Solutions des exercices pour la semaine du 5 avril 2021
T.P. du jeudi 8 avril : analyse complexe (théorème des résidus)

Intégrale curviligne : calcul via le théorème des résidus. Obtention du résidu en une singularité via différentes méthodes.

Nous allons classifier les points singuliers de chacune des fonctions suivantes et, ensuite, calculer son intégrale curviligne sur la courbe fermée simple donnée. Tous les contours sont parcourus dans le sens direct (celui contraire des aiguilles d'une montre)

a) $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{z\left(z^2-1\right)^2}$. Le chemin est le cercle C : $|z-1|=\sqrt{2}$.

Bien qu'il ne soit pas nécessaire de dessiner ce cercle afin d'y voir quelles singularités, parmi 0, 1 et -1, s'y trouvent à l'intérieur, la figure 1 montre le cercle qui est centré au point (1, 0) et de rayon $\sqrt{2}$ ainsi que les 3 singularités de *f*. Notons que 0 est une singularité apparente puisque

$$\lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{\left(z^2-1\right)^2}=0$$

tandis que ± 1 sont des pôles doubles puisque (pour $z = 1$ par exemple),

$$\lim_{z\to 1}|f(z)|=\lim_{z\to 1}\left|\frac{\sin(z)}{z\left(z^2-1\right)^2}\right|=\sin(1)\cdot\lim_{z\to 1}\left|\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\right|=\infty.$$

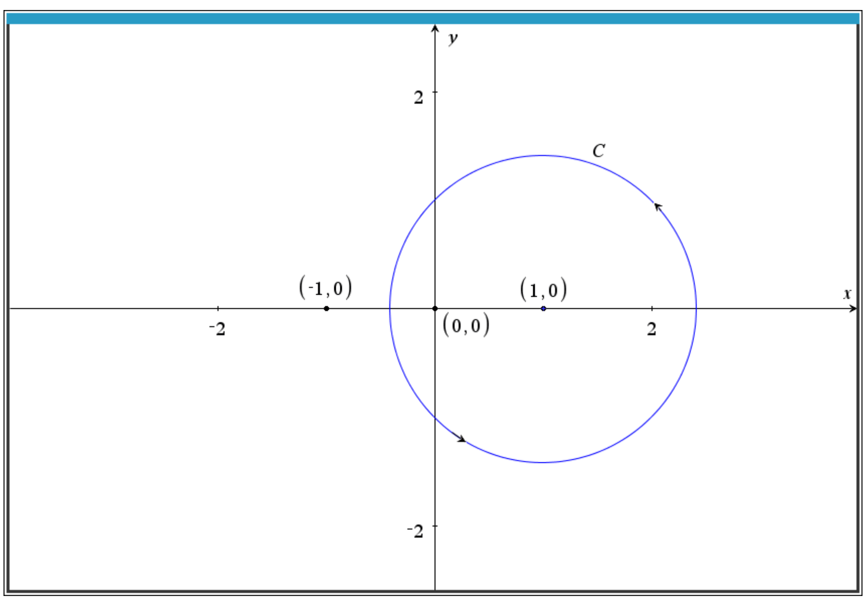

Figure 1

Mais alors, par le théorème des résidus, on a

$$I = \oint_C \frac{\sin(z)}{z\left(z^2-1\right)^2}\,dz = 2\pi i\left(B_1+B_2\right)$$

Avec B_1 le résidu en $z = 0$ et B_2 celui en $z = 1$. Évidemment $B_1 = 0$ tandis que

$$B_2 = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\frac{\sin(z)}{z\,(z-1)^2(z+1)^2}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(z)}{z\,(z+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(z)}{z\,(z+1)^2}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{\cos(z)}{z\,(z+1)^2} - \frac{(3z+1)\sin(z)}{z^2(z+1)^3}\right) = \frac{\cos(1)}{4} - \frac{\sin(1)}{2}.$$

Donc

$$I = 2\pi i\left(0 + \frac{\cos(1)}{4} + \frac{\sin(1)}{2}\right) = \frac{\left(\cos(1) - 2\sin(1)\right)\pi}{2}\,i \approx -1.79i.$$

La figure 2 montre des vérifications avec Nspire : notamment, l'utilisation de la fonction « res_pole » dont le quatrième argument est l'ordre du pôle, l'utilisation de la fonction interne « series » et un calcul d'intégrale numérique après avoir paramétré le cercle qui permet de s'assurer que la réponse exacte était bonne.

