

Solutions des exercices pour la semaine du 1^{er} mars 2021
T.P. du jeudi 4 mars : exercices 10a), 11, 14 et 16a) du résumé 2

Problème 10a) Points critiques et stabilité de systèmes ou É.D. non linéaires mais linéarisés. Déterminons le type et la stabilité des points critiques en linéarisant le système

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, & y_2' = y_1 - y_1^3. \end{cases}$$

Le système est donc $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{F}(\mathbf{y})$ où $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1^3 \end{bmatrix}$.

Il s'agit bien d'un système quasi linéaire: en effet, en utilisant les coordonnées polaires, on voit que

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r^3 \cos^3 \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{r^3 |\cos^3 \theta|}{r} = r^2 |\cos^3 \theta| \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0.$$

Les points critiques du système sont faciles à trouver à la main: (0, 0), (1, 0) et (-1, 0). La matrice jacobienne du système est

$$\mathbf{J}(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 - 3y_1^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rappelons le théorème 4.11 du résumé 2): soient λ_1, λ_2 les valeurs propres du système linéaire $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ correspondant au système quasi linéaire $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Alors le type et la stabilité du point critique (0, 0) sont donnés dans le tableau de la figure

Valeurs propres	Système linéaire		Système quasi linéaire	
	Type	Stabilité	Type	Stabilité
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Noeud	Instable	Noeud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Noeud	Asympt. stable	Noeud	Asympt. stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point de selle	Instable	Point de selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Noeud imp. ou pr.	Instable	Noeud ou Spirale	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Noeud imp. ou pr.	Asympt. stable	Noeud ou Spirale	Asympt. stable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spirale	Instable Asympt. stable	Spirale	Instable Asympt. stable
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable	Centre ou Spirale	Indéterminée

Figure 1

Les valeurs propres de $\mathbf{J}(0, 0)$ sont $\pm i$ et par le théorème on peut affirmer que l'origine est un centre stable du système linéaire mais pour le système initial, ce pourrait être un centre ou une spirale de stabilité indéterminée. Un graphique du plan de phase dans un voisinage de l'origine va nous renseigner et montre bien un centre stable. Finalement, les valeurs propres de $\mathbf{J}(1, 0)$ ainsi que celle de $\mathbf{J}(-1, 0)$ sont $\pm\sqrt{2}$ et autant pour le système linéarisé que le système quasi linéaire original, ces points sont donc des points de selle.

Nous produisons à la figure 2 un graphique pour le plan de phase mais pour chacun des points critiques, en choisissant des fenêtres qui servent de voisinage au point. On peut être confiant que le point $(0, 0)$ est bien un centre stable. Et on savait que les points $(\pm 1, 0)$ sont des cols (points de selle) instables.

