Mat 805 : Compléments de mathématiques

Michel Beaudin
michel.beaudin@etsmtl.ca
Version du 27.02.2021

Résumé 4
Analyse de Fourier : équations aux dérivées partielles de la chaleur et des ondes, solution de d'Alembert. Transformations intégrales et applications aux É.D.P.

Voici les différentes sections de ce résumé.

1- Équation de la chaleur, problème de Dirichlet. Transformation sinus-finie

Commençons avec l'équation de la chaleur dans une tige de longueur L. Rappelons le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour} \quad 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) & \text{pour} \quad 0 \le x \le L \end{cases}$$

1.1 Théorème a) Dans le cas où l'on maintient les extrémités de la tige à la température 0, i.e.

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ pour } t \ge 0,$$

le problème admet la solution (formelle) suivante :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où $\lambda_n = \dfrac{c\,n\pi}{L}$ et $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ $(n \ge 1)$ (les b_n sont donc les coefficients de Fourier-sinus de f, prolongée de façon impaire).

b) Dans le cas où les extrémités de la tige sont isolées, donc si

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

alors la solution est

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n^2 t} \cos\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)$$

où $a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)\,dx$ $(n \geq 0)$ (les a_n sont donc les coefficients de Fourier-cosinus de *f*, prolongée de façon paire).

Preuve : nous savons (résumé 3) qu'il s'agit d'une application de la méthode de séparation des variables. On arrive encore à la conclusion qu'il faut choisir $\lambda < 0$ et prolonger *f* de façon impaire (resp. paire) lorsque les extrémités sont maintenues à 0 (resp. lorsque les extrémités sont isolées). Mais nous allons ici donner une preuve qui utilise la « transformation sinus-finie ».

En effet, nous savons que lorsqu'une fonction *f* est impaire et 2*L*-périodique, alors

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right) \quad \text{où} \quad f_s(n) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)dx \quad \left(= b_n\right) \quad (n \geq 1).$$

On appelle souvent les $f_s(n)$ la transformée sinus-finie de *f* : cela permet de définir un opérateur linéaire par $\Im_s\left[\,f\,\right] = f_s(n)$. On a une définition analogue pour la « transformée cosinus-finie ».

Prouvons la partie a). Posons $U(n,t) = \Im_s\left[u(x,t)\right]$. : donc

$$U(n,t) = \Im_s\left[u(x,t)\right] = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)\,dx\,.$$

Et prenons la transformée sinus-finie de chaque côté de notre É.D.P. :

$$\Im_s\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \Im_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

On a $\Im_s\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right] = \dfrac{dU}{dt}$ et les conditions aux frontières ainsi que l'intégration par parties vont permettre de calculer le côté droit (d'ailleurs cela montre l'importance de la technique d'intégration par parties : très utile dans des démonstrations ou encore très utile pour obtenir des formules de réduction).

$$\Im_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{L}\left(\left[\frac{\partial u}{\partial x}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L-\frac{n\pi}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\right)=$$

$$-\frac{n\pi}{L}\Im_c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{n\pi}{L}\cdot\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx=$$

$$-\frac{n\pi}{L}\cdot\frac{2}{L}\left(\left[u(x,t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L+\frac{n\pi}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)=$$

$$-\frac{n^2\pi^2}{L^2}U(x,t).$$

Donc, $\dfrac{dU}{dt}=-\dfrac{c^2\,n^2\,\pi^2}{L^2}U$ qui est une É.D. d'ordre un séparable. Ainsi $U(n,t)=k_n\,e^{-\lambda_n^{\,2}\,t}$ où $\lambda_n=\dfrac{c\,n\pi}{L}$. On trouve la valeur de la constante k_n en utilisant la condition initiale :

$$k_n=U(n,0)=\Im_s\left(u(x,0)\right)=\Im_s\left(f(x)\right)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=b_n.$$

D'où

$$u(x,t)=\Im_s^{-1}\left[U(n,t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}U(n,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,e^{-\lambda_n^{\,2}\,t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)..$$

Pour prouver la partie b) c'est tout à fait similaire sauf qu'on se sert du fait que lorsqu'une fonction *f* est paire et 2*L*-périodique, alors

$$f(x)\sim\frac{f_c(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f_c(n)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ \text{ où }\ f_c(n)=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt\quad(=a_n)\quad(n\geq 0).$$

On appelle souvent les $f_c(n)$ la transformée cosinus-finie de *f*. On aurait à considérer l'É.D.P.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{ avec les conditions aux frontières qui sont ici }\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0\,.$$

Et en prolongeant *f* de façon paire, la preuve serait similaire à la partie a) ♦

1.2 Remarque Évidemment, lorsque les extrémités sont isolées, la température va tendre vers $\dfrac{a_0}{2}$ lorsque $t\to\infty$, ce qui a du sens, puisqu'il n'y a pas de perte de chaleur. Alors que si les extrémités sont maintenues à 0°, alors la température va tendre vers 0° lorsque $t \to \infty$. Illustrons cela avec un exemple précis.

1.3 Exemple Pour le fer, la constante c^2 est 0.15 cm^2/s tandis que pour le béton, c'est 0.005 cm^2/s. Soit une tige de longueur L = 50 cm plongée dans la vapeur jusqu'à ce que sa température atteigne 100°C partout dans la tige. À t = 0, on isole sa surface latérale, donc la chaleur ne peut se diriger que par les extrémités. Ces dernières sont maintenues à la température 0°C, étant « collées » sur de la glace. Trouvons la température au point milieu de la tige après 30 minutes (1800 secondes) pour chacun des 2 matériaux. On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = 100, \quad u(0,t) = u(50,t) = 0$$

et alors $b_n = \dfrac{2}{50}\displaystyle\int_0^{50} 100 \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{200\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$ $(n \geq 1)$, $\lambda_n = \dfrac{cn\pi}{50}$. Ainsi

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}\right)e^{-(cn\pi/50)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Pour le fer, on trouve $u(25,\ 1800) \approx 43.85^\circ$ tandis que pour le béton, on trouve $u(25,\ 1800) \approx 100^\circ$, donc le béton est un excellent isolant ! Voici le graphe de u dans le cas du fer en ayant utilisé une somme partielle d'ordre 100 pour $u(x,\ t)$ pour différents instants de temps choisis. La variable x est donc située entre 0 et 50 et les instants choisis sont t = 100, 500, 1 000 et 5 000. Pour chacun des graphes, la température au point où x = 25 est indiquée.

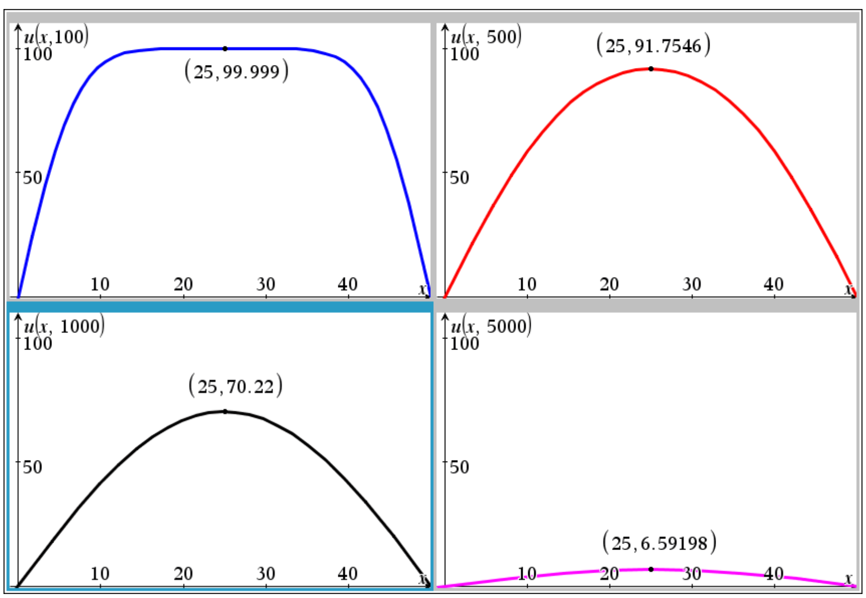

Figure 1.1

1.4 Remarque On retrouve encore le phénomène de Gibbs. En effet, même avec une somme partielle d'ordre très élevé, le graphique de la température dans la tige de fer de l'exemple 1.3 ne sera pas la droite horizontale y = 100 lorsque t = 0 même si $u(x, 0)$ = 100.