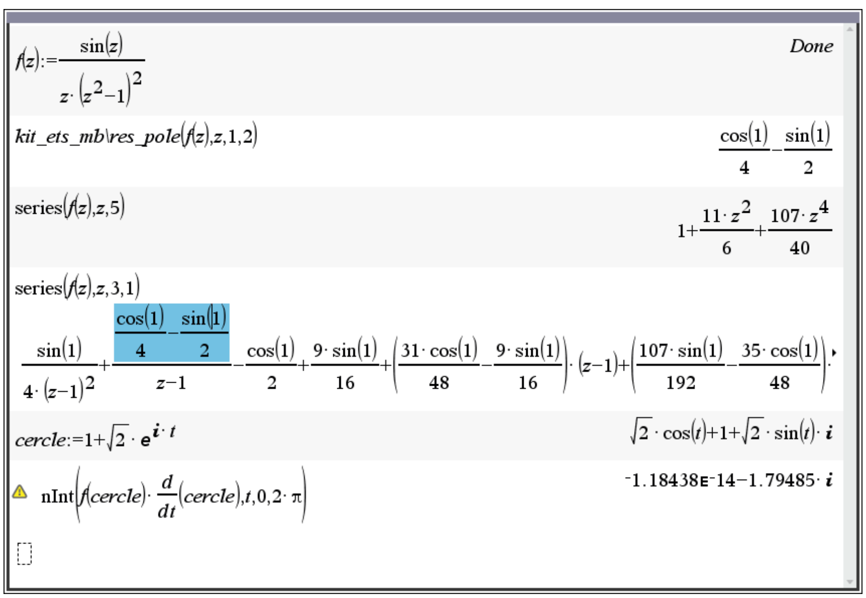

Figure 2

b) $f(z) = \dfrac{\cos(1/z)}{z\left(z^2+1\right)^2}$. La chemin est le cercle T : $\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{3}{4}$.

Ici, le chemin T englobe la singularité 0 qui est une singularité essentielle et la singularité i qui est un pôle double. Il n'englobe pas la singularité $-i$. En effet,

$$\left|0-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}<\frac{3}{4};\ \left|i-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}<\frac{3}{4};\ \left|-i-\frac{i}{2}\right|=\frac{3}{2}>\frac{3}{4}.$$

On le voit aussi en dessinant le chemin T et en plaçant les singularités.