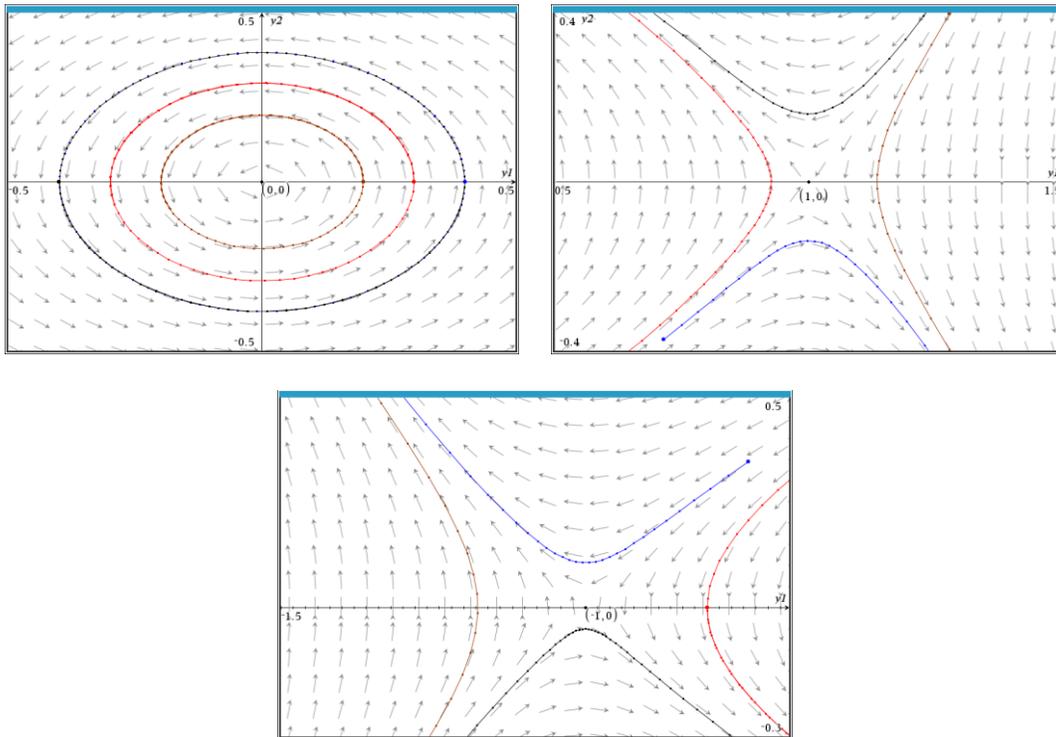


Figure 2

Finalement, remarquons qu'en quotientant les deux équations différentielles du système, on obtient

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_1^3 - y_1}{y_2} \Rightarrow y_2 dy_2 = (y_1^3 - y_1) dy_1 \Rightarrow y_2^2 = \frac{y_1^4}{2} - y_1^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

Cette famille de courbe est tracée à la figure 3 et on voit bien qu'en faisant varier la constante C on trouve des courbes qui ressemblent bien à celles fournies par les différents plans de phase de la figure 2.

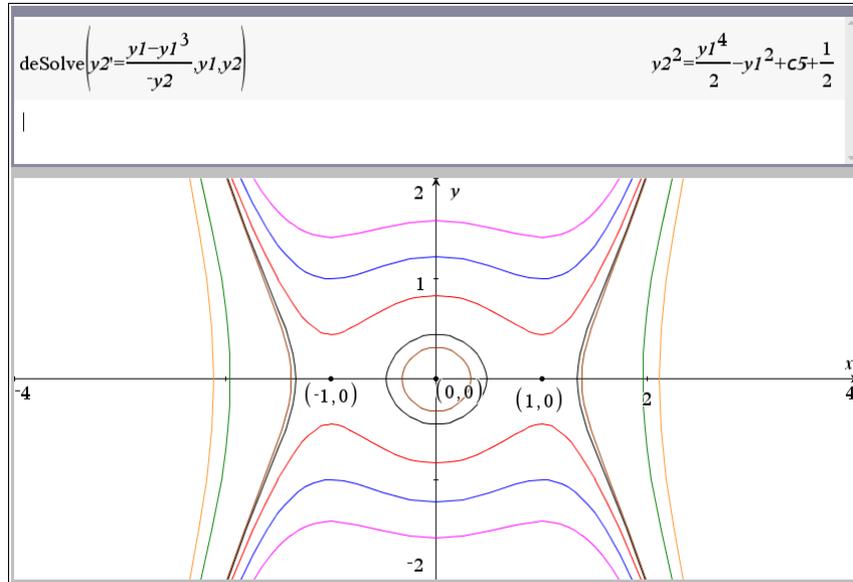


Figure 3

Problème 11 Un système non linéaire, celui de Lotka-Volterra. Considérons le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(3 - y) \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 3) \end{cases}$$

- Le système étant autonome, obtenons une É.D. en x et y et résolvons-la.
- Trouvons les points critiques du système. Ce système est-il quasi linéaire? Si oui, trouvons les points critiques du système linéaire associé et étudions la nature et la stabilité des points critiques du système original.
- En utilisant une méthode numérique robuste, approximations les populations des proies $x(t)$ et des prédateurs $y(t)$ sur l'intervalle $[0, 5]$ dans chacune des situations suivantes :
 - $x(0) = 2, y(0) = 4$;
 - $x(0) = 2, y(0) = 5$ et
 - $x(0) = 2, y(0) = 7$.

