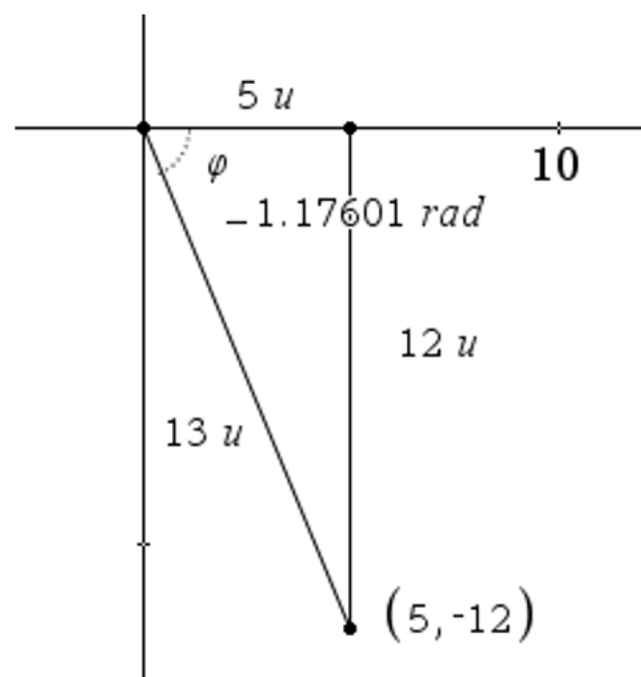
Exemple: résolvons l'équation $z^2 = 5 - 12 \cdot i$.

On devrait trouver ceci:

$$\text{cSolve}(z^2=5-12 \cdot i, z) \rightarrow z=3-2 \cdot i \text{ or } z=-3+2 \cdot i$$

On place le nombre complexe dans le plan $5 - 12 \cdot i$ et on voit que $R = 13$ et

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx -1.176$$



Les 2 solutions sont alors $\sqrt{13} \cdot e^{i \cdot \varphi/2}$ et $\sqrt{13} \cdot e^{i \cdot (\varphi+2\pi)/2} = -\sqrt{13} \cdot e^{i \cdot \varphi/2}$.

Maintenant l'angle $\varphi/2$ est aussi dans le quatrième quadrant, son cosinus est donc positif et son sinus négatif.

De plus, les identités trigonométriques

$$\cos(\alpha)^2 = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha)^2 = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

et le triangle ci-haut permettent d'écrire que

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+5/13}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-5/13}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Mais alors les 2 solutions sont $\sqrt{13} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{13}} - i \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = 3 - 2 \cdot i$ et $-3 + 2 \cdot i$.

On note que les 2 solutions ne sont pas conjuguées l'une de l'autre: c'était une équation polynomiale mais à coefficients complexes.

Une autre façon de résoudre peut être d'y aller avec un système de 2 équations polynomiales à 2 inconnues. En effet, posant $z = x + i \cdot y$, on veut $z^2 = 5 - 12 \cdot i$.

On égalise les parties réelle et imaginaire et fait résoudre le système:

$$\text{solve} \left(\begin{cases} \text{real}((x+i \cdot y)^2) = 5 \\ \text{imag}((x+i \cdot y)^2) = -12 \end{cases}, \{x, y\} \right) \rightarrow x = -3 \text{ and } y = 2 \text{ or } x = 3 \text{ and } y = -2$$

► Notons, si z est un nombre complexe non nul, que nous avons toujours $e^{\text{Log}(z)} = z$.

En effet: $e^{\text{Log}(z)} = e^{\ln(|z| + i \cdot \text{Arg}(z))} = e^{\ln(|z|)} \cdot e^{i \cdot \text{Arg}(z)} = |z| \cdot e^{i \cdot \text{Arg}(z)} = z$

Par contre il est faux en général qu'on a $\text{Log}(e^z) = z$. Par exemple

$$\ln(e^0) \neq 0$$

$$\ln(e^{2 \cdot \pi \cdot i}) \neq 0$$

Cela nous amène à parler du "unwinding number".

5- "Unwinding Number"

► Si $z = x + i \cdot y$ est un nombre complexe, ce "unwinding number" est un nombre entier défini par la

fonction "kappa" $\mathcal{K}(z)$ tel que $\text{Log}(e^z) = z + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathcal{K}(z)$

Puisque, par définition, on a $\text{Log}(w) = \ln(|w|) + i \cdot \text{Arg}(w)$, alors

$$\text{Log}(e^z) = \ln(|e^z|) + i \cdot \text{Arg}(e^z) = \ln(e^x) + i \cdot \text{Arg}(e^{i \cdot y}) = x + i \cdot \text{Arg}(e^{i \cdot y}) .$$

Par conséquent $x + i \cdot y + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathcal{K}(z) = x + i \cdot \text{Arg}(e^{i \cdot y})$, d'où nous tirons l'expression de kappa:

$$\mathcal{K}(z) = \frac{\text{Arg}(e^{i \cdot y}) - y}{2 \cdot \pi}$$

Nous en faisons la définition dans Nspire:

$$\mathbf{kappa}(z) := \frac{\text{angle}(e^{i \cdot \text{imag}(z)}) - \text{imag}(z)}{2 \cdot \pi} \quad \bullet \text{ Done :}$$

$$\mathbf{kappa}(\{-2-15 \cdot i, -3+5 \cdot i, 0, 3+4 \cdot i, i, 2-6 \cdot i, 7+13 \cdot i\}) \bullet \{2., -1., 0., -1., 0., 1., -2.\}$$

Remarque: Nspire utilise "real" (resp. "imag") pour la partie réelle (resp. imaginaire). Dans ce qui suit, nous utiliserons "Re" (resp. "Im") comme en analyse complexe.

► Fait: $K(z) = -n$ si $(2 \cdot n - 1)\pi < \text{Im}(z) \leq (2 \cdot n + 1)\pi$.

En effet si $(2 \cdot n - 1)\pi < \text{Im}(z) \leq (2 \cdot n + 1)\pi$, alors $-(2 \cdot n + 1)\pi \leq -y < -(2 \cdot n - 1)\pi$ et puisque $-\pi < \text{Arg}(e^{i \cdot y}) \leq \pi$

on somme membre à membre les 2 inégalités et obtient

$(-n-1) \cdot 2 \cdot \pi < \text{Arg}(e^{i \cdot y}) - y < (-n+1) \cdot 2 \cdot \pi$ et le résultat est donc clair.

► Quelques conséquences:

$K(z) = 0 \Leftrightarrow -\pi < \text{Im}(z) \leq \pi$. Cela est clair.

Si maintenant, on remplace z par $\text{Log}(z)$, alors

$K(\text{Log}(z)) = 0 \Leftrightarrow -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$, ce qui est toujours le cas.

$K(\text{Log}(z) + \text{Log}(w))$ ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou -1. En effet, on a forcément

$-2\pi < \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) \leq 2\pi$ et $\text{Im}(\text{Log}(z) + \text{Log}(w)) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$

Et dans les inégalités $(2 \cdot n - 1)\pi < \text{Im}(z) \leq (2 \cdot n + 1)\pi$, les seules valeurs de n qui font qu'on se retrouve entre -2π et 2π sont celles égales à 0, -1 et 1.

6- Formules

► L'importance du "unwinding number" est qu'il permet d'obtenir les formules exactes concernant les propriétés des log et des puissances. Voici un théorème regroupant des résultats contenus dans l'article de Helmer Aslaksen du National University of Singapore qu'on retrouve au chapitre 5 du livre édité par Michael Wester "Computer Algebra Systems: A Practical Guide". L'expression "unwinding number" est due aux collègues Corless et Jeffrey: on pourra consulter leur article de 1996 sur internet.

► Faits: on a les résultats suivants, incluant des conséquences et des cas particuliers intéressants.

$$1) \operatorname{Log}(e^z) = z + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(z).$$

En effet, c'est par définition. Alors

$$\operatorname{Log}(e^z) = z \Leftrightarrow -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi.$$

En particulier, c'est toujours le cas si $z \in \mathbb{R}$.

D'ailleurs Nspire "sait" cela:

$$\ln(e^z) = z$$

$$\ln(e^{z-}) = \ln(e^z).$$

$$2) \operatorname{Log}(z \cdot w) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)).$$

En effet, on a

$$\operatorname{Log}(z \cdot w) = \operatorname{Log}(e^{\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)})$$

et le résultat suit de 1) avec z remplacé par $\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$.