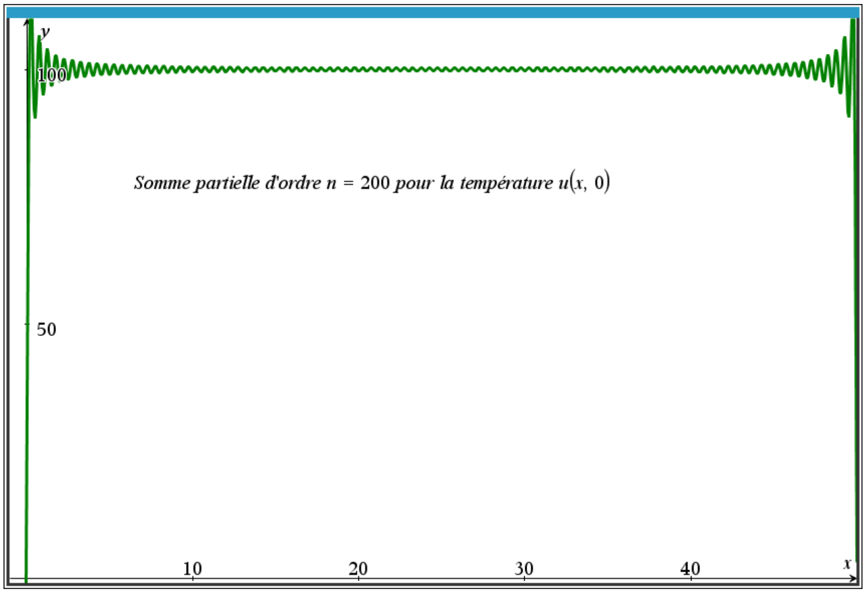

Figure 1.2

1.5 Exemple L'équation de la chaleur en 2 dimensions est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Supposons que la température ne varie plus en fonction du temps (« steady-state heat flow »), donc $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Lorsqu'on spécifie la valeur de u sur la frontière d'une région R du plan, on obtient ce qu'on appelle un <u>problème de Dirichlet</u>. Par exemple, soit $R = [0,\ a] \times [0,\ b]$ un rectangle dans le premier quadrant et considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(\underline{équation de Laplace})}$$

$$u(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{sur le côté supérieur} \\ 0 & \text{sur les 3 autres côtés} \end{cases}$$

En utilisant toujours la méthode de séparation des variables, il est facile de montrer que la solution du problème est donnée par

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

où $A_n^* = \dfrac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$. En effet, on pose $u(x,y)=F(x)G(y)$, ce qui mène aux É.D.O. $\dfrac{F''(x)}{F(x)}=-\dfrac{G''(y)}{G(y)}=c$ où c est une constante. Les solutions doivent exclure le cas où c = 0 et on trouve qu'une famille de fonctions de la forme

$$u(x,y)=\left(c_1 e^{cy}+c_2 e^{-cy}\right)\left(c_3\cos(cx)+c_4\sin(cx)\right)$$

satisfait l'É.D.P. mais en voulant satisfaire les conditions sur les trois côtés de la frontière du rectangle où l'on doit avoir 0, la réponse précédente prend alors la forme de

$$u_n(x,y)=\left(c_n e^{\frac{n\pi}{a}y}-c_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=2c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Cette dernière famille de fonctions ne pourra satisfaire la condition à la frontière de valoir $f(x)$ sur le côté supérieur que si l'on fait une série infinie (la linéarité de l'É.D.P. permet déjà de faire une somme finie des fonctions u_n ci-haut) en prolongeant f de façon impaire de période $2a$: donc il faut que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2c_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 2c_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)=b_n.$$

avec les « b_n » qui sont les coefficients de Fourier de f prolongée impaire de période $2a$. Donc la solution est la série

$$\begin{aligned}u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}2c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\sinh(n\pi b/a)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right).\end{aligned}$$

1.6 Exemple Solution bornée de l'équation de la chaleur dans une plaque semi-infinie. Utilisation de la transformée de Laplace.

Considérons le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi,\ y > 0,\ t > 0, \\ u(x,\ y,\ 0) = 0 \qquad \text{(condition initiale)} \\ u(0,\ y,\ t) = u(\pi,\ y,\ t) = 0,\ u(x,\ 0,\ t) = 100 \quad \text{(conditions aux frontières)} \end{cases}$$

Soit U la transformée de Laplace de u ($s \leftrightarrow t$) :

$$U(x,y,s) \leftrightarrow u(x,y,t).$$

Alors, en prenant la transformée de Laplace de chaque côté de l'É.D.P., on obtient

$$sU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Posons $\hat{U}(n,y,s) = \Im_s\left[U(x,y,s)\right]$. Alors on obtient

$$\int_0^\pi sU \sin(nx)\,dx = \int_0^\pi \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\sin(nx)\,dx + \int_0^\pi \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\sin(nx)\,dx$$

c'est-à-dire, en utilisant l'intégration par parties pour la première des 2 intégrales du membre de droite et omettant le facteur $2/\pi$,

$$s\hat{U} = -n^2\hat{U} + \frac{d^2\hat{U}}{dy^2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2\hat{U}}{dy^2} = \left(s+n^2\right)\hat{U}.$$

Mais alors $\hat{U}(n,y,s) = a\,e^{y\sqrt{n^2+s}} + b\,e^{-y\sqrt{n^2+s}}$ et puisqu'on cherche une solution bornée, on prend $a = 0$. Ainsi, $\hat{U}(n,y,s) = b\,e^{-y\sqrt{n^2+s}}$. Trouvons b. On a

$$b = \hat{U}(n,0,s) = \Im_s\left[U(x,0,s)\right] = \Im_s\left(£\left[u(x,0,t)\right]\right) = \Im_s\left(\frac{100}{s}\right) = \frac{100}{s}\cdot\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n},$$

où « £ » est les symbole utilisé pour désigner la transformée de Laplace. D'où

$$U(x,y,s) = \Im_s^{-1}\left[\hat{U}(n,y,s)\right] = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\left(1-(-1)^n\right)}{s\,n}e^{-y\sqrt{n^2+s}}\sin(nx).$$

Ainsi, $u(x,y,t) = £^{-1}\left[U(x,y,s)\right] = \dfrac{200}{\pi}\sum_{n-1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\sin(n\,x)£^{-1}\left[\dfrac{e^{-y\sqrt{n^2+s}}}{s}\right]$. Prenons pour acquis que la formule suivante dont la démonstration pourrait passer par les variables complexes :

$$£^{-1}\left[e^{-y\sqrt{s}}\right] = \frac{y\,e^{-y^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi\,t^3}}$$

Alors

$$£^{-1}\left[e^{-y\sqrt{n^2+s}}\right] = \frac{y\,e^{-y^2/(4t)}\;e^{-n^2 t}}{2\sqrt{\pi\,t^3}} \quad \text{et} \quad £^{-1}\left[\frac{e^{-y\sqrt{n^2+s}}}{s}\right] = \int_0^t \frac{y\,e^{-y^2/(4v)}e^{-n^2 v}}{2\sqrt{\pi\,v^3}}\;dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{y/\left(2\sqrt{t}\right)}^{\infty} e^{-p^2-n^2y^2/\left(4p^2\right)}\;dp$$

,

la dernière égalité provenant du changement de variables $\dfrac{y^2}{4v} = p^2$. Alors, une solution formelle du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi,\; y > 0,\; t > 0, \\ u(x,\,y,\,0) = 0 \qquad \text{(condition initiale)} \\ u(0,\,y,\,t) = u(\pi,\,y,\,t) = 0,\; u(x,\,0,\,t) = 100 \quad \text{(conditions aux frontières)} \end{cases}$$

est donnée par la fonction suivante :

$$u(x,y,t) = \frac{400}{\pi^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(n\,x)\int_{\frac{y}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-p^2-n^2y^2/\left(4p^2\right)}\;dp\,.$$

1.7 Remarque Une application du théorème des résidus (en analyse complexe) donnera le résultat pris pour acquis. Si l'on note erfc(t) = 1 – erf(t) où erf est la fonction d'erreur

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\;dz,$$

alors nous montrerons que

$$£^{-1}\left[\frac{e^{-y\sqrt{s}}}{s}\right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right).$$