Cela va permettre de voir ce qui se passe lorsque la population initiale des proies est fixée mais que celle des prédateurs augmente.

a) En quotientant les deux É.D. nous trouvons une famille de courbes implicites définies sur le premier quadrant puisqu'il s'agit de populations :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-3)}{x(3-y)} \Rightarrow \frac{3-y}{y} dy = \frac{x-3}{x} dx \Rightarrow y - 3 \ln y = 3 \ln x - x + C \quad (C \in \mathbb{R}, x, y > 0).$$

Il est même possible de résoudre pour « y » et comme on est dans le premier quadrant, on peut écrire que

$$y - 3 \ln y = 3 \ln x - x + C \Leftrightarrow e^y = x^3 y^3 e^{-x+C} \Leftrightarrow -\frac{y}{3} e^{\frac{y}{3}} = -e^{\frac{x-C}{3}} / (3x).$$

Mais alors $y = -3W_0\left(-e^{\frac{x-C}{3}} / (3x)\right)$. Il est préférable de laisser la solution sous forme

implicite et de recourir à un plotteur implicite 2D fiable comme le bon vieux *Derive* : voir la figure 4 :

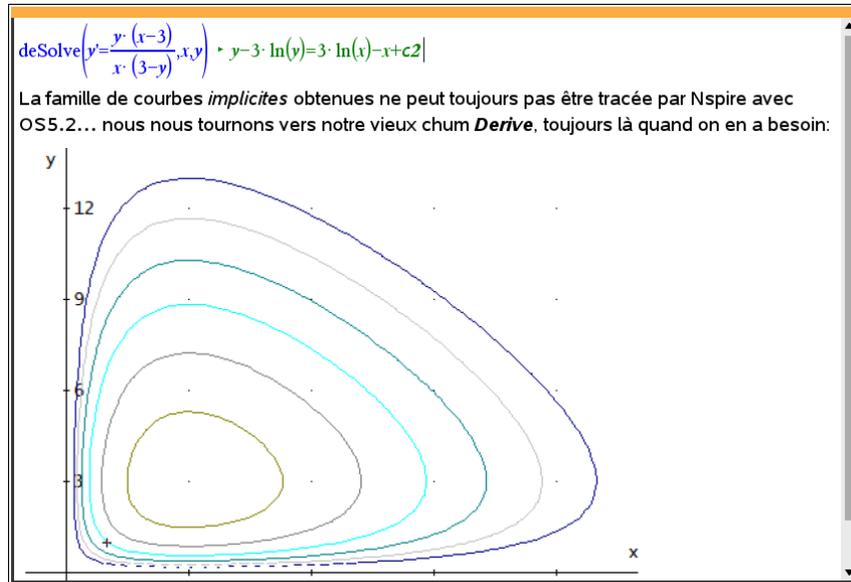


Figure 4

b) Ce système est quasi-linéaire puisque $\mathbf{F}(x, y) = [-x \cdot y, x \cdot y]^T$. Les points critiques sont faciles à trouver et c'est (0, 0) et (3, 3). La matrice jacobienne du système est

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 3-y & -x \\ y & x-3 \end{bmatrix}$$



Figure 5

Les calculs de la figure 5 montrent que le point (0, 0) est un col instable autant pour le système linéarisé que le système original. Et le point (3, 3) est un centre stable pour le système linéarisé et le plan de phase va nous convaincre qu'il s'agit aussi d'un centre stable

pour le système original (d'ailleurs les courbes implicites de la figure 4 le laissent présager). On a donc des solutions périodiques.

c) Nous utilisons toujours le « RK » de Nspire qui est en fait un « RK23 » fort bien décrit dans les notes de cours du chapitre 7.1 de mon collègue Gilles Picard. On voit à la figure 6 (côté gauche) les graphes dans le plan de phase des courbes (x, y) et du côté droit les graphes des courbes (t, x) pour chacune des 3 conditions initiales :