2a) Conséquence. Ainsi

$$\operatorname{Log}(z \cdot w) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) \Leftrightarrow -\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq \pi.$$

Ce qui est toujours le cas si au moins l'un des deux facteurs est réel positif.

2b) Cas particulier. Si $z = w$, alors

$$\operatorname{Log}(z^2) = 2 \cdot \operatorname{Log}(z) \Leftrightarrow -\pi < 2 \cdot \operatorname{Arg}(z) \leq \pi.$$

En particulier, c'est toujours vrai si z est réel positif.

$$3) \operatorname{Log}(z^w) = w \cdot \operatorname{Log}(z) + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(w \cdot \operatorname{Log}(z)).$$

En effet,

$$\operatorname{Log}(z^w) = \operatorname{Log}(e^{w \cdot \operatorname{Log}(z)})$$

et le résultat suit de 1) avec z remplacé par $w \cdot \operatorname{Log}(z)$

3a) Conséquence. On en déduit que

$$\operatorname{Log}(z^w) = w \cdot \operatorname{Log}(z) \Leftrightarrow -\pi < \ln(|z|) \cdot \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Arg}(z) \cdot \operatorname{Re}(w) \leq \pi$$

Ce qui sera toujours le cas si z est positif et w réel. Ou encore si $-1 < w \leq 1$.

3b) Cas particulier: on choisit $w = -1$. Donc

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Log}(z) + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(-\operatorname{Log}(z)).$$

Ainsi

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Log}(z) \Leftrightarrow K(-\operatorname{Log}(z)) = 0$$

i.e. $\Leftrightarrow z$ n'est pas situé sur l'axe réel négatif.

$$4) (z \cdot w)^a = z^a \cdot w^a \cdot \exp\left(a \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathcal{K}(\text{Log}(z) + \text{Log}(w))\right).$$

En effet,

$$(z \cdot w)^a = \exp(a \cdot \text{Log}(z \cdot w)).$$

On utilise 2) et ainsi

$$(z \cdot w)^a = \exp(a \cdot \text{Log}(z \cdot w)) = \exp\left(a \cdot \left(\text{Log}(z) + \text{Log}(w) + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathcal{K}(\text{Log}(z) + \text{Log}(w))\right)\right) = z^a \cdot w^a \cdot e^{a \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathcal{K}(\text{Log}(z) + \text{Log}(w))}$$

4a) Cas particulier: si a est un entier, on aura toujours

$$(z \cdot w)^a = z^a \cdot w^a.$$

4b) Si a n'est pas un entier, alors

$$(z \cdot w)^a = z^a \cdot w^a \Leftrightarrow -\pi < \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) \leq \pi.$$

Le cas $a = 1/2$ est intéressant. On a alors

$$\sqrt{z \cdot w} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w} \cdot \exp\left(i \cdot \pi \cdot \mathcal{K}(\text{Log}(z) + \text{Log}(w))\right).$$

On en déduit que:

$$4c) \sqrt{z \cdot w} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w} \Leftrightarrow -\pi < \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) \leq \pi.$$

Ce qui sera toujours le cas si les deux facteurs sont positifs.

4d) Si l'on prend $w = z$, alors

$$\sqrt{z^2} = z \Leftrightarrow -\pi < 2 \cdot \text{Arg}(z) \leq \pi.$$

Ce qui sera toujours le cas si z est réel positif.

$$5) (z^a)^b = z^{a \cdot b} \cdot \exp(b \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(a \cdot \text{Log}(z))) .$$

En effet

$$(z^a)^b = e^{b \cdot \text{Log}(z^a)} = e^{b \cdot (a \cdot \text{Log}(z) + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(a \cdot \text{Log}(z)))} = z^{a \cdot b} \cdot \exp(b \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \cdot K(a \cdot \text{Log}(z)))$$

5a) Conséquence: si b est un entier, alors

$$(z^a)^b = z^{a \cdot b} \quad \forall z$$

5b) Conséquence: si $b = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $\text{gcd}(p, q) = 1$, alors

$$(z^a)^b = z^{a \cdot b} \Leftrightarrow (2 \cdot k \cdot q - 1) \cdot \pi < \ln(|z|) \cdot \text{Im}(a) + \text{Arg}(z) \cdot \text{Re}(a) \leq (2 \cdot k \cdot q + 1) \cdot \pi$$

pour un $k \in \mathbb{Z}$. En effet,

$$b \cdot K(a \cdot \text{Log}(z)) = \frac{p}{q} \cdot K(a \cdot \text{Log}(z)) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid p \cdot K(a \cdot \text{Log}(z)) = k \cdot q$$

5c) Conséquence: si b est irrationnel, alors

$$(z^a)^b = z^{a \cdot b} \Leftrightarrow -\pi < \ln(|z|) \cdot \text{Im}(a) + \text{Arg}(z) \cdot \text{Re}(a) \leq \pi$$

5d) Cas particulier: on prend $a = -1$, $b = 1/2$. Alors

$$\sqrt{1/z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot K(-\text{Log}(z))} .$$

Donc $\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ si z est réel positif ou encore non réel ($\text{Im}(z) \neq 0$)

5e) Cas particulier: on considère $(e^z)^{1/2}$.

$$\text{Donc } \sqrt{e^z} = (e^z)^{1/2} = e^{z/2} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot K(z \cdot \text{Log}(e))} = e^{z/2} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot K(z)} .$$

Donc si $K(z)$ est un entier pair, on aura $\sqrt{e^z} = e^{z/2}$.

Ainsi $\sqrt{e^z} = e^{z/2} \Leftrightarrow (4 \cdot k - 1) \cdot \pi < \text{Im}(z) \leq (4 \cdot k + 1) \cdot \pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ce qui est toujours vrai pour un réel z .

7- Résolutions d'équations exponentielles et logarithmiques

► D'après ce qui précède, les solutions des équations exponentielles et logarithmiques sont:

$$\text{cSolve}(e^z = w, z) \rightarrow z = \ln(w) + 2 \cdot n \cdot \pi \cdot i$$

$$\text{cSolve}(\ln(z) = w, z) \rightarrow z = e^w \text{ and } -\pi < \text{imag}(w) \leq \pi$$

Exemples:

$$\text{cSolve}(e^z = 3, z) \rightarrow z = \ln(3) + 2 \cdot n \cdot \pi \cdot i$$

$$\text{cSolve}(e^z = 3 \cdot i, z) \rightarrow z = \ln(3) + \left(2 \cdot n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot i$$

$$\text{cSolve}(\ln(z) = 3, z) \rightarrow z = e^3$$

$$\text{cSolve}(e^z = 3 \cdot i, z) \rightarrow z = \ln(3) + \left(2 \cdot n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot i$$

$$\text{cSolve}(\ln(z) = 1 + 4 \cdot i, z) \rightarrow \text{false}$$

$$\begin{aligned} \text{cSolve}\left((2+i)^z = 4+5 \cdot i, z\right) &\rightarrow \frac{8 \cdot n \cdot 5 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \pi + \ln(41) \cdot \ln(5) - 2 \cdot \left(2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \pi\right) \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{(\ln(5))^2 + 4 \cdot \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} \\ &+ \frac{4 \cdot n \cdot 5 \cdot \ln(5) \cdot \pi - 2 \cdot \ln(41) \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(5) \cdot \left(2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \pi\right)}{(\ln(5))^2 + 4 \cdot \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} \cdot i \end{aligned}$$

$$(2+i)^z \rightarrow \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot z\right) \cdot 5^{\frac{z}{2}} + \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot z\right) \cdot 5^{\frac{z}{2}} \cdot i$$

8- Fonctions trigonométriques, hyperboliques

► Les 6 fonctions trigonométriques et leurs réciproques s'étendent aussi aux nombres complexes.
Avec les mêmes formules de dérivation que dans le cas d'une variable réelle.