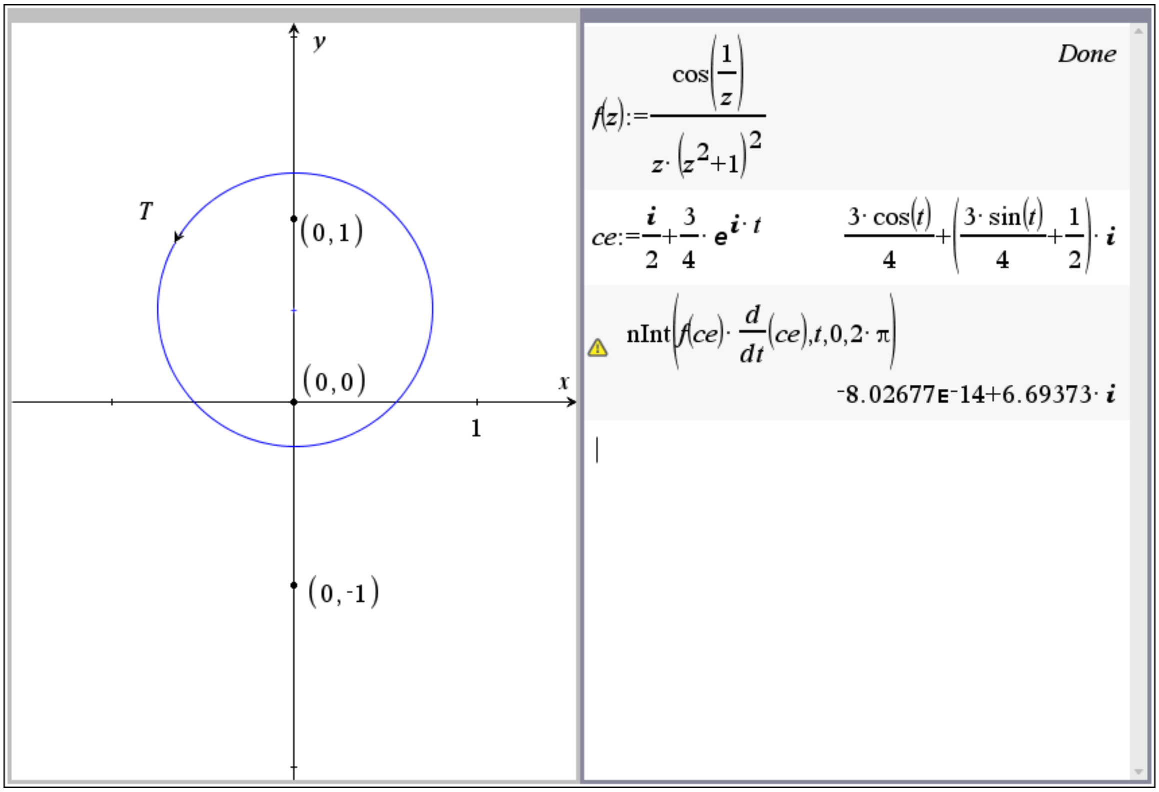

Figure 3

La figure 3 (partie de droite) nous indique aussi quelle réponse numérique on devrait trouver : $6.69373i$.

Afin de trouver le résidu en $z = 0$, trouvons le développement de Laurent de f dans la couronne $0<|z|<1$. Rappelons des conséquences de la série géométrique. Soit $|w|<1$. Alors on sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n=\frac{1}{1-w} \quad (|w|<1) \quad (*)$$

On en déduit les séries suivantes : dans (*), en remplaçant w par $-w$, cela donne

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n=\frac{1}{1+w} \quad (|w|<1) \quad (**)$$

Dans (**), remplaçons w par w^2, on conserve le même domaine de convergence et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{2n} = \frac{1}{1+w^2} \quad (|w|<1) \quad (***)$$

Finalement, en dérivant termes à termes dans (**) (cela est permis à l'intérieur du domaine de convergence), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\, w^{n-1} = \frac{1}{(1+w)^2} \quad (|w|<1) \quad (****)$$

Et, dans le dernier résultat, en remplaçant w par z^2, on en déduit

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\, z^{2(n-1)} \quad (|z|<1).$$

Mais alors, si $0<|z|<1,$ on a

$$\frac{\cos(1/z)}{z\left(z^2+1\right)^2} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\frac{1}{8!z^8}-\cdots\right)\left(1-2z^2+3z^4-4z^6+5z^8-\cdots\right).$$

Entrons le facteur $1/z$ dans la première parenthèse et écrivons ensuite les deux longues parenthèses l'une en-dessous de l'autre afin de faciliter la lecture :

$$\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{4!z^5}-\frac{1}{6!z^7}+\frac{1}{8!z^9}-\cdots\right)$$
$$\left(1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + 5z^8 - \ldots\right)$$

Le coefficient de $1/z$ est

$$1+\frac{2}{2!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{6!}+\frac{5}{8!}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}.$$

Or nous savons que

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z|<\infty), \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z|<\infty).$$

Par conséquent, ce résidu est le nombre cosh(1) + sinh(1)/2.