2- Équation de la corde vibrante ou des ondes en une dimension

Rappelons le problème qui a servi d'introduction au chapitre sur les séries de Fourier. Il s'agit de d'une É.D.P. avec conditions aux frontières $x = 0$ et $x = L$, avec position initiale donnée par $f(x)$ et vitesse initiale donnée par $g(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour} \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

2.1 Théorème a) Solution formelle de tout le problème. Elle est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos\left(\lambda_n t\right) + b_n^* \sin\left(\lambda_n t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

où

$$\lambda_n = \frac{c\,n\pi}{L}\,,\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \ \text{ et } b_n^* = \frac{2}{c\,n\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (n \geq 1) \ .$$

Donc, les b_n sont les coefficients de Fourier-sinus de f, prolongée de façon impaire et les $b_n^* \cdot \lambda_n$ sont les coefficients de Fourier-sinus de g, prolongée de façon impaire.

b) Solution de d'Alembert. Une solution de la seule É.D.P. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est donnée par

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

où ϕ et ψ sont des quelconques fonctions d'une variable, de classe C^2.

c) Solution de d'Alembert satisfaisant les conditions initiales seulement. Une solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

d) Solution de d'Alembert de tout le problème lorsque la vitesse initiale est nulle. Une solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)\equiv 0 \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\Big)$$

où f^* est le prolongement impair, de période $2L$, de f.

Preuve : a**)** découle encore de la méthode de séparation des variables. Notons toutefois que cette solution n'est que formelle. Si l'on veut qu'elle satisfasse bien l'É.D.P., on aura un problème de convergence de séries. En effet, prenons, par exemple, le cas où $g\equiv 0$ et où f est de forme triangulaire, disons

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le L/2 \\ L-x & \text{si } L/2\le x\le L \end{cases}.$$

Alors on trouverait la solution $u(x,t)=\dfrac{4L}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Et en dérivant 2 fois par rapport à x, on fait disparaître le $\dfrac{1}{n^2}$ et on se retrouve avec la série

$$-\frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dont la convergence est loin d'être assurée !

b) Considérons seulement l'É.D.P. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Posons $v=x+ct$ et $z=x-ct$. Alors, la règle de dérivation en chaîne et la continuité des dérivées partielles secondes donnent

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial v}c+\frac{\partial u}{\partial z}(-c)=c\left(\frac{\partial u}{\partial v}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(c\left(\frac{\partial u}{\partial v}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

tandis que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot 1=\left(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

L'É.D.P. devient donc $\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}=0$. En intégrant par rapport à *v*, on trouve $\frac{\partial u}{\partial z}=h(z)$ où *h* est une fonction qui ne dépend que de *z*. Finalement, on a $u=\int h(z)\,dz+\phi(v)$ où ϕ est une fonction qui ne dépend que de *v*. Si l'on pose $\int h(z)\,dz=\psi(z)$, on a donc obtenu que

$$u=\phi(v)+\psi(z)=\phi(x+c\,t)+\psi(x-c\,t).$$

c) On vient de voir que $u(x,t)=\phi(x+c\,t)+\psi(x-c\,t)$. Alors la positiion initiale implique $f(x)=\phi(x)+\psi(x)$ tandis que la vitesse initiale ainsi que la règle de dérivation en chaîne impliquent que $g(x)=c\,\phi'(x)-c\,\psi'(x)$. En intégrant la dernière égalité, nous avons

$$\phi(x)-\psi(x)-\left(\phi\left(x_0\right)-\psi\left(x_0\right)\right)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

Posons $k\left(x_0\right)=\phi\left(x_0\right)-\psi\left(x_0\right)$. Mais alors, on a les 2 équations suivantes :

$$\begin{cases}\phi(x)+\psi(x)=f(x)\\[2ex] \phi(x)-\psi(x)=k\left(x_0\right)+\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\end{cases}$$

dont la somme (resp. la différence), membre à membre, donne, après division par 2,

$$\phi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds+\frac{1}{2}k\left(x_0\right)$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds-\frac{1}{2}k\left(x_0\right)$$

Remplaçons *x* par *x* + *c t* (resp. par *x* – *c t*) :

$$\phi(x+c\,t)=\frac{1}{2}f(x+c\,t)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+c\,t} g(s)\,ds+\frac{1}{2}k\left(x_0\right)$$

$$\psi(x-ct)=\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct}g(s)\,ds-\frac{1}{2}k\left(x_0\right)$$

Additionnons les deux dernières équations : nous obtenons, en utilisant le fait que $\int_a^b = -\int_b^a$,

$$\begin{aligned}\phi(x+ct)+\psi(x-ct)&=\frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\left(\int_{x_0}^{x+ct}g(s)\,ds+\int_{x-ct}^{x_0}g(s)\,ds\right)\\&=\frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds.\end{aligned}$$

d) Les conditions aux frontières sont $u(0,t)=u(L,t)=0$. Alors

$$0=u(0,t)=\frac{1}{2}\big(f(ct)+f(-ct)\big)\quad\text{et}\quad 0=u(L,t)=\frac{1}{2}\big(f(L+ct)+f(L-ct)\big)$$

ou, si l'on préfère,

$$f(w)=-f(-w)\quad\text{et}\quad f(L+w)=-f(L-w)\quad\forall w\,.$$

Dire que $f(w) = -f(-w)$ signifie que f doit être impaire. Et la deuxième conséquence permet d'écrire que $f(w + 2L) = f(L + (w + L)) = -f(L - (w + L)) = -f(-w) = f(w)$, donc f doit être $2L$-périodique. Cela signifie que f doit être prolongée de façon impaire avec période $2L$. ♦

2.2 Exemple Si la vitesse initiale de la corde est nulle, on vient de voir que la solution de d'Alembert prend la forme de $u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\big)$, où f^* est le prolongement impair et périodique de la position initiale f. Puisque, pour $c > 0$, le graphe de $f(x-ct)$ s'obtient de celui de $f(x)$ en translatant de $c\,t$ unités vers la droite, on peut penser à une onde qui voyage vers la droite lorsque t augmente. De façon similaire, le graphe de la fonction $f(x+ct)$ s'obtient de celui de $f(x)$ en translatant de $c\,t$ unités vers la gauche, on peut penser à une onde qui voyage vers la gauche lorsque t augmente. Ainsi, le graphe de u s'obtient par superposition de ces 2 ondes. Prenons la longueur $L = \pi$ et $c = 1$ et prenons $f(x)=2\sin^2 x=1-\cos(2x)$. Une animation sera faite « live » durant le cours. La figure 2.1 montre des saisies d'écran où l'utilisation de la fonction modulo « mod » a permis de réaliser la solution de d'Alembert : un curseur jouant le rôle du temps « t » et variant de 0 à 2π a été utilisé mais la figure 2.1 ne montre que les graphiques pour t allant de 0 à π avec des pas de $\pi/8$. Le mouvement reviendrait à son point de départ si le temps continuait jusqu'à 2π.