Posons

$$z := x + i \cdot y \quad \cdot \quad x + y \cdot i$$

Alors:

$$\sin(z) \quad \cdot \quad \sin(x) \cdot \cosh(y) + \cos(x) \cdot \sinh(y) \cdot i$$

$$\cos(z) \quad \cdot \quad \cos(x) \cdot \cosh(y) - \sin(x) \cdot \sinh(y) \cdot i$$

$$\tan(z) \quad \cdot \quad \frac{4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^{2 \cdot y}}{4 \cdot (\cos(x))^2 \cdot e^{2 \cdot y} + (e^{2 \cdot y} - 1)^2} + \frac{(e^{2 \cdot y} - 1) \cdot (e^{2 \cdot y} + 1)}{4 \cdot (\cos(x))^2 \cdot e^{2 \cdot y} + (e^{2 \cdot y} - 1)^2} \cdot i$$

$$\csc(z) \quad \cdot \quad \frac{1}{\sin(z)}$$

$$\sec(z) \quad \cdot \quad \frac{1}{\cos(z)}$$

$$\cot(z) \quad \cdot \quad \frac{1}{\tan(z)} \quad \triangle$$

Quant aux réciproques, voici les 2 plus souvent utilisées:

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(z) & \quad \cdot \quad \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2 \cdot x + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 1}}{2} \right) \\ & \quad + \ln \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 1)} \cdot (x^2 + 2 \cdot x + y^2 + 1) + x^2 + y^2 - 1 \right)} + \sqrt{x^2 + 2 \cdot x + y^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 1}}{2} \right) \\ & \quad \cdot \text{sign}(y) \cdot i \end{aligned}$$

$$\tan^{-1}(z) \quad \cdot \quad \frac{\pi \cdot \text{sign}(x) - \tan^{-1} \left(\frac{y+1}{x} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{y-1}{x} \right)}{2} + \frac{\ln \left(\frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \right)}{4} \cdot i$$

► Les 6 fonctions hyperboliques s'étendent aussi aux complexes. Avec les mêmes formules de dérivation que dans le cas d'une variable réelle.

$$\sinh(z) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + \cosh(x) \cdot \sin(y) \cdot i$$

$$\cosh(z) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + \sinh(x) \cdot \sin(y) \cdot i$$

$$\tanh(z) = \frac{e^{4 \cdot x} - 1}{e^{4 \cdot x} + 2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot (2 \cdot (\cos(y))^2 - 1) + 1} + \frac{4 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \sin(y) \cdot \cos(y)}{e^{4 \cdot x} + 2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot (2 \cdot (\cos(y))^2 - 1) + 1} \cdot i$$

$$\operatorname{csch}(z) = \frac{1}{\sinh(z)}$$

$$\operatorname{sech}(z) = \frac{1}{\cosh(z)}$$

$$\operatorname{coth}(z) = \frac{1}{\tanh(z)} \triangle$$

Quant aux réciproques: voici les 2 plus utilisées:

$$\sinh^{-1}(z) = \operatorname{sign}(x) \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + y^2 - 1 \right)} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}}{2} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + (y+1)^2} - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}}{2} \right) \cdot i$$

$$\tanh^{-1}(z) = \frac{\ln \left(\frac{x^2 + 2 \cdot x + y^2 + 1}{x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 1} \right)}{4} - \frac{\tan^{-1} \left(\frac{x+1}{y} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{y} \right) - \pi \cdot \operatorname{sign}(y)}{2} \cdot i$$

9– La formule intégrale de Cauchy

► Rappelons au départ, si C est une courbe du plan complexe dont on connaît une paramétrisation donnée par une fonction $r(t)$ avec le paramètre t dans l'intervalle $[a, b]$, alors on posera

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(r(t)) r'(t) dt$$

► Rappelons aussi l'**inégalité ML** démontrée à la section 2. Si L est la longueur de C , si M est un majorant de $|f(z)|$ sur C , alors

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M L.$$

► **Le théorème de Cauchy–Goursat** (aussi démontré au début du résumé). Si f est une fonction analytique dans un domaine (un ouvert connexe de plan complexe) D , si C est un contour *fermé simple* contenu dans D , alors

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

(On a aussi indiqué que le chemin est fermé et que le sens du parcours est celui contraire des aiguilles d'une montre avec la flèche sur l'intégrale curviligne).

Exemple: l'intégrale de l'expression $\frac{\sin(e^{z^2})}{z^2+4}$ le long du cercle $|z - 5 \cdot i| = 1$ vaut 0 puisque les 2

singularités sont à l'extérieur du cercle.

► Quelques conséquences du dernier théorème: **le principe de déformation des contours, l'existence d'une primitive et l'extension aux domaines simplement connexes.** Nous avons démontré ces résultats à la section 2 sauf l'existence d'une primitive, il est facile de montrer, en

utilisant le quotient différentiel que si f est analytique dans un "domaine" D , alors il existe une fonction analytique F telle que $F' = f$ et telle que si z_0 et z_1 sont deux points dans D reliés par un quelconque chemin C de D , alors

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

En fait, F est simplement définie par (à cause de l'indépendance du parcours)

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

On calcule alors la différence

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z).$$

D'une part, on a

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi$$

et d'autre part, le fait que D soit un domaine et que Δz va tendre vers 0 nous permettent de suivre le segment de droite allant de z à $z + \Delta z$ et donc d'écrire que, pour z fixé,

$$\Delta z = \int_z^{z+\Delta z} 1 d\xi \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\xi$$

Mais alors

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right|$$

Soit $\varepsilon > 0$. f étant analytique, elle est continue, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\xi - z| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

et l'inégalité ML permet de conclure.

► **Un important résultat** Si C est un contour fermé simple, si z_0 est un point à l'intérieur du contour, alors

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^m} dz = \begin{cases} 2\pi i, & m = 1 \\ 0, & m \in \mathbb{Z} - \{1\} \end{cases}$$

En effet, le principe de déformation des parcours permet de remplacer le contour par le cercle

$$z = z_0 + \varepsilon \cdot e^{i \cdot t}, 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

en choisissant ε suffisamment petit. Mais alors l'intégrale vaut

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon^m \cdot e^{m \cdot i \cdot t}} \cdot \varepsilon \cdot i \cdot e^{i \cdot t} \right) dt = \frac{i}{\varepsilon^{m-1}} \cdot \int_0^{2\pi} e^{(1-m) \cdot i \cdot t} dt = \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot i, & m = 1 \\ 0, & m \in \mathbb{Z} - \{1\} \end{cases}$$

► La formule intégrale de Cauchy

Si f est une fonction analytique dans un domaine D , si C est un contour fermé simple contenu dans D , si z_0

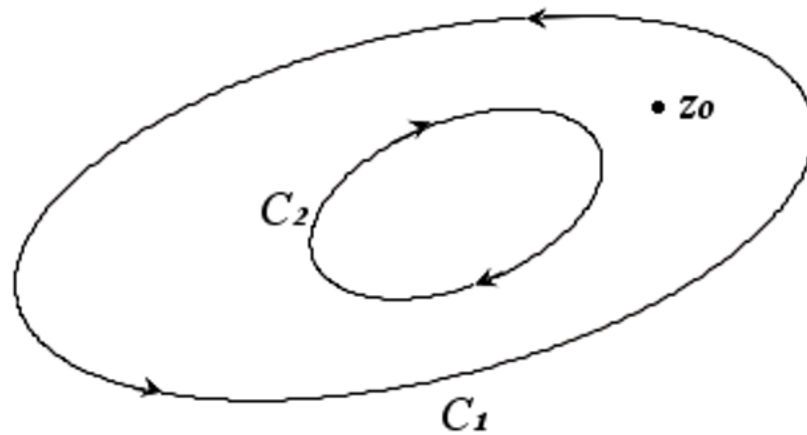
est un point intérieur à C , alors toutes les dérivées de f existent en et sont données par

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Les cas particulier où $n = 0$ et 1 sont donc:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = f'(z_0)$$

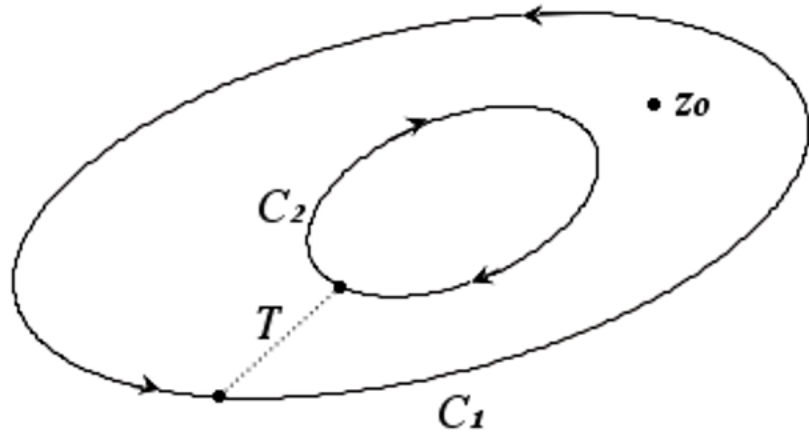
Remarque: le résultat est aussi valide si D est *multiplément connexe* et si C consiste en l'union de courbes fermées, l'une extérieure, les autres intérieures, deux à deux disjointes (les courbes intérieures doivent être parcourues dans le sens horaire). Par exemple:



La formule intégrale de Cauchy prend alors la forme suivante (remarquez le sens du parcours de chaque courbe)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

En effet, comme nous l'avons expliqué à la section 2, on fait un petit chemin \mathcal{T} qui sera parcouru deux fois, en sens contraire à chaque fois, ce qui aura pour effet d'annuler la contribution de l'intégrale curviligne.