Quant au résidu en $z = i$, il vaut $\dfrac{-\left(3e^2+1\right)e^{-1}}{8}$ comme l'indiquent les calculs faits à la figure 4. L'intégrale curviligne vaut donc

$$2\pi i\left(\cosh(1)+\frac{1}{2}\sinh(1)-\frac{\left(3e^{2}+1\right)e^{-1}}{8}\right)\approx 6.69373i.$$

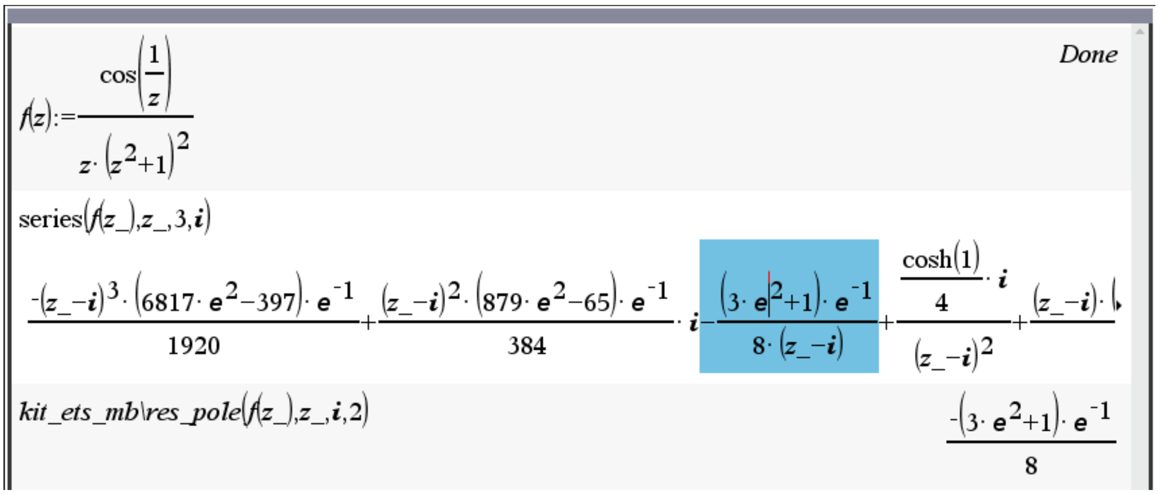

Figure 4

c) $f(z)=\dfrac{2z+\sinh(z)}{(z-4)^3\left(z^2+4\right)}$. La chemin est le cercle $\Omega : |z| = 5$.

La figure 5 montre ce chemin ainsi que les singularités de f. Il est clair que 4 est un pôle d'ordre 3 tandis que $\pm 2i$ sont des pôles simples.

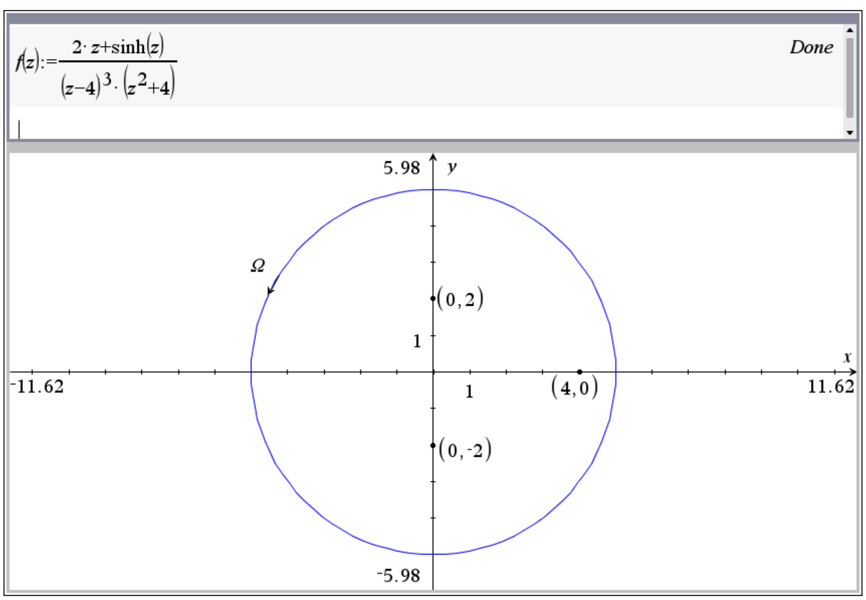

Figure 5

La figure 6 montre que la fonction « series » nous indique ce que valent les résidus en ces pôles :