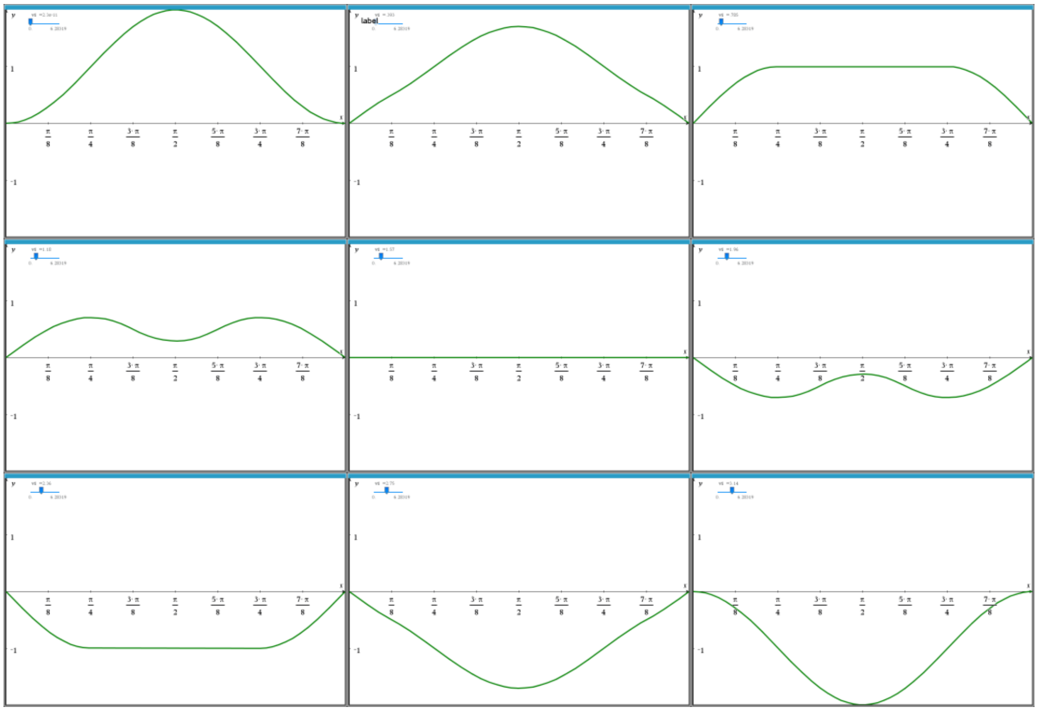

Figure 2.1

Comment produire les graphiques montrés à la figure 2.1? Puisque la solution formelle par séries est $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cos\left(\lambda_n t\right)+b_n^*\sin\left(\lambda_n t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, alors en termes de « t », la période est $\frac{2\pi}{\lambda_n}=\frac{2\pi}{cn\pi/L}=\frac{2L}{cn}$. Donc $\frac{2L}{c}$. Dans cet exemple, ce sera 2π. Avec Nspire, comme on voudra prolonger f de façon impaire, il faut en premier la définir sur toute la droite :

$\mathbf{f1}(x) \blacktriangleright \begin{cases} 2\cdot(\sin(x))^2, & 0<x<\pi \\ 0, & x\le 0 \text{ or } x\ge\pi \end{cases}$ (définition de la fonction f)

$\mathbf{f2}(x):=-\mathbf{f1}(-x)$ (prolongement impair)

$\mathbf{f3}(x):=\mathbf{f1}(x)+\mathbf{f2}(x)$ (la fonction impaire qu'on va prolonger périodiquement)

$\mathbf{f4}(x):=\mathbf{f3}(\mathrm{mod}(x+\pi,2\cdot\pi)-\pi)$ (la fonction périodique de période $2\cdot\pi$)

Dans une page graphique, on "décoche" ensuite toutes les fonctions précédentes et on définit la fonction f5 suivante puisque la période est $2\cdot\pi$ et puisque c = 1 dans notre exemple.

$\mathbf{f5}(x):=\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{f4}(x+\mathbf{v1})+\mathbf{f4}(x-\mathbf{v1}))$

"**v1**" sera un curseur pour jouer le rôle du temps qui va de 0 à $2\cdot\pi$.

Figure 2.2

3- Intégrale de Fourier, transformation de Fourier

3.1 Contexte Soit f une fonction NON-périodique mais absolument sommable sur la droite réelle. Soit $L > 0$ et « coupons » f entre $-L$ et L et prolongeons-la de façon périodique en dehors de l'intervalle $]-L, L[$ (la nouvelle fonction n'est peut-être plus sommable). Alors, on peut écrire la représentation suivante : en chaque point x de dérivabilité, on a, si $|x| < L$,

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi(t-x)}{L}\right)\,dt\right).$$

Posons $\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$, alors $\Delta\omega_n \equiv \omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{\pi}{L} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{L} = \dfrac{\Delta\omega_n}{\pi}$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-L}^{L} f(t)\cos\big(\omega_n(t-x)\big)\,dt\,.$$

En laissant tendre L vers l'infini, on a que $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,dt \;\to\; 0$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\Delta\omega_n \;\to\; 0$.

Ainsi, on reconnaît une somme de Riemann :

$$f(x) = \lim_{\substack{L\to\infty \\ \Delta\omega_n\to 0}} \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-L}^{L} f(t)\cos\big(\omega_n(t-x)\big)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)dt\,d\omega$$

si la limite existe, bien évidemment. Tentons de voir plus clair dans tout cela. Le lemme suivant nous servira tantôt.

3.2 Lemme (Riemann) Si ϕ est continue par morceaux et appartient à $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\sin(\rho t)\,dt = 0\,.$$

Preuve : $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\sin(\rho t)\,dt\right| \le \displaystyle\int_{-\infty}^{c}|\phi(t)|\,dt + \left|\displaystyle\int_{c}^{k}\phi(t)\sin(\rho t)\,dt\right| + \displaystyle\int_{k}^{\infty}|\phi(t)|\,dt$. Le fait que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ implique que, si $\varepsilon > 0$ est donné, l'on peut trouver k et c ($k > c$) tels que la première intégrale et la troisième intégrale du côté droit de l'inégalité sont $< \varepsilon/3$. Par le lemme 3.7 du résumé 3 (sauf qu'ici, l'intervalle d'intégration n'est pas $[-\pi, \pi]$ mais plutôt $[c, k]$), l'intégrale du centre tend vers 0 si ρ tend vers l'infini. ♦

3.3 Théorème Représentation d'une fonction absolument sommable par une intégrale de Fourier ; transformation de Fourier

a) Supposons $f \in L^1(\mathbb{R})$, continue par morceaux et possédant une dérivée à droite et une dérivée à gauche en chaque point. Alors, on a la représentation intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ continue en } x \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ discontinue en } x \end{cases}$$

Ici, les fonctions A et B sont définies par

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx \quad \text{et} \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$$

b) En particulier, si f est paire, on a la représentation suivante, dite <u>transformée de Fourier cosinus</u> sous forme symétrique (ou intégrale de Fourier-cosinus) :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx = \hat{f}_c(\omega) \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega = f(x)$$

c) En particulier, si f est impaire, on a la représentation suivante, dite <u>transformée de Fourier sinus</u> sous forme symétrique (ou intégrale de Fourier-sinus) :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx = \hat{f}_s(\omega) \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(x)\sin(\omega x)\,d\omega = f(x)$$

d) Si f est quelconque, on peut utiliser la représentation complexe suivante, dite <u>transformée de Fourier de f</u> :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \hat{f}(w) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(w)e^{i\omega x}\,d\omega = f(x)$$

Preuve : a) contentons-nous de le voir pour un point de continuité. Posons

$$g(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\big(\omega(t-x)\big)\, dt\, d\omega$$

et montrons que g possède une limite quand ρ tend vers l'infini. En permutant l'ordre d'intégration (ce qui est permis par un théorème d'analyse, le théorème de Fubini), on a

$$g(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_0^{\rho} \cos\big(\omega(t-x)\big)\, d\omega \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin\big(\rho(t-x)\big)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\sin(\rho t)}{t}\, dt$$

et il faut analyser la singularité en $t = 0$. Si $f(x) = 0$, alors

$$g(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\sin(\rho t)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin(\rho t)\, dt$$

et le lemme 3.2 donne $g(\infty) = 0$ si l'on choisit $\varphi(t) = \dfrac{f(t+x) - f(x)}{t}$ et $\varphi(0) = f'(x)$. Si $f(x) \neq 0$, posons $\hat{f} = f - \psi$ où

$$\psi(x+t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}.$$

On a $\psi'(t) = 0$ et $\hat{f}'(x) = f'(x)$ et $\hat{f}(x) = f(x) - \psi(x) = f(x) - \psi(x+0) = f(x) - f(x) = 0$.
Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to\infty} g(\rho) &= \lim_{\rho\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t+x) \frac{\sin(\rho t)}{t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t+x) \frac{\sin(\rho t)}{t}\, dt \right). \\ &= 0 + \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{\sin(\rho t)}{t}\, dt. \end{aligned}$$

On calcule la dernière limite en effectuant le changement de variable $u = \rho t$: on a alors

$$\lim_{\rho\to\infty} g(\rho) = \lim_{\rho\to\infty} \frac{f(t)}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{f(t)}{\pi} \pi = f(t)$$

où nous avons utilisé le résultat $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$.

b) et c) Laissés en exercice.

d) En revenant à la représentation originale et en utilisant les formules de A et de B, on a

$$f(x)=\int_0^\infty \big(A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\big)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)\big(\cos(\omega v)\cos(\omega x)+\sin(\omega v)\sin(\omega x)\big)\,dv\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega x-\omega v)\,dv\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega x-\omega v)\,dv\right)d\omega$$

où nous avons utilisé le fait que la fonction $\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega x-\omega v)\,dv$ de la variable ω est paire. Puisque, par imparité, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin(\omega x-\omega v)\ dv\right)d\omega=0$, on peut donc, en utilisant les formules d'Euler, écrire