Preuve de la formule intégrale de Cauchy: on va se contenter de démontrer la formule de base.

On a donc une fonction f qui est analytique sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple C et on a un point z_0 intérieur à C . On veut montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0)$$

Par le principe de déformation des contours, on remplace C par un petit cercle Γ de rayon r centré en z_0 . Puisque

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

on a donc

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) &= \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz + \oint_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz. \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de démontrer que la dernière intégrale est nulle. La continuité de f en z_0 (à cause de son analyticité) et l'inégalité ML vont permettre de conclure. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$|z-z_0| < \delta < r \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2\pi}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} |z-z_0| < \delta < r &\Rightarrow \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \oint_{\Gamma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} dz \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} dz \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{2\pi r}{r} = \epsilon. \end{aligned}$$

Exemple: calculons l'intégrale de

$$g(z) := \frac{1}{(z^4 - 1)^2} \quad \text{Done}$$

le long d'un chemin fermé simple entourant 1 mais ni -1, ni i , ni $-i$. Alors, on peut écrire

$$\frac{1}{(z^4 - 1)^2} = \frac{1}{(z^2 + 1)^2 \cdot (z + 1)^2}$$

et le rôle de $f(z)$ sera joué par

$$ff(z) := \frac{1}{(z^2 + 1)^2 \cdot (z + 1)^2} \quad \text{Done.}$$

Ainsi, par la formule intégrale de Cauchy, l'intégrale vaut

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{1!} \cdot \frac{d}{dz}(ff(z))|_{z=1} = \frac{-3 \cdot \pi \cdot i}{8} \quad \text{!}$$

Vérifions notre réponse (numériquement) en prenant un cercle, centré en 1 et de rayon 1:

$$cer := 1 + e^{i \cdot t} = \cos(t) + 1 + \sin(t) \cdot i$$

$$nInt(g(cer) \cdot \frac{d}{dt}(cer), t, 0, 2 \cdot \pi) = -1.1781 \cdot i$$

$$approx\left(\frac{-3 \cdot \pi \cdot i}{8}\right) = -1.1781 \cdot i$$

Une belle application de la formule intégrale de Cauchy est qu'il permet de représenter une fonction analytique par une série de puissances. Voir la section suivante.

10- Séries de Taylor, séries de Laurent

► Théorème (séries de Taylor)

Si f est une fonction analytique dans un disque ouvert D centré en z_0 , alors pour chaque z dans D ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z-z_0)^n \right)$$

La preuve montrera que la série converge vers $f(z)$ partout dans D . Ainsi, l'intervalle de convergence sera $|z - z_0| < R$ où R est le rayon du disque ouvert. Ce rayon sera (au moins) aussi grand que la distance à la singularité la plus proche de z_0 . On peut aussi montrer que la représentation est unique (dans le disque donné). Puisque le théorème de Laurent généralisera celui de Taylor, nous attendons avant de donner la preuve.

Exemples: on retrouvera les séries connues d'un cours de calcul. Ainsi

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z^n}{n} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right), \quad |z| < \infty$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \dots, \quad |z| < 1$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot z^{2 \cdot n + 1} \right) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

$$\text{taylor}(\cos(z), z, 6) \rightarrow 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720}$$

$$\text{taylor}(\sinh(z), z, 7) \rightarrow z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^7}{5040}$$

$$\text{taylor}(\cosh(z), z, 6) \approx 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720}$$

$$\text{taylor}(\tan(z), z, 10) \approx z + \frac{z^3}{3} + \frac{2 \cdot z^5}{15} + \frac{17 \cdot z^7}{315} + \frac{62 \cdot z^9}{2835}$$

Pour ce dernier exemple, puisque $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ et que, à partir de l'origine, la singularité la plus

proche est en $\pm \pi/2$, alors la série converge pour $|z| < \frac{\pi}{2}$.

Remarque: la série géométrique (somme finie) s'avère aussi importante. Puisque

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

alors

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

► Théorème (séries de Laurent)

Soit $0 \leq r < R \leq \infty$ et soit f est une fonction analytique dans la couronne $r < |z - z_0| < R$. Alors pour chaque z dans la couronne, on a la représentation suivante

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \cdot (z-z_0)^n)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

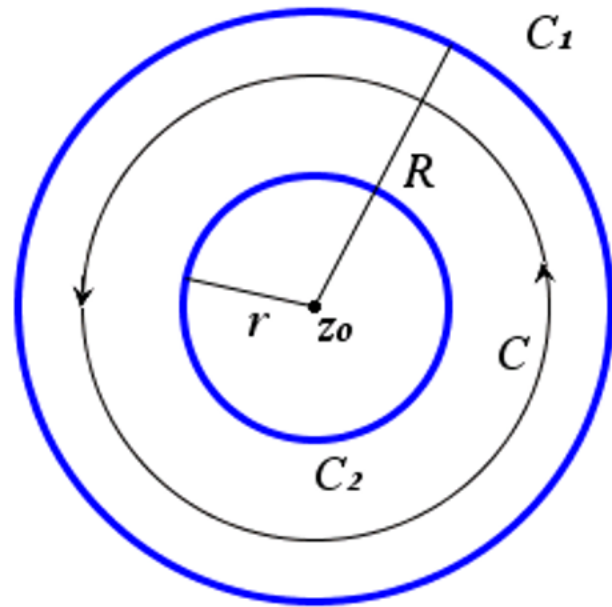
Ici, C est un quelconque chemin fermé dans la couronne qui englobe z_0 (parcouru dans le sens direct). Voir la figure plus bas. Cette représentation est unique dans une couronne donnée et les c_n sont appelés les *coefficients de Laurent* de f .

Note: on peut aussi écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot (z-z_0)^n) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \right)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw$$



De plus, vu l'unicité, on n'a à peu près jamais à utiliser la formule intégrale pour calculer les coefficients. On procède plutôt par utilisation de séries (de Taylor) connues et manipulations algébriques (e.g. fractions partielles).

Preuve du théorème de Laurent: on applique la formule intégrale de Cauchy pour les domaines multiplement connexes: on retourne voir la figure et on va utiliser comme variable d'intégration le symbole ξ . Alors si z est un point dans la couronne, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Maintenant, nous écrivons que

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)}$$

Si z est dans la couronne et si ξ est sur C_1 , on a

$$|z - z_0| < |\xi - z_0|$$

Mais alors, se servant de la série géométrique (finie), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} d\xi = \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)} \left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n + \frac{1}{\xi - z} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{n+1}\right) d\xi = \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)} d\xi + (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + (z - z_0)^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} d\xi + \dots + \\ & (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + (z - z_0)^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \end{aligned}$$

On vient donc de voir que (et se servant du principe de déformation des contours pour remplacer C_1 par C)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k + R_n(z) \text{ où}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \text{ et } R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

On va montrer que le reste tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si r_C est le rayon de C choisi comme cercle, si M est un majorant de $\left| \frac{f(\xi)}{w - z} \right|$ sur C , alors

$$|R_n(z)| = \left| \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi} M \frac{1}{r_C^{n+1}} 2\pi r_C = 2\pi r_C M \left| \frac{z - z_0}{r_C} \right|^{n+1}.$$

Et cela tend bien vers 0 puisque

$$\left| \frac{z - z_0}{r_C} \right| < 1.$$

Maintenant si z est toujours dans la couronne et si ξ est sur C_1 , on a

$$|\xi - z_0| < |z - z_0|$$

Alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{z - z_0 - (\xi - z_0)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(z - z_0) \left(1 + \frac{\xi - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n + \frac{1}{z - \xi} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^{n+1}\right)} d\xi = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + RR_n(z) \quad \text{où} \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) (\xi - z_0)^{k-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-k+1}} d\xi \\ \text{et } RR_n(z) &= \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^{n+1}} \oint_C \frac{(\xi - z_0)^{n+1}}{z - \xi} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Notez qu'à la fin on a encore utilisé la déformation des contours pour revenir à C . Reste à démontrer que le reste tend vers 0 et il s'agit encore d'une application de l'inégalité *ML*.