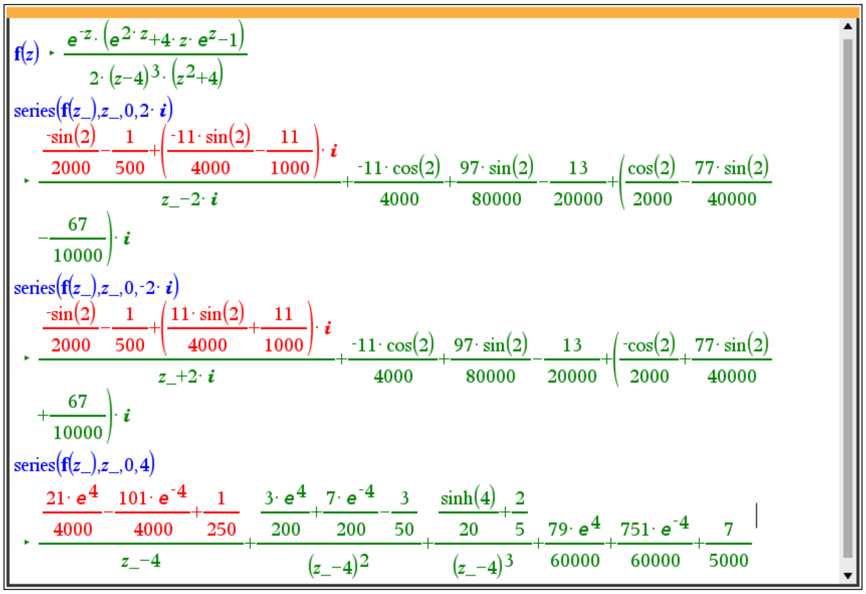

Figure 6

La figure 7 vérifie de nouveau les résidus en utilisant la fonction « res_pole » de la librairie. On y voit aussi la valeur exacte de l'intégrale qui est

$$\frac{-\left(4e^{4}\sin(2)-21e^{8}+101\right)e^{-4}\pi}{2000}i \approx 1.79239i.$$

Et on a comparé avec la valeur retournée par l'intégrateur numérique.

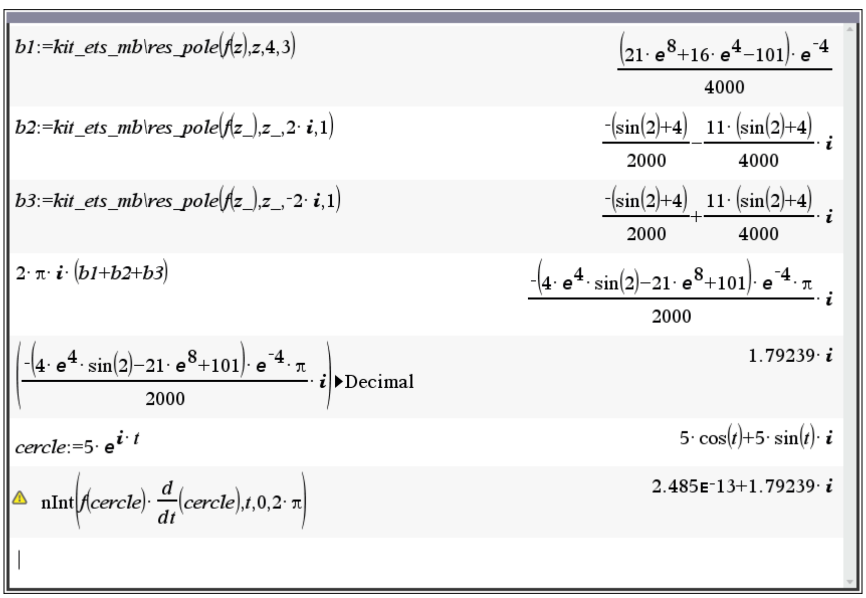

Figure 7