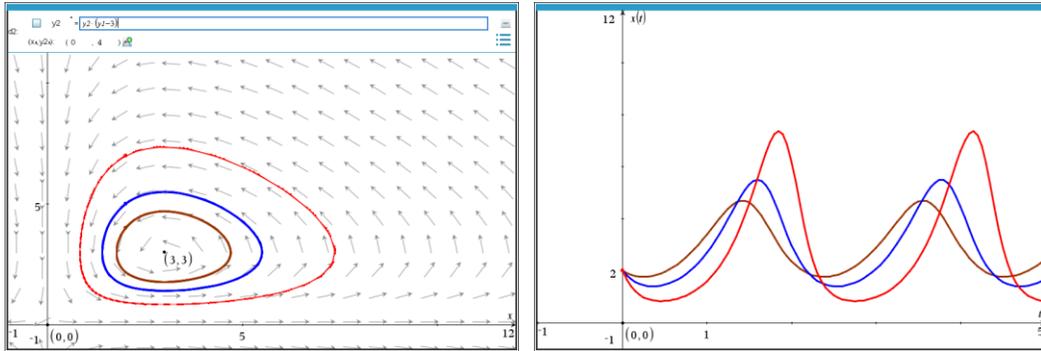


Figure 6

En utilisant le mode « trace » dans le côté gauche de la figure 6 ou encore en trouvant approximativement l'intersection de chacune des courbes de la figure du côté droit avec la droite horizontale $y = 2$, on peut déduire la période des solutions périodiques. On voit que de laisser fixe la population initiale de x fait en sorte que la période augmente si la population initiale de y augmente. La période peut même être trouvée (des formules connues existent) : pour la condition initiale $x(0) = 2, y(0) = 7$, la figure 7 montre que la période de chacune des populations semble être environ 2.28.

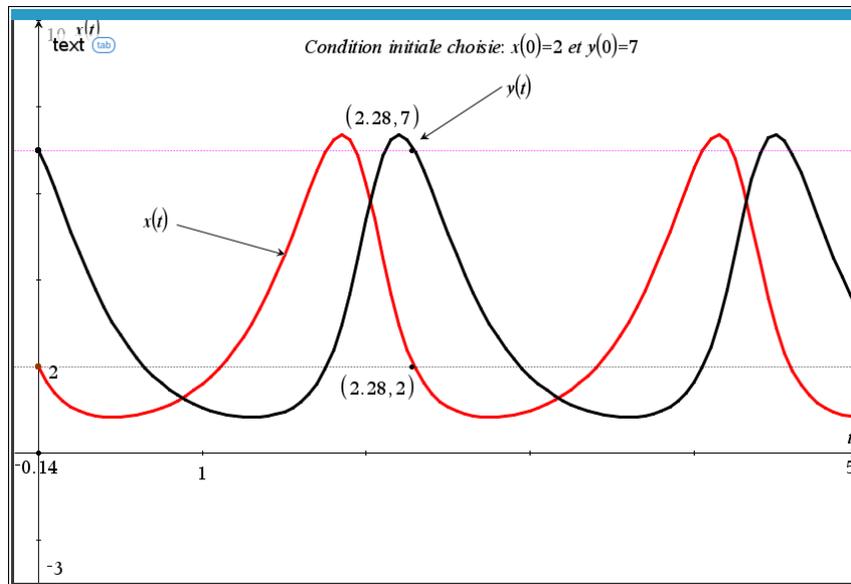


Figure 7

Problème 14 Bifurcations. Considérons le système linéaire $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon y \end{cases}$

Montrons que le point critique $(0, 0)$ est une spirale stable si $\varepsilon < 0$, un centre si $\varepsilon = 0$ et une spirale instable de si $\varepsilon > 0$.

Donc, de petites perturbations du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(3-y), \\ \frac{dy}{dt} = y(x-3) \end{cases}$ peuvent changer

à la fois le type et la stabilité du point critique. Illustrons cela avec les valeurs suivantes de ε : $-0.2, -0.05, 0, 0.05$ et 0.2 et traçons les trajectoires dans une fenêtre comme, par

exemple, $-1 < x, y < 1$. En effet, la matrice du système est $\mathbf{A}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$ dont le

polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2 + 1$. Les valeurs propres sont donc

$\lambda = \frac{2\varepsilon \pm \sqrt{-4}}{2} = \varepsilon \pm i$. La conclusion est donc claire. Notons que la matrice \mathbf{A} est toujours

inversible quelle que soit la valeur de ε puisque son déterminant vaut $\varepsilon^2 + 1$ et donc l'origine $(0, 0)$ est l'unique point critique du système. La figure 8 montre les plans de phase (de gauche à droite, de haut en bas) demandés, nous sommes partis du point $(0.3, 0.4)$ à chaque fois.