Remarque: une série de Laurent nous dit donc que si f est analytique dans la couronne $r < |z - z_0| < R$, alors elle admet la représentation

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot (z-z_0)^n) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \right)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw$$

Mais si, en plus f est aussi analytique dans tout le disque $|z - z_0| < R$, alors les b_n sont nuls par le théorème de Cauchy-Goursat et la formule intégrale de Cauchy donne

$$a_n = \frac{d^n}{dz^n} (f)|_{z=z_0}$$

et la série de Laurent n'est rien d'autre que la série de Taylor de f .

Exemples: choisissons $z_0 = 0$ pour chacun des exemples suivants mais différentes couronnes seront possibles.

1) Dans la couronne $0 < |z| < \infty$, la série de Laurent de $\sin(z)/z^4$ est simplement

$$\frac{1}{z^4} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6 \cdot z} + \frac{z}{120} - \frac{z^3}{5040} + \dots, \quad 0 < |z| < \infty$$

La fonction "series" confirme:

$$\text{series} \left(\frac{\sin(z)}{z^4}, z, 3 \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6 \cdot z} + \frac{z}{120} - \frac{z^3}{5040}$$

Si C est un chemin fermé simple entourant l'origine, on pouvait calculer l'intégrale de $\sin(z)/z^4$ le long de C en utilisant la formule intégrale de Cauchy mais maintenant on voit, puisque $b_1 = -1/6$, que l'intégrale vaut $2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi \cdot i}{3}$.

2) Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{2-3 \cdot z}$. Si $0 < |z| < 2/3$, alors on a

$$f(z) = \frac{1}{2-3 \cdot z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3 \cdot z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot z}{2} + \frac{9 \cdot z^2}{4} + \frac{27 \cdot z^3}{8} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot z}{4} + \frac{9 \cdot z^2}{8} + \frac{27 \cdot z^3}{16} + \dots \quad |z| < \frac{2}{3}$$

Cela est confirmé de toutes façons par la fonction "Taylor" (et aussi "series").

$$\text{taylor}\left(\frac{1}{2-3 \cdot z}, z, 3\right) = \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot z}{4} + \frac{9 \cdot z^2}{8} + \frac{27 \cdot z^3}{16}$$

Par contre, si l'on se place dans la couronne $|z| > 2/3$, alors $|2/(3 \cdot z)| < 1$ et donc

$$f(z) = \frac{1}{2-3 \cdot z} = \frac{-1}{3 \cdot z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3 \cdot z}} = \frac{-1}{3 \cdot z} \cdot \left(1 + \frac{2}{3 \cdot z} + \frac{4}{9 \cdot z^2} + \frac{8}{27 \cdot z^3} + \dots \right) \\ = -\frac{1}{3 \cdot z} - \frac{2}{9 \cdot z^2} - \frac{4}{27 \cdot z^3} - \frac{8}{81 \cdot z^4} - \dots, \quad |z| > \frac{2}{3}$$

Ainsi, le long du cercle unité, l'intégrale de f vaut $-\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot i = -\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{3}$ puisque $b_1 = -1/3$.

Évidemment, on pouvait calculer cette intégrale avec la formule intégrale de Cauchy.

3) Soit maintenant la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2 - z^3} = \frac{1}{z^2 \cdot (1-z)}$. Dans la couronne $0 < |z| < 1$, la série

de Laurent est

$$\frac{-1}{z^2} \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

Dans la couronne $1 < |z| < \infty$, on a alors $|1/z| < 1$ et on peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z^3} = \frac{1}{z^3 \cdot \left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \dots, \quad 1 < |z| < \infty$$

C'est donc la série de Laurent de f dans cette couronne. En particulier, l'intégrale de f le long du cercle $|z| = 2$ vaut 0 puisque $b_1 = 0$. L'utilisation de la formule intégrale de Cauchy aurait été possible après avoir fait des fractions partielles.

4) Finalement, soit la fonction

$$f(z) = \frac{3 \cdot z - 1}{z^2 - 5 \cdot z + 6} = \frac{8}{z - 3} - \frac{5}{z - 2}.$$

Le fichier Nspire associé disponible sur le site Moodle ou ma page personnelle donne les détails des affirmations suivantes.

Dans la couronne $0 < |z| < 2$, on trouvera la série

$$-\frac{1}{6} + \frac{13 \cdot z}{36} + \frac{71 \cdot z^2}{216} + \frac{277 \cdot z^3}{1296} + \dots,$$

Dans la couronne $2 < |z| < 3$, on trouvera la série

$$\dots - \frac{80}{z^5} - \frac{40}{z^4} - \frac{20}{z^3} - \frac{10}{z^2} - \frac{5}{z} - \frac{8}{3} - \frac{8 \cdot z}{9} - \frac{8 \cdot z^2}{27} - \frac{8 \cdot z^3}{81} \dots$$

Dans la couronne $3 < |z| < \infty$, on trouvera la série

$$\frac{3}{z} + \frac{14}{z^2} + \frac{52}{z^3} + \frac{176}{z^4} + \dots$$

11– Théorème des résidus

► Soit z_0 une singularité *isolée* d'une fonction f . C'est-à-dire que f n'est pas analytique en z_0 mais qu'il existe un voisinage de z_0 à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres singularités que z_0 . Par exemple, 0 n'est pas une singularité isolée de l'expression

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

puisque tout voisinage de 0 contient éventuellement des points de la forme $1/k$ avec k entier non nul et les singularités de cette expression sont justement 0 et $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/4, \dots$

Donc, si z_0 est une singularité isolée d'une fonction f , on peut trouver un disque $0 < |z - z_0| < R$ à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres singularités que z_0 . On développe f en série de Laurent **dans cette "couronne"**, obtenant

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot (z-z_0)^n) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \right)$$

où les coefficients sont calculés par les formules intégrales données précédemment. En particulier, le coefficient

b_1 s'appelle dans ce cas le *résidu* de f en $z = z_0$ et si C est un contour fermé simple de cette couronne, entourant z_0 alors

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1.$$

Ce résidu est souvent dénoté par

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Cela amène les définitions données à la page suivante.

Définitions: classification des singularités.

La singularité isolée z_0 est dite *apparente* ou *amovible* si tous les b_n sont nuls.

Elle est dite *essentielle* si une infinité de b_n sont non nuls.

Elle est dite un *pôle d'ordre N* s'il existe un entier positif N tel que

$$b_N \neq 0 \quad \text{mais} \quad b_{N+1} = b_{N+2} = b_{N+3} = \dots = 0.$$

Si $N = 1$, on dit *pôle simple*, si $N = 2$, on dit *pôle double*.

► Fait: si z est un pôle simple de f , alors

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \cdot f(z) \right]$$

En effet, on développe f en série de Laurent dans une couronne de la forme

$0 < |z - z_0| < R$ pour obtenir que $0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + a_2 \cdot (z-z_0)^2 + \dots$$

dont on tire

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \cdot f(z) \right]$$

► Fait: soit une fonction f de la forme $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont analytiques en z_0 ,

où $q(z_0) = 0$, où $p(z_0) \neq 0$ et où $q'(z_0) \neq 0$,

Alors z_0 est un pôle simple de f et le résidu b_1 vaut

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

En effet, on vient de voir que

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \cdot f(z) \right]$$

Par hypothèse, la série de Taylor de q en z_0 est

$$q(z) = (z-z_0) \cdot q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2 \cdot q''(z_0)}{2!} + \dots$$

et donc le résidu de f en $z = z_0$ vaut (à cause de la continuité de q en z_0)

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \cdot f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \cdot \frac{p(z)}{(z-z_0) \cdot q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2 \cdot q''(z_0)}{2!} + \dots} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

► Fait: avec la même procédure, il en découle la formule suivante qui peut être utilisée pour trouver le résidu en un pôle d'ordre m d'une fonction quelconque g dont z_0 est une singularité isolée. Cette formule est incluse dans la librairie `kit_ets_mb`.

