# Chapitre 9

# Résolution de relations de récurrence

Lorsqu'on analyse un algorithme récursif, on obtient généralement une fonction de complexité qui est elle-même récursive. Le but de ce chapitre est de résoudre les relations de récurrences ainsi obtenues. Par exemple, on considère les deux algorithmes récursifs suivants.

**fonction** `Fibo`( $n$ : Entier )
  **si** $n == 0$ **alors**
    **retourner** 0
  **sinon si** $n == 1$ **alors**
    **retourner** 1
  **sinon**
    **retourner** Fibo$(n-1)$ + Fibo$(n-2)$
  **fin si**
**fin fonction**

**fonction** `Somme`( $t$ : Tableau d'entiers de taille $n$ )
  **si** $n == 1$ **alors**
    **retourner** $t[1]$
  **sinon**
    $S_g$ = Somme($t[1..n/2]$) // moitié gauche
    $S_d$ = Somme($t[n/2+1..n]$) // moitié droite
    **retourner** $S_g + S_d$
  **fin si**
**fin fonction**

Soit $f(n)$ le nombre d'additions effectuées par l'algorithme `Fibo` pour une entrée $n$ et $g(n)$ le nombre d'additions effectuées par l'algorithme `Somme` pour un tableau de taille $n$. Alors

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1 & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ 2g(n/2) + 1 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Ces deux fonctions de complexité présentent une différence fondamentale :

- pour la fonction $f$, le paramètre des termes récursifs est $n$ auquel on **soustrait une constante** ;
- pour la fonction $g$, le paramètre des termes récursifs est $n$ **divisé par une constante**.

La section 9.1 montre comment résoudre les relations de récurrence du même type que la fonction $f$ alors que la section 6.2 traite de celles semblables à $g$.

## 9.1 Résolution de relations de récurrence linéaires

Soit $f(n)$ telle que définie à la page précédente. On définit la suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ en posant $f_n = f(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de deux notations différentes pour désigner la même suite :

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0 = 0, \\ f(1) &= f_1 = 0, \\ f(2) &= f_2 = 1, \\ f(3) &= f_3 = 2, \\ f(4) &= f_4 = 4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De manière équivalente, on aurait pu définir directement la suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ par :

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1 \text{ pour } n \geq 2.$$

Ainsi, une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie récursivement ou une suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ définie récursivement constituent deux manières équivalentes de représenter la même information.

**Note** : Pour le reste de cette section, la notation $f_n$ est préférée à $f(n)$ afin d'alléger le texte.

### Déterminer les coefficients d'un polynôme

Pour résoudre une relation de récurrence linéaire, il faut d'abord être en mesure de résoudre le problème suivant :

**Problème :**
Étant donné $n+1$ couples de nombres $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ trouver un polynôme $P(x)$ de degré $n$ tel que $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, …, $P(x_n) = y_n$.

**Solution :**
Un polynôme $P(x)$ de degré $n$, il est de la forme :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

Le problème consiste donc à déterminer les valeurs des $\alpha_i$. On utilise les couples $(x_i, y_i)$ pour former un *système d'équations linéaires* à $n+1$ équations et $n+1$ inconnues (les inconnues sont les $\alpha_i$).

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \cdots + \alpha_n x_0^n, \\ y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_1^n, \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_n x_n^n. \end{aligned}$$

**Exemple 9.1**
Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 2 tel que $P(0) = 3$, $P(1) = 6$, $P(2) = 11$.

**Solution :**
On sait que $P(x)$ est de la forme $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, à partir des valeurs connues, on construit le système d'équations :

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0^2 = 3,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1^2 = 6,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 2^2 = 11.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\alpha_0 = 3,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 6,$$
$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 11.$$

On résout ce système et on obtient $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 1$. On conclut que $P(x) = x^2 + 2x + 3$.

### Exercices

**9.1** Trouver un polynôme $P(x)$,

(a) de degré 0 tel que $P(0) = 2$.

(b) de degré 1 tel que $P(0) = 2$ et $P(2) = 0$.

(c) de degré 2 tel que $P(0) = 2$, $P(2) = 0$ et $P(3) = 3$.

(d) de degré 3 tel que $P(0) = 2$, $P(2) = 0$, $P(3) = 3$ et $P(10) = 1$.