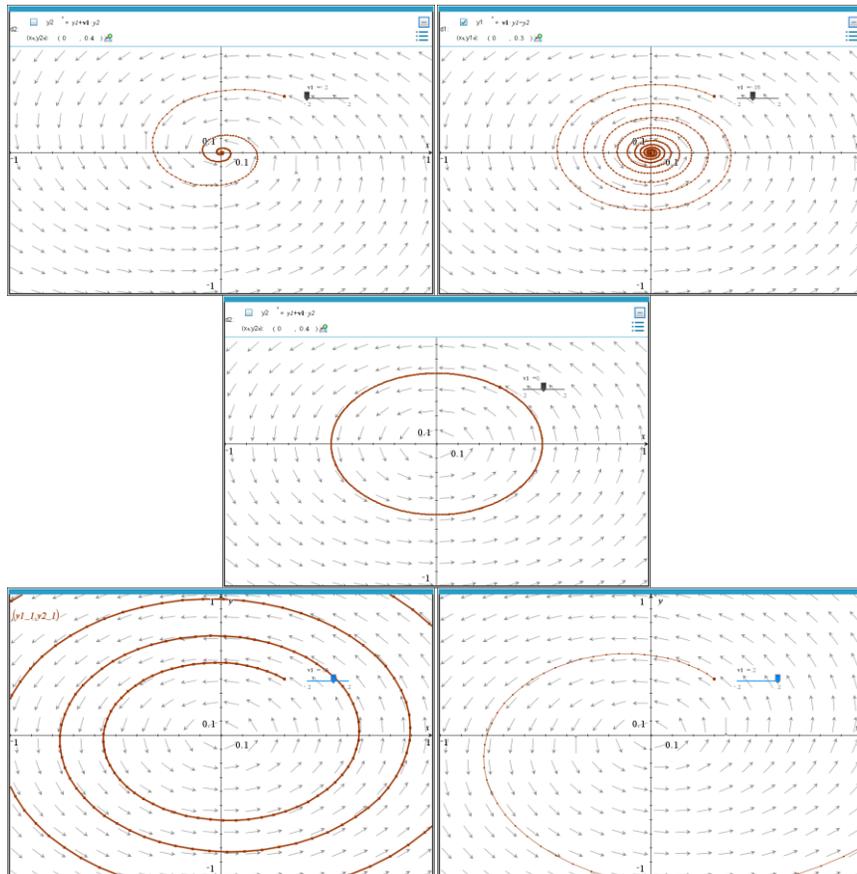


Figure 8

Problème 16a) Systèmes quasi linéaires. Pour le système quasi linéaire suivant, montrons que l'origine est un point critique et étudions-en la stabilité.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 2y - 7x^2 y \end{cases}$$

Le système est bien quasi linéaire :

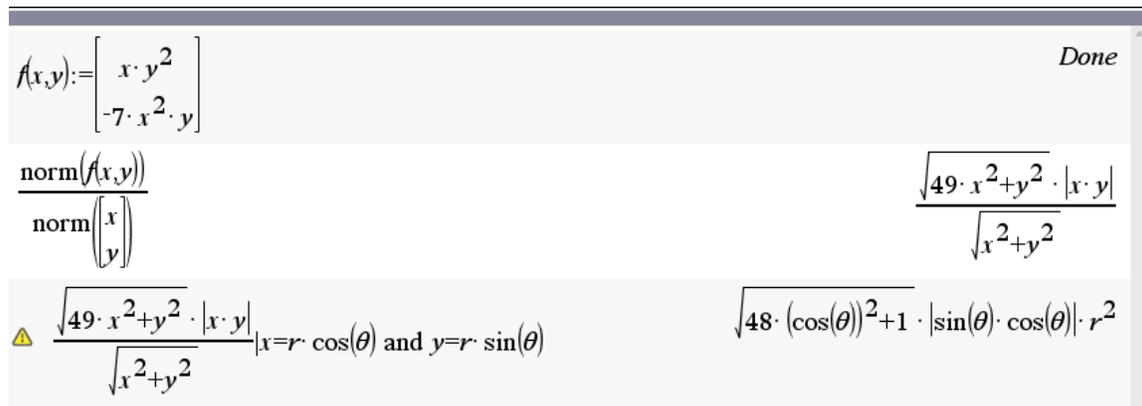


Figure 9

L'origine est l'unique point critique du système est la matrice jacobienne évaluée en (0, 0) possède les valeurs propres $-2 \pm i\sqrt{7}$.