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m \cdot g \right) \right)$$

► **Théorème des résidus** Soit C un contour fermé simple, soit f analytique sur et à l'intérieur de C sauf en un nombre fini de singularités isolées z_1, z_2, \dots, z_n .

Soit B_k le résidu en $z = z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Alors

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n B_k.$$

En résumé, on utilise le théorème des résidus afin de calculer une intégrale curviligne d'une fonction f le long d'un chemin fermé (simple) C .

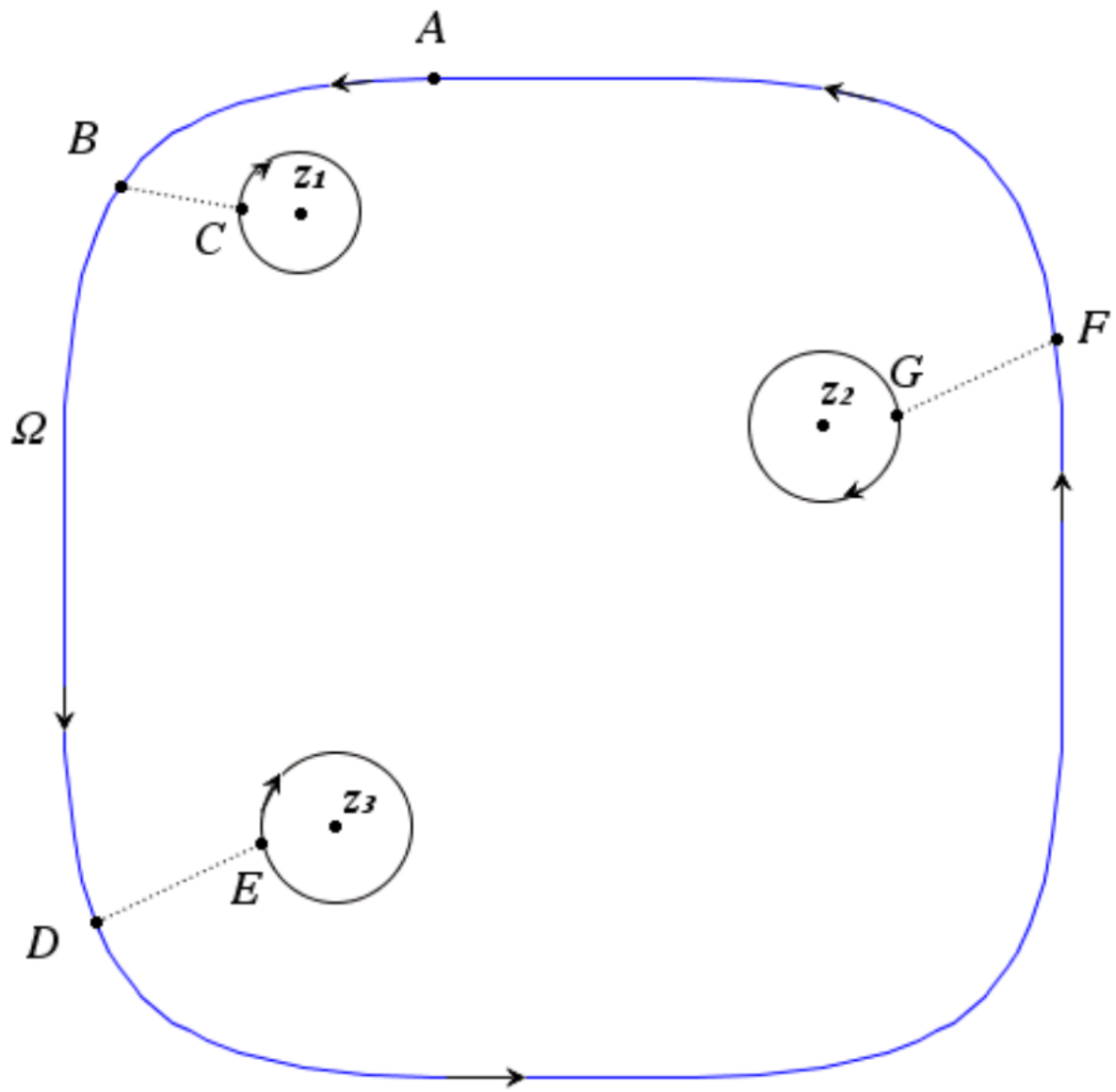
Preuve du théorème des résidus: puisque chaque singularité est isolée, on fait un petit cercle C_k autour de chacune d'elles (disons qu'on appelle r_k le rayon de ce petit cercle centré en z_k) et considère le parcours fermé simple Ω formé de C et en suivant les points indiqués dans la figure suivante (on va illustrer pour 3 singularités afin de simplifier): donc on part du point A et se rend au point B . On suit ensuite le segment de droite allant vers C et parcourt le petit cercle en sens horaire pour revenir à B et poursuivre sur le chemin Ω . On fait de même pour chacune des singularités qui sont toutes isolées. Puisque la fonction f est analytique dans chaque "couronne" $\{0 < |z - z_k| < r_k\}$, on sait donc que

$$\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i B_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Mais alors, par le théorème de Cauchy-Goursat pour les domaines multiplement connexes, on a, puisque les intégrales curvilignes sur les segments de droite s'annulent puisque parcourues en sens contraire à chaque fois,

$$0 = \oint_{\Omega} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - 2\pi i \sum_{k=1}^n B_k \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n B_k.$$

ce qui donne le résultat.



Nous illustrons maintenant avec de quelques exemples.

Exemple 1: calculons l'intégrale curviligne de $\tan(z)$ le long de la courbe fermée simple illustrée à la page suivante. Cette courbe englobe 3 des singularités isolées de $\tan(z)$, à savoir –

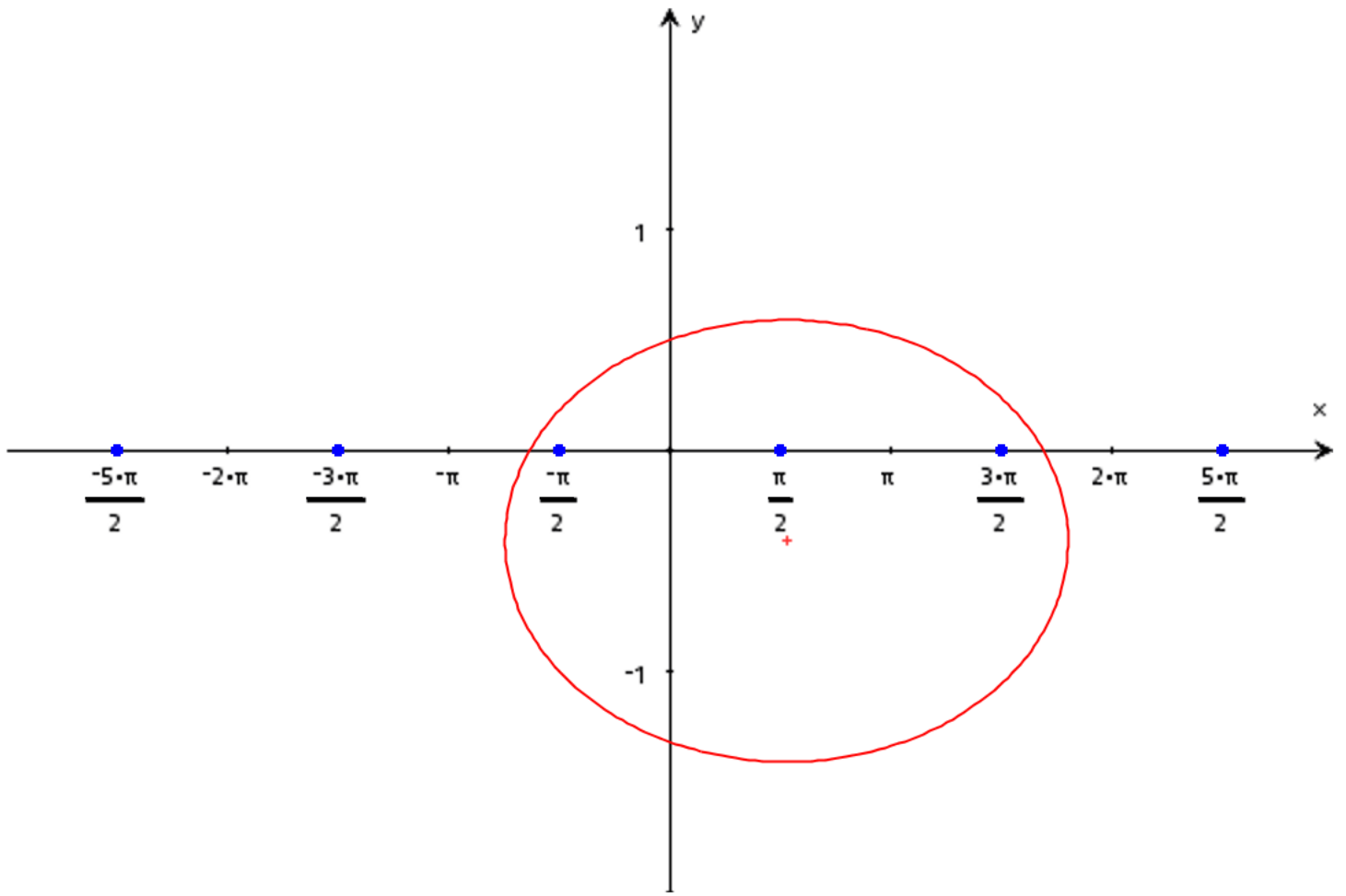
$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ qui sont toutes des pôles simples. Chaque résidu vaut:

$$\text{res}_{\tan(z), z, \frac{-\pi}{2}} = -1$$

$$\text{res}_{\tan(z), z, \frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\text{res}_{\tan(z), z, \frac{3\pi}{2}} = -1$$

L'intégrale vaut donc $-6\pi i$.



Exemple 2: calculons l'intégrale curviligne de la fonction

$$f1(z) := \frac{\sin(z)}{z^2+4} + e^{\frac{1}{z}} \quad \cdot \text{Done}$$

le long du cercle $|z| = 3$. En premier, voyons quelle réponse (numérique) est attendue.

$$\text{cercle1} := 3 \cdot e^{i \cdot t} \quad \cdot 3 \cdot \cos(t) + 3 \cdot \sin(t) \cdot i$$

$$\text{attendue1} := \text{nInt}\left(f1(\text{cercle1}) \cdot \frac{d}{dt}(\text{cercle1}), t, 0, 2 \cdot \pi\right) \quad \cdot 1.60221\text{E-}13 + 17.6773 \cdot i \quad \triangle$$

La valeur exacte de l'intégrale est $2 \cdot \pi \cdot i \cdot (B1 + B2 + B3)$

avec $B1$ le résidu en $z = 0$, $B2$ le résidu en $z = 2 \cdot i$ et $B3$ le résidu en $z = -2 \cdot i$.

$\pm 2 \cdot i$ sont des pôles simples, on peut facilement calculer leur résidu respectif de différentes façons:
par exemple

$$\text{series}\left(\frac{\sin(z_-)}{z_-^2+4}, z_-, 1, 2 \cdot i\right) \quad \cdot \frac{\sinh(2)}{4 \cdot (z_- - 2 \cdot i)} - \frac{(z_- - 2 \cdot i) \cdot (5 \cdot e^4 - 13) \cdot e^{-2}}{128} - \frac{(3 \cdot e^4 + 5) \cdot e^{-2}}{32} \cdot i$$

$$\text{On voit donc que } B2 = \frac{\sinh(2)}{4}$$

Notre fonction `res_pole` confirme:

$$\text{kit_ets_mb}\backslash\text{res_pole}\left(\frac{\sin(z)}{z^2+4}, z, 2 \cdot i, 1\right) \rightarrow \frac{\sinh(2)}{4}$$

Pour $B3$, on a

$$\text{kit_ets_mb}\backslash\text{res_pole}\left(\frac{\sin(z)}{z^2+4}, z, -2 \cdot i, 1\right) \rightarrow \frac{\sinh(2)}{4}$$

Pour le résidu en $z = 0$, on doit passer par la série de Laurent pour le terme $\exp(1/z)$ qui est évidemment

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2 \cdot z^2} + \frac{1}{6 \cdot z^3} + \frac{1}{24 \cdot z^4} + \dots$$

On voit donc que $B1 = 1$.

Mais alors l'intégrale vaut

$$2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(\frac{\sinh(2)}{4} + \frac{\sinh(2)}{4} + 1 \right) \rightarrow \frac{(e^4 + 4 \cdot e^2 - 1) \cdot e^{-2 \cdot \pi} \cdot i}{2}$$

$$\text{approx}\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(\frac{\sinh(2)}{4} + \frac{\sinh(2)}{4} + 1 \right)\right) \rightarrow 17.6773 \cdot i$$

Exemple 3: calculons l'intégrale curviligne de la fonction

$$f(z) := \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 + z} \quad \rightarrow \text{Done}$$

le long du cercle $|z| = 2$.

En premier, voyons quelle réponse (numérique) est attendue.

$$\text{cercle2} := 2 \cdot e^{i \cdot t} \rightarrow 2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t) \cdot i$$

$$\text{attendue2} := \text{nInt}\left(f(\text{cercle2}) \cdot \frac{d}{dt}(\text{cercle2}), t, 0, 2 \cdot \pi\right) \rightarrow 2.67035\text{E-}15 - 5.553\text{E-}14 \cdot i \quad \triangleleft$$

On peut douter que la réponse exacte est 0.

Les singularités isolées de la fonction sont en 0, -1, toutes intérieures au parcours. -1 est un pôle simple et le résidu vaut

$$\text{kit_ets_mb}\backslash\text{res_pole}(f(z), z, -1, 1) \rightarrow \sin(1)$$

0 est une singularité essentielle et on s'attend donc, si la réponse exacte est effectivement zéro, que le résidu en $z = 0$ soit égal à $-\sin(1)$. Montrons-le. On a si $0 < |z| < 1$,

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2+z} = \frac{\sin(1/z)}{z \cdot (z+1)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z} \cdot \sin(1/z) =$$

$$\frac{1}{z} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \dots) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \frac{1}{7! \cdot z^7} + \dots \right)$$

Il faut, dans le produit des 2 longues parenthèses précédentes, aller voir le coefficient constant puisqu'on a le facteur $1/z$ devant la première parenthèse. En faisant le décompte, on trouve que ce coefficient est

$$-1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} - \dots$$

Ce qui est manifestement $-\sin(1)$. On peut aussi s'en convaincre en prenant un petit cercle (rayon $1/2$ par exemple) centré en 0 et en calculant la valeur du résidu par une intégrale:

$$\text{petit_cercle} := \frac{1}{2} \cdot e^{i \cdot t} \cdot \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2} \cdot i$$

$$\text{nInt}\left(\text{f2}(\text{petit_cercle}) \cdot \frac{d}{dt}(\text{petit_cercle}), t, 0, 2 \cdot \pi\right) \rightarrow -5.46637\text{E-}14 - 5.28712 \cdot i \triangle$$

$$\text{approx}(2 \cdot \pi \cdot i \cdot -\sin(1)) \rightarrow -5.28712 \cdot i$$

12– Un autre exemple sur LambertW

► La fonction LambertW est programmée dans la librairie `kit_ets_mb`. L'activité suivante nous donne non pas sa programmation mais plutôt un exemple de résolution "à la main" dans laquelle l'utilisation des nombres complexes, des graphiques, des parties réelles et imaginaires s'avère importante. De plus, on vérifie à la fin que les réponses trouvées sont confirmées par la fonction maison LambertW. Cette fonction possède la syntaxe

$\text{LambertW}(k, w)$ où $k \in \mathbb{Z}$ et où $w \in \mathbb{C}$ et donne les solutions de l'équation $w \cdot e^w = z$

On dénote souvent alors la solution par $W(z)$: $W(z) \cdot e^{W(z)} = z$

Seules les branches $k = 0$ et $k = -1$ procurent des valeurs réelles (lorsque $w \geq -1/e$). Toutes les autres branches sont à valeurs complexes. Plusieurs de ces détails ont été donnés dans le résumé 1.