### 9.1.1 Résolution de relations de récurrences linéaires homogènes

**Définition 9.1 : Relation de récurrence linéaire homogène**

Une relation de récurrence d'une suite $\{a_n\}$ est qualifiée de **relation de récurrence linéaire homogène** de degré $k$ à coefficients constants si elle est de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$ avec $k$ conditions initiales

$$a_0 = v_0, \quad a_1 = v_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = v_{k-1}.$$

- **Équation caractéristique** : $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$.
- **Racine caractéristique** : solution $r_0$ de l'équation caractéristique.
- **Multiplicité $m$ d'une racine $r_0$** :

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = (r - r_0)^m Q(r)$$

où $r_0$ n'est pas une racine de $Q(r)$.

**Exemple 9.2**

Considérons la relation de récurrence $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$.

Son équation caractéristique est

$$r^4 - 8r^2 + 16 = 0$$

et puisque

$$r^4 - 8r^2 + 16 = (r-2)^2(r+2)^2,$$

il y a deux racines caractéristiques : $r_1 = 2$ de multiplicité 2 et $r_2 = -2$ de multiplicité 2.

Avec Nspire :

| | |
|---|---|
| $\text{polyRoots}\left(r^4-8\cdot r^2+16,r\right)$ | $\{-2,-2,2,2\}$ |

Attention, lorsqu'on utilise la fonction `zeros()` ou `solve()` les multiplicités n'apparaissent pas.

| | |
|---|---|
| $\text{factor}\left(r^4-8\cdot r^2+16\right)$ | $(r-2)^2\cdot(r+2)^2$ |
| $\text{zeros}\left(r^4-8\cdot r^2+16,r\right)$ | $\{-2,2\}$ |

## Exercices

$\boxed{9.2}$ Pour chaque relation suivante, déterminer s'il s'agit d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants. Lorsque c'est le cas, donnez son degré, son équation caractéristique, ses racines caractéristiques et leurs multiplicités.

(a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,

(b) $b_n = b_{n-1}b_{n-2}$,

(c) $c_n = 4c_{n-1}$,

(d) $d_n = d_{n-1} + 1$,

(e) $e_n = -3e_{n-1} + 4e_{n-3}$,

(f) $f_n = nf_{n-1} + f_{n-2}$,

(g) $g_n = \dfrac{g_{n-2}}{\pi}$.

**Théorème 9.1**

Soit la relation de récurrence linéaire et homogène

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

d'équation caractéristique

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Si l'équation caractéristique admet $t$ racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_t$ de multiplicités $m_1, \ldots, m_t$ respectivement ($m_i \geq 1$ et $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$), alors la solution $\{f_n\}$ de la relation de récurrence est de la forme

$$f_n = p_1(n) r_1^n + p_2(n) r_2^n + \cdots + p_t(n) r_t^n,$$

où $p_i(n)$ est un polynôme de degré $m_i - 1$ en la variable $n$.

**Exemple 9.3**

Si l'équation caractéristique d'une relation de récurrence linéaire homogène a comme racines

$$\begin{aligned} &r_1 \text{ de multiplicité } 1,\\ &r_2 \text{ de multiplicité } 3,\\ &r_3 \text{ de multiplicité } 2,\end{aligned}$$

alors la solution est de la forme

$$f_n = \alpha_1 r_1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n + \alpha_4 n^2) r_2^n + (\alpha_5 + \alpha_6 n) r_3^n.$$

**Exemple 9.4**

Quelle est la solution de la relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, avec $a_0 = 8$, $a_1 = 7$ ?

**Solution :**

On peut calculer les termes $a_2, a_3, a_4, \ldots$ avec Nspire en utilisant :

| | |
|---|---|
| $a(n):=\begin{cases} 8, & n=0 \\ 7, & n=1 \\ a(n-1)+2\cdot a(n-2), & n\geq 2 \end{cases}$ | *Terminé* |
| $a(2)$ | 23 |
| $a(3)$ | 37 |
| seq$(a(n),n,0,8)$ | $\{8,7,23,37,83,157,323,637,1283\}$ |

ou encore en utilisant

| | |
|---|---|
| seqGen$(a(n-1)+2\cdot a(n-2),n,a,\{0,8\},\{8,7\})$ | $\{8,7,23,37,83,157,323,637,1283\}$ |

Nous allons résoudre cette relation de récurrence, c'est-à-dire trouver une formule pour $a_n$ qui ne dépend que de $n$.