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega x-\omega v)\,dv\right)d\omega+i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega x-\omega v)\,dv\right)d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)\big(\cos(\omega x-\omega v)+i\sin(\omega x-\omega v)\big)\,dv\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{i(\omega x-\omega v)}\,dv\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{i\omega x}e^{-i\omega v}\ dv\right)d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{-i\omega v}\,dv\right)e^{i\omega x}\,d\omega.\ \blacklozenge$$

3.4 Exemple La transformée de Fourier existera sans problème pour une fonction à support compact, comme par exemple la fonction suivante :

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } |t|<1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Alors, on trouve facilement $\hat f(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}1e^{-i\omega x}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}$. La formule d'inversion donne alors

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega \cos(\omega x)}{\omega}\, d\omega\,,$$

Mais alors on tire, en vertu du théorème 3.3a)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega \cos(\omega x)}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} \pi/2 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \pi/4 & \text{si} \quad |x| = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases} \quad \text{(facteur de discontinuité de Dirichlet)}$$

En particulier, lorsque t = 0, on a $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \lim_{u\to\infty} \int_{0}^{u} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \lim_{u\to\infty} \operatorname{Si}(u) = \frac{\pi}{2}$ et il n'est donc pas surprenant qu'on retrouvera le phénomène de Gibbs encore. Par conséquent, l'intégrale de Fourier permet, d'un strict point de vue de l'analyse mathématique, de calculer des intégrales impropres.

3.5 Exemples Calcul de transformée de Fourier, utilisation de la symétrie entre les formules de transformées directe et inverse.

3.5.1 Il n'est pas facile de calculer une transformée de Fourier d'une fonction quelconque ! Et, contrairement à la transformée de Laplace, la transformée de Fourier n'existe pas toujours, au sens classique, pour des fonctions aussi simples qu'une constante, un sinus, un cosinus, ... Soit a > 0 et trouvons la transformée de Fourier de chacune des fonctions

$$f(x) = e^{-a x^2} \quad \text{et} \quad g(t) = e^{a|t|}$$

(absolument sommable comme on peut le vérifier par comparaison avec une exponentielle du type $e^{-\alpha|x|}$). On a, en complétant le carré, en utilisant successivement les changements de variables $u = x + i\omega/(2a)$ et $u\sqrt{a} = t$ et le résultat classique $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$,

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{e^{\omega^2/(4a)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x + \frac{i\omega}{2a}\right)^2} dx = \frac{e^{\omega^2/(4a)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a u^2}\, du$$

$$= \frac{e^{\omega^2/(4a)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{a}} = \frac{e^{\omega^2/(4a)}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a}} \sqrt{\pi} = \frac{e^{w^2/(4a)}}{\sqrt{2a}}\,.$$

(ici, une petite « passe » de bornes d'intégration a été faite : mais cela sera vu en analyse complexe).

On voit donc, en choisissant a = ½, que la fonction $e^{-t^2/2}$ est sa propre transformée de Fourier !

Quant à g, un calcul direct montre que $\hat{g}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{\pi}\left(a^2+\omega^2\right)}$

Remarquons que si $\hat{f}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$, alors $f(-\omega)$ est la transformée de Fourier de $\hat{f}(t)$. Cette propriété est dite <u>dualité.</u> Cela donne de belles associations. Par exemple, nous avons

$$f(t) = \frac{1}{t^2+a^2} \quad \leftrightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{a|\omega|}}{a} \quad (a>0).$$

Voici une autre association.

3.5.2 Soit $b > 0$. Alors

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -b<t<b \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega b)}{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,b\,\mathrm{sinc}(\omega b)$$

$$\frac{\sin(at)}{t} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & \text{si} |\omega| < a \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

3.5.3 Transformation de Fourier au sens des distributions (fonctions généralisées). La fonction $f(t) \equiv 1$ n'est évidemment pas absolument sommable sur la droite. Par conséquent, sa transformée de Fourier n'existe pas au sens classique. Mais puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, e^{0} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1,$$

cela signifie que

$$f(t) \equiv 1 \quad \leftrightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\delta(\omega) \quad \text{et} \quad f(t) \equiv \delta(t) \quad \leftrightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

.

3.6 Théorème Propriétés de la transformation de Fourier, identité de Parseval

Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$ et dénotons par $C_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à ± ∞ et employons le symbole « $\Im$ » pour indiquer l'opération de prendre la transformée de Fourier.

a) Alors $\Im : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est une transformation linéaire :

$$\Im[\alpha f + \beta g] = \alpha\, \Im[f] + \beta\, \Im[g]$$

b) Soit h la fonction définie par $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$. Alors $h\in L^1(\mathbb{R})$ et est appelée la <u>convolution de *f* et *g*</u>, notée $f(t)*g(t)$, et on a

$$\hat{h}(w)=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(w)\cdot\hat{g}(w)\ \text{donc}\ \Im[f*g]=\sqrt{2\pi}\,\Im[f]\cdot\Im[g]$$

c) $\Im\left[f(t)e^{i\alpha t}\right]=\hat{f}(w-\alpha)$ et $\Im[f(t-\alpha)]=\hat{f}(w)e^{-i\alpha\omega}$.

d) Si $f'\in L^1(\mathbb{R})$, si $f\in C_0(\mathbb{R})$, alors $\Im[f']=i\,\omega\hat{f}$.

Cette dernière propriété prend la forme suivante dans le cas des transformations cosinus et sinus. Si $\Im_c=\hat{f}_c$ et $\Im_s=\hat{f}_s$, alors $\Im_c[f']=\omega\Im_s[f]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$ et $\Im_s[f']=-\omega\Im_c[f]$ et, lorsqu'il est possible d'appliquer ces formules avec f'' à la place de f', on a

$$\Im[f'']=-\omega^2\,\Im[f],$$
$$\Im_c[f'']=-\omega^2\,\Im_c[f]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0),$$
$$\Im_s[f'']=-\omega^2\,\Im_s[f]+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\,f(0).$$

e) Théorème d'inversion. Si $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$, si $k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\ \ (t\in\mathbb{R})$, alors *f* = *g* presque partout (« p.p. »). Ainsi, si $\hat{f}(\omega)=0\ \ \forall\omega\in\mathbb{R}$, alors *f* = 0 p.p.

f) Identité de Parseval, théorème de l'énergie. Si $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$. Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$$

Si l'on assimile *f*(*t*) à un courant ou une tension, alors $|f(t)|^2$ est proportionnel à la puissance du signal et son intégrale à l'énergie du signal. La quantité $\left|\hat{f}(\omega)\right|^2$ est appelée <u>densité d'énergie spectrale</u>. L'identité de Parseval nous indique combien d'énergie est conservée.

g) Soit un système linéaire, invariant dans le temps (« LIT »), dont la réponse impulsionnelle est dénotée $h(t)$: $T(\delta(t)) = h(t)$ où δ désigne la « fonction » de Dirac. Donc

i) $T(x_1(t)) = y_1(t)$, si $T(x_2(t)) = y_2(t)$, si α_1, α_2 sont des scalaires, alors on a

$$T(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t).$$

ii) si $T(x(t)) = y(t)$, si a est un réel, alors on a $T(x(t-a)) = y(t-a)$.

Alors on a les deux résultats suivants :

$$T(x(t)) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Autrement dit, la sortie est entièrement caractérisée par la réponse impulsionnelle.

Et les exponentielles sont des fonctions propres du système. Plus précisément,

$$T\left(e^{\lambda t}\right) = H(\lambda)\, e^{\lambda t}$$

Où $H(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau$ est la valeur propre associée. En particulier, $T\left(e^{i\omega t}\right) = H(\omega)\, e^{i\omega t}$ où $H(\omega)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (qui existera au sens classique si $h \in L^1(\mathbb{R})$).