Exemple: on donne maintenant un exemple suffisamment détaillé de résolution d'une équation. Le lecteur pourra aussi vérifier que Maple (avec sa fonction LambertW) et Mathematica (avec sa fonction ProductLog) résolvent instantanément cette équation.

Note exemple concerne l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^8$.

On peut tout de suite trouver des solutions réelles de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^8$ avec Nspire à l'aide de sa commande "solve":

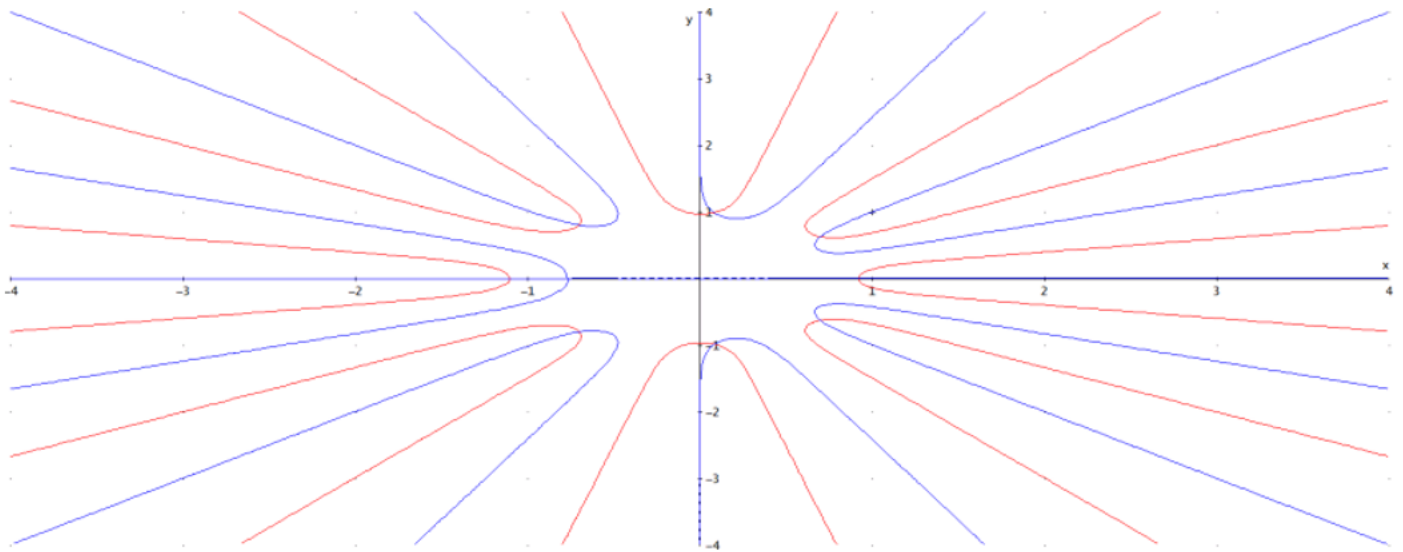
$$\text{solve}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^8, x\right) \rightarrow x = -43.5593 \text{ or } x = -1.1 \text{ or } x = 0.923132 \triangle$$

On va voir plus loin que ces 3 solutions sont en fait les 3 seules solutions réelles de l'équation. Quant aux solutions complexes, on peut les visualiser en utilisant le bon vieux "Derive" et son graphisme implicite 2D: en effet, remplaçant x par $x + i \cdot y$ et égalant les parties réelles et imaginaires, on fait tracer chacune des deux courbes suivantes dans le même plan:

$$\begin{aligned} \text{real}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+i \cdot y} = (x+i \cdot y)^8\right) &\rightarrow 2^{-x} \cdot \cos(\ln(2) \cdot y) = x^8 - 28 \cdot x^6 \cdot y^2 + 70 \cdot x^4 \cdot y^4 - 28 \cdot x^2 \cdot y^6 + y^8 \\ \text{imag}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+i \cdot y} = (x+i \cdot y)^8\right) &\rightarrow -2^{-x} \cdot \sin(\ln(2) \cdot y) = 8 \cdot x \cdot (x^2 - y^2) \cdot (x^4 - 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + y^4) \cdot y \end{aligned}$$

L'absence d'un véritable plotteur implicite 2D dans Nspire nous fait encore terriblement souffrir. Mais le bon vieux Derive n'est jamais très loin: page suivante.

On voit ici (en rouge) la courbe (comportant plusieurs branches) de la partie réelle de l'équation tandis qu'en bleu, c'est la partie imaginaire. Deux solutions réelles de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^8$ apparaissent déjà (faudrait modifier la fenêtre pour apercevoir la troisième qui vaut -43.5593). On voit aussi plusieurs solutions complexes. Nous allons les trouver via la fonction LambertW.



Trouvons donc les 3 solutions réelles en terme de LambertW. En prenant la "racine huitième" (réelle) de part et d'autre de l'équation, on obtient

$$x = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}} = \pm 2^{-x/8} = \pm e^{-\frac{x}{8} \cdot \ln(2)} \quad . \text{ Ou encore } x \cdot e^{\frac{x}{8} \cdot \ln(2)} = \pm 1.$$

$$\text{Donc on a obtenu } \frac{x \cdot \ln(2)}{8} \cdot e^{\frac{x}{8} \cdot \ln(2)} = \frac{\ln(2)}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{x \cdot \ln(2)}{8} \cdot e^{\frac{x}{8} \cdot \ln(2)} = -\frac{\ln(2)}{8}$$

Soit la forme $W(z) \cdot e^{W(z)} = z$. Remarquons que

$$\frac{-1}{e} < \frac{-\ln(2)}{8} < 0$$

Les 3 solutions réelles sont donc

$$x = \frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{lambertw}\left(0, \frac{\ln(2)}{8}\right) \quad \bullet \quad x = 0.923132$$

$$x = \frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{lambertw}\left(0, \frac{-\ln(2)}{8}\right) \quad \bullet \quad x = -1.1$$

$$x = \frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{lambertw}\left(-1, \frac{-\ln(2)}{8}\right) \quad \bullet \quad x = -43.5593$$

Quelques solutions complexes sont données en utilisant d'autres branches:

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(1, \frac{\ln(2)}{8}\right) \rightarrow -48.3519 + 44.8961 \cdot i$$

Par contre, afin de voir des solutions complexes près de l'origine, on utilise encore les branches 0 et -1 mais en choisissant les "racines huitièmes" complexes. Puisque

$$cZeros(z^8 - 1, z) \rightarrow \mathbf{ra} \rightarrow \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, i, -i, -1, 1 \right\}$$

alors on peut retourner au début de la solution et écrire que $\frac{x \cdot \ln(2)}{8} \cdot e^{\frac{x}{8} \cdot \ln(2)} = \alpha \cdot \frac{\ln(2)}{8}$

avec α parcourant l'ensemble \mathbf{ra} . Quelques valeurs au voisinage de l'origine et aperçues dans le graphe fourni par Derive.

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(0, \frac{\mathbf{ra}[1] \cdot \ln(2)}{8}\right) \rightarrow 0.700677 + 0.628264 \cdot i$$

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(0, \frac{\mathbf{ra}[2] \cdot \ln(2)}{8}\right) \rightarrow 0.700677 - 0.628264 \cdot i$$

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(0, \frac{\mathbf{ra}[3] \cdot \ln(2)}{8}\right) \rightarrow -0.697211 + 0.801446 \cdot i$$

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(0, \frac{\mathbf{ra}[4] \cdot \ln(2)}{8}\right) \rightarrow -0.697211 - 0.801446 \cdot i$$

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(0, \frac{\mathbf{ra}[5] \cdot \ln(2)}{8}\right) \rightarrow 0.08496 + 0.989023 \cdot i$$

$$\frac{8}{\ln(2)} \cdot \text{kit_ets_mb}\backslash\text{lambertw}\left(0, \frac{\mathbf{ra}[6] \cdot \ln(2)}{8}\right) \rightarrow 0.08496 - 0.989023 \cdot i$$

[]