1. On détermine l'**équation caractéristique** : $r^2 - r - 2 = 0$
2. On calcule les **racines du polynôme caractéristique** : $r_1 = 2$ et $r_2 = -1$.

| | |
|---|---|
| $\text{polyRoots}(r^2-r-2,r)$ | $\{-1,2\}$ |
| $\text{factor}(r^2-r-2,r)$ | $(r-2)\cdot(r+1)$ |
| $\text{zeros}(r^2-r-2,r)$ | $\{-1,2\}$ |

3. On utilise le Théorème 9.1 pour déterminer la **forme de la solution** (en remplaçant $\alpha_1$ et $\alpha_2$ par $k_1$ et $k_2$ pour gagner du temps lors de l'écriture sur Nspire) : le polynôme possède 2 racines distinctes. La solution $f_n$ sera donc de la forme

$$f_n = \alpha_1 (r_1)^n + \alpha_2 (r_2)^n = \alpha_1 (2)^n + \alpha_2 (-1)^n.$$

| | |
|---|---|
| $f(n):=k1\cdot 2^n+k2\cdot(-1)^n$ | *Terminé* |

4. On détermine les **valeurs des coefficients $\alpha_1$ et $\alpha_2$** à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 8 = a_0 \\ f_1 = \alpha_1(2) + \alpha_2(-1) = 7 = a_1 \end{cases} \implies \alpha_1 = 5 \text{ et } \alpha_2 = 3$$

| | |
|---|---|
| $\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=a(0) \\ f(1)=a(1) \end{cases},k1,k2\right)$ | $k1=5$ and $k2=3$ |

5. Avant de donner la réponse finale, il est prudent de procéder à quelques **vérifications**. Par exemple, on vérifie que $f_2 = 23$ tel que calculé à partir de la relation de récurrence.

| | |
|---|---|
| $f(2)\|k1=5$ and $k2=3$ | 23 |
| $a(2)$ | 23 |

Pour plus de certitude, on peut vérifier plusieurs termes à la fois :

| | |
|---|---|
| $\text{seq}(f(n)\|k1=5$ and $k2=3,n,0,8)$ | $\{8,7,23,37,83,157,323,637,1283\}$ |
| $\text{seq}(a(n),n,0,8)$ | $\{8,7,23,37,83,157,323,637,1283\}$ |

6. **Solution**

$$f_n = 5(2)^n + 3(-1)^n$$

**Remarque technique :**

Nspire ne veut pas afficher la fonction $f(n)$ en mode « Réel ».

| | |
|---|---|
| $f(n)\|k1=5$ and $k2=3$ | "Erreur : Résultat non réel" |

Et l'affichage de $f(n)$ en mode « Complexe rectangulaire » n'est pas du tout ce à quoi on s'attend. On aimerait voir $5(2)^n + 3(-1)^n$, mais on obtient une expression contenant un sinus, un cosinus et le fameux $i$ complexe.


| | |
|---|---|
| $f(n)\mid k1=5$ and $k2=3$ | $5\cdot 2^{n}+3\cdot \cos(n\cdot \pi)+3\cdot \sin(n\cdot \pi)\cdot \boldsymbol{i}$ |

C'est en déclarant que $n$ est un entier ($n := @n1$ ) qu'on obtient le résultat sous la forme souhaitée.

| | |
|---|---|
| $n:=\boldsymbol{n1}$ | $\boldsymbol{n1}$ |
| $f(n)\mid k1=5$ and $k2=3$ | $5\cdot 2^{\boldsymbol{n1}}+3\cdot(-1)^{\boldsymbol{n1}}$ |

## Exercices

$\boxed{9.3}$ Pour chacune des relations de récurrence suivantes, utiliser la commande `seqgen` de la Nspire pour calculer les 8 premiers termes puis trouvez la solution en utilisant le Théorème 9.1.

(a) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ avec les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$.

(b) $b_n = -6b_{n-1} - 11b_{n-2} - 6b_{n-3}$ avec les conditions initiales $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 2$.