Preuve : Les preuves de e) et f) et le fait, en a), que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, se retrouvent, par exemple, dans le volume Real and Complex Analysis, de Walter Rudin, McGraw-Hill, 1974. Les autres preuves sont laissées en exercice. ♦

3.7 Exemples

3.7.1 Les résultats précédent permettent d'écrire que $f(t) \equiv e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \delta(\omega - \omega_0)$

3.7.2 Les formules d'Euler permettent maintenant d'écrire que

$$f(t) \equiv \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{-i\sqrt{2\pi}}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$f(t) \equiv \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

3.7.3 La fonction échelon unité $u(t)$ ou STEP(t) n'est pas absolument sommable et ne s'annule pas à l'infini. Sa transformée de Fourier n'existe donc pas au sens classique. Mais puisque

$$u(t) = \frac{1+\mathrm{sign}(t)}{2},$$

où « sign » désigne la fonction signe, on a qu'à trouver la transformée de Fourier de cette dernière fonction. Rendons la fonction sign absolument intégrable en la multipliant par une exponentielle : soit $a > 0$ et posons

$$f(t) = e^{a|t|}\,\mathrm{sign}(t).$$

Puisque $\mathrm{sign}(t) = \lim_{a\to 0} f(t)$, on a, en se permettant d'intervertir les opérations de limite et d'intégrale,

$$\Im\left[\mathrm{sign}(t)\right] = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{a|t|}\,\mathrm{sign}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt\right)$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2i\,\omega}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{-2i}{\omega\sqrt{2\pi}}.$$

Mais alors $\Im\left[u(t)\right] = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega) + \frac{-2i}{\omega\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\delta(w) - \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}}.$

3.7.4 Soit *f*(*t*) une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ représentée par sa série de Fourier sous forme complexe $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n\omega_0 t}$. Alors $\Im\left[f(t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\,c_n\,\delta\left(\omega - n\,\omega_0\right)$.

En particulier, la fonction périodique $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ (dit un « train d'impulsions ») est telle que $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-i n\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}$ $\forall n$ et ainsi on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\,\omega_0\right) \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

4- Équations de la chaleur et des ondes en milieu infini

Le lemme suivant servira :

4.1 Lemme Soit $b > 0$. Alors

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\cos(2bs)\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Et si c, $t > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px - pv)\,dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right).$$

Preuve : le second résultat découle du premier en effectuant le changement de variable $p = \dfrac{s}{c\sqrt{t}}$ et en choisissant $b = \dfrac{x-v}{2c\sqrt{t}}$. Démontrons donc le premier résultat, ce qui pourra se faire à l'aide des variables complexes. Pour l'instant, contentons-nous d'y aller comme suit. Posons $f(b) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s^2}\cos(2bs)\,ds$. On a $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et si l'on se permet de dériver sous le signe intégral et qu'on intègre ensuite par parties, on obtient

$$f'(b) = \int_0^\infty -2s\,e^{-s^2}\sin(2bs)\,ds = \left[\sin(2bs)e^{-s^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-s^2}\cos(2bs)2b\,ds$$
$$= 0 - 2b\,f(b) = -2b\,f(b)$$

puisque la fonction sinus est bornée. Donc, $f' = -2b\,f \;\Rightarrow \dfrac{df}{f} = -2b\,db \;\Rightarrow f = c\,e^{-b^2}$ et la constante c étant $f(0)$, le résultat suit. ♦

4.2 Exemple Regardons ce qui se produit lorsqu'on utilise la méthode de séparation des variables pour le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Il s'agit, ici, de l'équation de la chaleur dans une tige de longueur infinie, donc pas de conditions aux frontières, mais une condition initiale de température. Posons $u(x,t) = F(x)G(t)$. Alors, on obtient $F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(t)$ ou encore $\begin{vmatrix} F(x) & c^2 G(t) \\ F''(x) & G'(t) \end{vmatrix} = 0$. Il existe donc une constante λ telle que

$$F''(x) = \lambda F(x) \quad \text{et} \quad G'(t) = \lambda c^2 G(t).$$

Si l'on cherche une solution bornée, alors on doit prendre $\lambda < 0$ et donc on trouve que, posant $\lambda = -p^2$ avec $p > 0$,

$$u(x,t,p) = \big(A\cos(p\,x) + B\sin(p\,x)\big)e^{-c^2 p^2 t}$$

où A et B sont des constantes quelconques. On a encore un problème afin de satisfaire la condition initiale : il faudrait que $f(x) = A\cos(p\,x) + B\sin(p\,x)$ ... L'idée, c'est de prendre une solution (formelle pour l'instant) du type

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t,p)\,dp = \int_0^\infty \big(A(p)\cos(p\,x) + B(p)\sin(p\,x)\big)e^{-c^2 p^2 t}\,dp$$

car l'É.D.P. est linéaire et homogène. Il faudrait alors que

$$u(x,0) = \int_0^\infty \big(A(p)\cos(p\,x) + B(p)\sin(p\,x)\big)dp = f(x)$$

ce qui est possible si l'on choisit A et B comme suit :

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(p\,v)\,dv, \quad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin p\,v)\,dv.$$

Alors, on aurait la solution

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(p\,x - p\,v)e^{-c^2 p^2 t}\,dv\right)dp = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(v)\int_0^\infty \cos(p\,x - p\,v)e^{-c^2 p^2 t}\,dp\right)dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right)dv = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}\,dv$$

où l'on s'est permis de permuter l'ordre d'intégration et avons utilisé le lemme 4.1.

Nous avons donc obtenu le

4.3 Théorème Le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

admet la solution (formelle)

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} \, dv \, .$$

4.4 Exemple Si la condition initiale est la fonction $f(x) = \begin{cases} 100 \text{ si } & |x| < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$,

alors la réponse sera

$$u(x,t) = \frac{50}{c\sqrt{\pi\, t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} \, dv$$

On peut visualiser des courbes pour quelques valeurs de t : prenons c = 1 et choisissons t = 0 (courbe en bleu tracée en utilisant $f(x)$ bien évidemment), t = 0.1 (courbe en rouge), t = 0.5 (courbe en noir), t = 1 (courbe en mauve) et t = 10 (courbe en vert). Voir la figure 4.1.

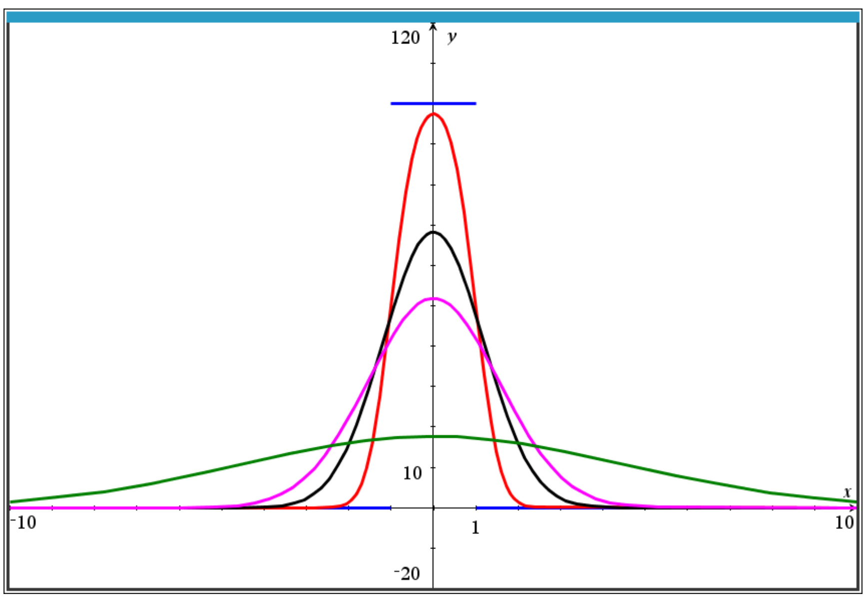

Figure 4.1

4.5 Exemple Reprenons le théorème en appliquant immédiatement la transformée de Fourier à l'É.D.P. $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = f(x)$, $-\infty < x < \infty$. Soit $\hat{u} = \Im[u]$ lorsqu'on considère u comme une fonction de x. Alors

$$\Im\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=c^2\Im\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

et le théorème 3.6d) donne

$$\frac{d\hat{u}}{dt}=-c^2\omega^2\hat{u}\,.$$

Mais alors, $\hat{u}(w,t)=k\,e^{-c^2w^2t}$ et, puisque $k=\hat{u}(\omega,0)=\hat{u}\big(f(x)\big)=\hat{f}(\omega)$, on a obtenu

$$\hat{u}(w,t)=\hat{f}(w)\,e^{-c^2w^2t}\,.$$

Mais l'exemple 3.5.1 permet d'écrire que $\Im\left[\dfrac{e^{x^2/(4a)}}{\sqrt{2a}}\right]=e^{-a\,\omega^2}$ et donc, avec $a=c^2t$, on a

$$\hat{u}(w,t)=\hat{f}(w)\,\Im\left[\frac{e^{x^2/(4c^2t)}}{c\sqrt{2t}}\right]$$

et le théorème de convolution permet d'écrire

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,f(x)*\left(\frac{e^{x^2/(4c^2t)}}{c\sqrt{2t}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,\frac{e^{(x-\tau)^2/(4c^2t)}}{c\sqrt{2t}}\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,e^{(x-\tau)^2/(4c^2t)}\,d\tau\,,$$

exactement comme tantôt.