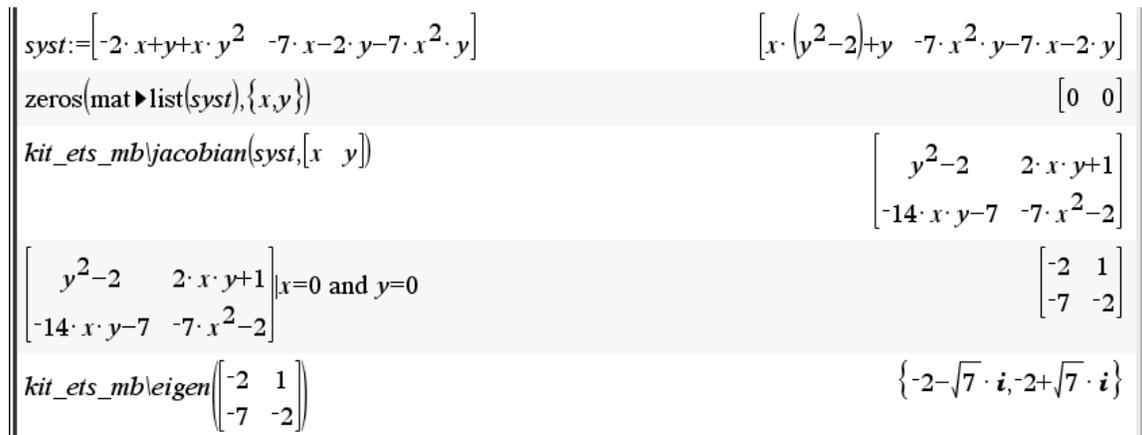


Figure 10

D'après le théorème 4.11 du résumé 2 (revoir la figure 1 au début de ce document), l'origine est une spirale asymptotiquement stable autant pour le système linéarisé que pour le système quasi linéaire original. Un plan de phase confirme d'ailleurs cela comme le montre la figure 11 : nous avons fait varier le point de départ et montrons 4 trajectoires qui se dirigent chacune, lorsque le temps tend vers l'infini, vers l'origine.

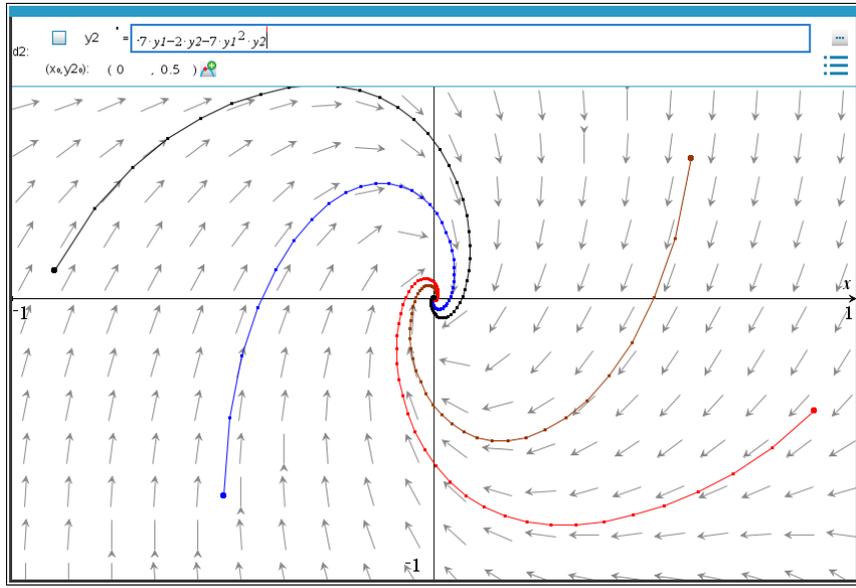


Figure 11