(c) $c_n = 6c_{n-1} - 12c_{n-2} + 8c_{n-3}$ avec les conditions initiales $c_1 = -2$, $c_2 = -2$ et $c_3 = -4$.

(d) $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ avec les conditions initiales $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$.

(e) $e_n = 2e_{n-1} + 21e_{n-2} - 20e_{n-3} - 71e_{n-4} + 114e_{n-5} - 45e_{n-6}$ avec les conditions initiales $e_0 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$ et $e_4 = e_5 = 1$.

### 9.1.2 Résolution de relations de récurrence linéaires non homogènes

**Définition 9.2 : Relation de récurrence linéaire non homogène**

Une relation de récurrence d'une suite $\{a_n\}$ est qualifiée de **relation de récurrence linéaire non homogène** de degré $k$ à coefficients constants si elle est de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

avec $k$ conditions initiales

$$a_0 = v_0, \quad a_1 = v_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = v_{k-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $c_k \neq 0$ et $F(n) \neq 0$ est une fonction qui ne dépend que de $n$. La **relation de récurrence homogène associée** (RRHA) est

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

**Exemple 9.5**

La relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ a comme RRHA $a_n = 3a_{n-1}$.

Le Théorème 9.2 qui suit permet de résoudre les relations de récurrence non homogènes dont le terme non homogène (appelé $F(n)$ à la Définition 9.2) est de la forme : $Q(n)s^n$ où $Q(n)$ est un polynôme en la variable $n$ et $s \in \mathbb{R}$.

### Exercices

**9.4** Déterminer si les termes suivants sont de la forme $Q(n)s^n$ avec $Q(n)$ un polynôme en $n$ et $s \in \mathbb{R}$.

(a) $(n+1) - 2^2$

(b) $(n+1)(-2)^2$

(c) $n^2$

(d) $3^n n^2$

(e) $\dfrac{\pi^2}{6}$

(f) $2^n + (-1)^n$

**Théorème 9.2**

Toute solution $\{f_n\}$ de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

est de la forme

$$f_n = p_n + h_n,$$

où $\{p_n\}$ est une solution particulière et $\{h_n\}$ est une solution de la RRHA.

**Comment trouver une solution particulière?**

Dans le cas où $F(n) = Q(n)s^n$, avec $Q(n)$ un polynôme de degré $t$ et $s \in \mathbb{R}$, alors

- si $s$ **n'est pas une racine** de l'équation caractéristique de la RRHA, alors

$$p_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_{t-1} n^{t-1} + \beta_t n^t) s^n;$$

- sinon si $s$ **est une racine** de l'équation caractéristique de multiplicité $m$ de la RRHA, alors

$$p_n = n^m (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_{t-1} n^{t-1} + \beta_t n^t) s^n.$$

**Exemple 9.6**

Quelle est la forme de la solution particulière de la relation de récurrence $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + F(n)$ si

(a) $F(n) = 7^n$ ?

(b) $F(n) = 2^n$ ?

(c) $F(n) = n^2(-1)^n$ ?

(d) $F(n) = (n-1)3^n$ ?

**Solution :**

La RRHA est $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, l'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$. Ainsi, les racines caractéristiques sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$, toutes deux de multiplicité 1.

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $p_n = \beta_0 7^n$ | ($Q(n) = 1$; $t = 0$; $s = 7$ n'est pas une racine) |
| (b) | $p_n = n\beta_0 2^n$ | ($Q(n) = 1$; $t = 0$; $s = 2$ est une racine de multiplicité 1) |
| (c) | $p_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2)(-1)^n$ | ($Q(n) = n^2$; $t = 2$; $s = -1$ n'est pas une racine) |
| (d) | $p_n = n(\beta_0 + \beta_1 n)3^n$ | ($Q(n) = n-1$; $t = 1$; $s = 3$ est une racine de multiplicité 1) |

Lorsqu'on résout une relation de récurrence linéaire non homogène, les valeurs des coefficients de la solution particulière (les $\beta_i$ dans l'exemple ci-dessus) **ne dépendent pas des conditions initiales**. Leurs valeurs peuvent être déterminées directement à partir de la relation de récurrence. On utilise alors le fait que la solution particulière est une solution de la relation de récurrence initiale.