4.6 Exemple Tige semi-infinie, utilisation de la transformée de Laplace. Considérons maintenant le problème suivant (nous prenons c = 1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ x>0,\ t>0,\quad u(0,t)=1,\quad u(x,0)=0\quad .$$

(Note : ici « u » représente toujours la température au point x à l'instant t. Si nous devons utiliser la fonction échelon-unité de Heaviside, nous emploierons « H » pour la désigner).

Posons $U(x,s)=\pounds\big[u(x,t)\big]$. En appliquant la transformée de chaque côté de l'É.D.P., nous obtenons $sU-0=\dfrac{d^2U}{dx^2}$, d'où, puisque s > 0, $U(x,s)=c_1\,e^{x\sqrt{s}}+c_2\,e^{-x\sqrt{s}}$. La solution qu'on cherche devant être bornée, on doit prendre $c_1=0$. Ainsi $U(x,s)=c_2\,e^{-x\sqrt{s}}$ et $c_2=U(0,s)=\pounds\big[u(0,t)\big]=\pounds\big[1\big]=\dfrac{1}{s}$. Donc, la remarque 1.7 permet d'écrire

$$u(x,t) = \pounds^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right] = \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-v^2}\, dv\,.$$

Visualisons la température pour différents instants du temps. La tige s'étend de $x = 0$ jusqu'à l'infini vers la droite mais la figure 4.2 montre le domaine $0 < x < 100$. Initialement la température est à 0, sauf en $x = 0$ où il fait 1. On a tracé les courbes $u(x, t)$ pour les valeurs suivantes de t : 0.1 en brun, 1, 10, 30, 50 et $t = 120$ (montré en orange, courbe f6).

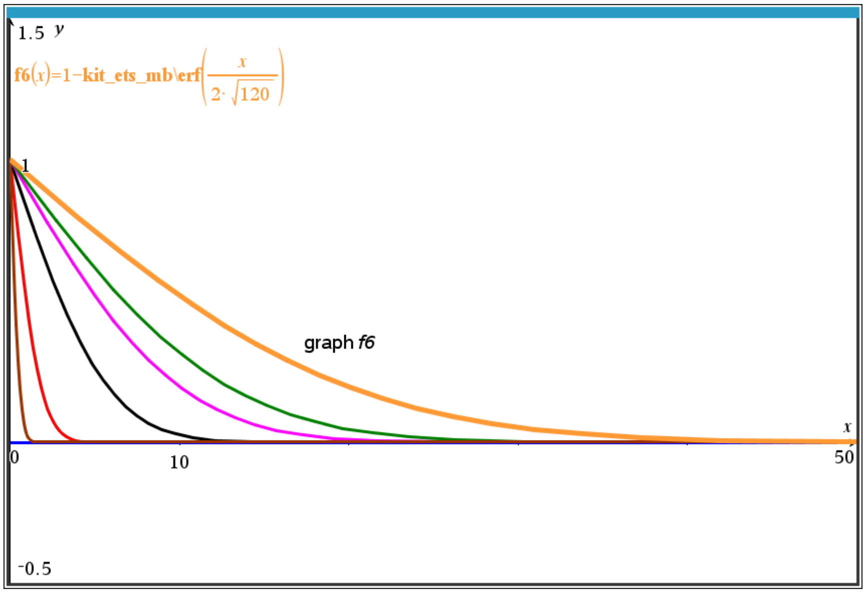

Figure 4.2

4.7 Exemple Corde semi-infinie, utilisation de la transformée de Laplace. Considérons maintenant le problème des ondes suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x > 0,\ t > 0,\quad u(0,t) = f(t),\quad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall t \ge 0$$

$$u(x,0) = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{(conditions initiales nulles)}$$

Il s'agit donc d'une corde semi-infinie, dont l'extrémité gauche (en $x = 0$) décrit une courbe donnée par une fonction $f(t)$ dont nous dénoterons la transformée de Laplace par $F(s)$ et dont l'extrémité droite est fixée à 0, cela « très loin » à droite. On va encore prendre la transformée de Laplace par rapport à la variable t, donc posons

$$\pounds\left[u(x,t)\right] = U(x,s)\,.$$

L'É.D.P. est transformée en $s^2U - s\,u(x,0) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = c^2\,\dfrac{d^2U}{dx^2}$, d'où $\dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{s^2}{c^2}U = 0$. Ainsi, nous avons $U(x,s) = c_1\,e^{s\,x/c} + c_2\,e^{-s\,x/c}$ et, encore ici, une solution bornée force $c_1 = 0$. Mais alors

$$U(x,s) = c_2\,e^{-s\,x/c} \quad \Rightarrow \quad c_2 = U(0,s) = \pounds\left[u(0,t)\right] = \pounds\left[\,f(t)\right] = F(s)\,.$$

On a donc $U(x,s) = F(s)\,e^{-s\,x/c}$. En inversant les transformées et en utilisant la propriété de translation, nous obtenons

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)H\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Liste d'exercices pour le résumé 4

Problème 1 Équation de la chaleur dans une tige de longueur finie, disons π. Soit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (t > 0).$$

Trouvez $u(x, t)$ si

a) $u(x,0) = 2\sin(3x)$

b) $u(x,0) = 3\sin x - 5\sin(2x)$

c) $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi} & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ \dfrac{2}{\pi}(\pi - x) & \text{si } \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$

Problème 2 Équation non homogène de la chaleur dans une tige de longueur L où une perte de chaleur est provoquée par un facteur de radioactivité. Montrez que le problème non homogène

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = N e^{-\alpha x} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \\ u(x,0) = f(x) \end{gathered}$$

peut se ramener au problème homogène en posant $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ et en déterminant w de telle sorte que v satisfasse l'équation homogène et les conditions

$$v(0,t) = v(L,t) = 0, \; v(x,0) = f(x) - w(x).$$

Problème 3 Corde vibrante. Trouvez $u(x, t)$ pour la corde aux extrémités attachées, de longueur $L = \pi$, $c^2 = 1$ et vitesse initiale nulle. Tracez ensuite quelques graphiques de $u(x, t)$ pour certaines valeurs de t avec $0 \le x \le \pi$, en prenant une somme partielle. Finalement, utilisez la solution de d'Alembert pour vérifier vos graphiques. Voici la position initiale :

a) $u(x,0) = \dfrac{x(\pi - x)}{10}$

b) $u(x,0) = k\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin(2x)\right)$ (k une constante positive)

c) $u(x,0) = \dfrac{x}{10}\left(\pi^2 - x^2\right)$

Problème 4 Utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre des É.D.P. Utilisez cette technique pour résoudre :

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2x, \ \ u(x,0) = 1, \ \ u(0,t) = 1$.

b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = xt, \ \ u(x,0) = 0 \ \text{si} \ x \geq 0, \ u(0,t) = 0 \ \text{si} \ t \geq 0$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ \ (t > 0,\ 0 < x < L)$,

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) \quad (0 \leq x \leq L) \quad u_t(x,0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$

d) une équation de la chaleur dans une tige semi-infinie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0,\ t > 0)$$

avec la condition à la frontière

$$u(0,t) = t^2 \quad (t \geq 0)$$

et la condition initiale

$$u(x,0) = 0 \quad (x > 0)\,.$$

Indice : posez $U(x,s) = \pounds\left[u(x,t)\right]$ où £ désigne ici la transformée de Laplace et prenez la transformée de Laplace de chaque côté de l'É.D.P. Utilisez aussi le fait que $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{t}}\right) \leftrightarrow \dfrac{e^{-y\sqrt{s}}}{s}$ (où $\operatorname{erfc}(t) \equiv 1 - \operatorname{erf}(t)$) afin de répondre sous forme d'une intégrale de convolution où la fonction erfc apparaît.

e) Soit A une constante. On considère une équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0,\ t > 0)$$

avec la condition à la frontière

$$u(0,t) = t \quad (t \geq 0)$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = A \quad (x > 0)$$

Problème 5 Équation de la chaleur dans une plaque carrée. Soit la plaque de cuivre carrée

$$C = \{(x, y) : 0 \le x, y \le 24\}$$

dont les faces sont parfaitement isolées. Trouvez la température en régime permanent (donc, résolvez l'équation de Laplace) si :

a) le côté supérieur est maintenu à 20°C et que les 3 autres côtés sont maintenus à 0°C;
b) les côtés supérieur et inférieur sont parfaitement isolés, le côté gauche maintenu à 0°C et le côté droit maintenu à *f*(*y*) °C.

Problème 6 Utilisez la solution de d'Alembert

a) pour résoudre l'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0)$

avec les conditions initiales $u(x,0) = e^{-|x|},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(4x) \quad (-\infty < x < \infty)$

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = xe^x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cosh x \end{cases}$

Problème 7 On considère l'équation des ondes non homogène :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \quad (0 < x < 2,\ t > 0)$$

avec les conditions aux frontières

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad (t \ge 0)$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (0 \le x \le 2)\ .$$

a) Vérifiez que la méthode de séparation des variables *ne fonctionne pas ici*.
b) Posez $v(x,t) = u(x,t) + h(x)$ et choisissez $h(x)$ afin de revenir à un problème standard, résolu en classe. Trouvez ainsi la solution $u(x, t)$.

c) Produisez quelques graphiques de $u(x, t)$ pour certaines valeurs de t et estimez l'impact de la force extérieure en traçant les graphiques de la solution qu'on obtiendrait sans la présence du terme $2x$.

Problème 8 Montrez que l'É.D.P. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu\right)$ peut être transformée en une équation de la chaleur « standard » (comme celle vue en classe) en posant $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$ et en choisissant α et β convenablement.

Problème 9 *Équation des ondes avec force extérieure*

Soit à résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \quad \text{pour } 0 < x < 9, t > 0$$
$$u(0,t) = u(9,t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0$$
$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 9$$

a) Trouvez une solution en série.

b) Afin d'avoir une idée de l'impact de la force extérieure (le terme 2), tracez, dans une même fenêtre, le graphique d'une somme partielle d'ordre 40 pour la solution trouvée ainsi que pour celle du problème standard (donc en enlevant le terme + 2). Produisez des graphiques pour les instants suivants du temps : $t = 0.5, 1.2, 2.6, 3.5, 5, 6.5, 7.5$ et 9.

Problème 10 *Équation de la chaleur* Cas où la température aux extrémités est différente. Résolvez le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L$$
$$u(0,t) = T_1, u(L,t) = T_2 \quad \text{pour } t > 0$$

<u>Indice</u> : posez $u(x,t) = U(x,t) + \varphi(x)$ et choisissez $\varphi(x)$ de façon à revenir au problème standard.

Problème 11 Calculs et propriétés des transformées de Fourier.

a) Trouvez les transformées de Fourier pour chacune des fonctions suivantes.

i) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (k > 0)$ **ii)** $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$ **iv)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$

b) Si $f(x)$ admet la transformée de Fourier $\hat{f}(w)$, si $a \in \mathbb{R}$, trouvez la transformée de Fourier de

i) $f(x-a)$ **ii)** $e^{iax} f(x)$ **iii)** $f(-x)$

Problème 12 *Intégrale de Fourier*.

a) En utilisant la représentation d'une fonction par l'intégrale de Fourier, montrez que

i) $$\int_0^\infty \frac{\omega^3 \sin(x\omega)}{\omega^4+4}\, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos(x) \quad \text{si } x > 0$$

ii) $$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\omega/2)\cos(x\omega)}{1-\omega^2}\, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x) & \text{si } |x| < \pi/2 \\ 0 & \text{si } |x| > \pi/2 \end{cases}$$

iii) $$\int_0^\infty \frac{\omega^3 \sin(x\omega)}{\omega^4+4}\, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos(x) \quad \text{si } x > 0$$

iv) Soit k une constante positive. Alors $e^{-kx} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega}{k^2+\omega^2} \sin(\omega x)\, d\omega \quad (x > 0).$

b) Trouvez :

i) la transformée de Fourier cosinus de $\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-x^2}$.

ii) la transformée de Fourier sinus de $\dfrac{x^3}{4+x^4}$.

iii) la transformée de Fourier (complexe) de la fonction $f(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{si } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$

Problème 13 Équation de la chaleur dans une tige de longueur infinie. Soit $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = u_0 e^{-\sigma^2 x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ où $u_0 > 0, \sigma > 0$ sont des constantes.

Montrez que pour tout $t > 0$ la température $u(x, t)$ de la tige est donnée par la formule

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4c^2\sigma^2 t}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{1+4c^2\sigma^2 t}}.$$

Problème 14 Équation de la chaleur dans une tige de longueur infinie. Soit $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$. Résolvez et tracez quelques graphiques de $u(x, t)$ pour certaines valeurs de t en restreignant x à l'intervalle $-3 < x < 3$ (prendre c =1 pour faire les graphes).

a) en utilisant l'intégrale de Fourier
b) en prenant immédiatement la transformée de Fourier de chaque côté de l'É.D.P. et en utilisant le théorème de convolution.

Problème 15 *Équation des ondes pour une corde infinie ou semi-infinie* Résolvez les problèmes suivants, de la façon indiquée. Dans tous les cas, on recherche des solutions bornées.

a) Corde semi-infinie. Utilisez la méthode de séparation des variables et une représentation par intégrale de Fourier pour résoudre le problème suivant.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour} \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \ge 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < \infty$$

b) Corde semi-infinie. Utilisez ici la transformée de Laplace pour résoudre le problème suivant.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } 0 < x < \infty,\ t > 0$$

$$u(0,t) = \begin{cases} \sin(2\pi t) & \text{pour } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{pour } 0 < x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{pour } 0 < x < \infty$$

Indice : posez $U(x,s) = \pounds\left[u(x,t)\right]$ où « £ » désigne la transformée de Laplace. Employez H pour la fonction échelon-unité de Heaviside, la lettre u étant déjà utilisée.

c) Corde infinie. Utilisez la méthode de séparation des variables et une représentation par intégrale de Fourier pour résoudre le problème suivant.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \equiv \begin{cases} \sin x & \text{pour } -2\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{pour } x < -2\pi \text{ ou } x > \pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \equiv e^{-4|x|}$$

Remarquez que les fonctions f et g sont absolument sommables.

Problème 16 *Propriétés de la convolution***.** Posons

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

Remarquons que si x et h sont 2 fonctions absolument sommables, alors y l'est aussi. De plus, on peut écrire que y est la sortie correspondant à l'entrée x d'un système LIT dont h désigne la réponse impulsionnelle.

Démontrez les propriétés suivantes :

a) $(c\,x)(t) * h(t) = x(t) * (c\,h)(t) = c\,y(t) \quad \left(c \in \mathbb{R}\right)$

b) La convolution est commutative, associative et distributive :

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$x(t) * \left(h_1(t) * h_2(t)\right) = \left(x(t) * h_1(t)\right) * h_2(t)$$

$$x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t)\right) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

c) La « fonction » de Dirac en est l'élément neutre et la fonction échelon-unité a l'effet d'un intégrateur :

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

d) Modification de la variable *t* :

Changement d'échelle: $y(ct) = c\, x(ct) * h(ct) \quad (c > 0)$

Translation: $y\left(t - t_1 - t_2\right) = x\left(t - t_1\right) * h\left(t - t_2\right)$

Renversement du temps: $y(-t) = x(-t) * h(-t)$

e) Si $x(t) = 0$ en dehors de $\left[a, b\right]$, si $h(t) = 0$ en dehors de $\left[c, d\right]$, alors $y(t) = 0$ en dehors de $\left[a + c, b + d\right]$.

f) Les exponentielles sont des fonctions propres d'un système LIT : plus précisément, si $x(t) = e^{\lambda t}$, alors $y(t) = H(\lambda) e^{\lambda t}$ avec la valeur propre $H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-\lambda \tau}\, d\tau$.

Et si $x(t) = e^{i\omega t}$, alors $y(t) = H(\omega)\, e^{i\omega t}$ avec $H(\omega)$ la transformée de Fourier de $h(t)$.