**Exemple 9.7**

À l'exemple 9.6 (a), la solution particulière est de la forme $p_n = \beta_0 7^n$. Ainsi, on sait que $\beta_0 7^n$ est une solution de la relation de récurrence $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$. En donnant une valeur à $n$, on obtient une équation en $\beta_0$. Par exemple, on peut choisir $n = 2$ :

$$
\begin{aligned}
p_n &= 5p_{n-1} - 6p_{n-2} + 7^n, & \\
p_2 &= 5p_1 - 6p_0 + 7^2, & \text{(en posant } n = 2) \\
49\beta_0 &= 5(7\beta_0) - 6(\beta_0) + 49. & \text{(puisque } p_0 = \beta_0,\ p_1 = 7\beta_0 \text{ et } p_2 = 49\beta_0)
\end{aligned}
$$

Ainsi on trouve $\beta_0 = \frac{49}{20}$. On a donc que $p_n = \dfrac{7^{n+2}}{20}$.

**Remarque :** Dans cet exemple, la solution particulière est exprimée en fonction d'une seule inconnue. Il a donc suffit d'une équation pour déterminer sa valeur. En général, la solution particulière est exprimée en fonction de plusieurs inconnues ; il faut alors générer autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Pour obtenir plus d'équations, il suffit de remplacer $n$ par différentes valeurs entières dans la relation de récurrence initiale.

## Exercices

**9.5** Déterminer les valeurs des $\beta_i$ des solutions particulières obtenues à l'exemple 9.6 (b), (c) et (d).

**Exemple 9.8**

Trouver toutes les solutions de $a_n = 4a_{n-1} + 3n$.

**Solution :**

1. **Solution de la relation de récurrence homogène associée**
   On identifie la **RRHA** : $a_n = 4a_{n-1}$.
   On détermine l'**équation caractéristique de la RRHA** : $r - 4 = 0$.
   On calcule les **racines du polynôme caractéristique de la RRHA** : $r_1 = 4$.

   | | |
   |---|---|
   | polyRoots$(r-4,r)$ | $\{4\}$ |

   On utilise le Théorème 9.1 pour trouver la **forme de la solution de la RRHA** : $h_n = \alpha_1 4^n$.
2. **Solution particulière** On utilise le Théorème 9.2 pour déterminer la **forme de la solution particulière** (en remplaçant $\beta_0$ et $\beta_1$ par $c_0$ et $c_1$ pour gagner du temps lors de l'écriture sur Nspire). Comme $F(n) = 3n = 3n(1)^n$ on a $s = 1$ (qui n'est pas une racine) et $t = 1$ (le degré de $3n$). La solution $p_n$ est donc de la forme
   $$p_n = \beta_0 + \beta_1 n.$$

   | | |
   |---|---|
   | $p(n):=c0+c1\cdot n$ | *Terminé* |

   On détermine les **valeurs des coefficients $\beta_0$ et $\beta_1$** : comme $p_n$ est une solution particulière, elle satisfait la relation de récurrence, c'est-à-dire $p_n = 4p_{n-1} + 3n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\beta_0+\beta_1 n &= 4(\beta_0+\beta_1(n-1))+3n \\ &= (4\beta_0-4\beta_1)+(4\beta_1+3)n\end{aligned} \implies \begin{cases}\beta_0=4\beta_0-4\beta_1\\ \beta_1=4\beta_1+3\end{cases} \implies \beta_0=-\frac{4}{3} \text{ et } \beta_1=-1.$$

La solution particulière est donc

$$p_n=-\frac{4}{3}-n.$$

| | |
|---|---|
| $eq:=p(n)=4\cdot p(n-1)+3\cdot n$ | $n\cdot c1+c0=n\cdot(4\cdot c1+3)+4\cdot(c0-c1)$ |
| $coeff1:=\text{solve}\left(\begin{cases}eq\vert n=2\\ eq\vert n=3\end{cases},c0,c1\right)$ | $c0=\frac{-4}{3}$ and $c1=-1$ |

3. **Forme de la solution**

$$f_n=h_n+p_n=\alpha_1 4^n-\frac{4}{3}-n$$

| | |
|---|---|
| $f(n):=k1\cdot 4^n+p(n)\vert coeff1$ | *Terminé* |
| $f(n)$ | $4^n\cdot k1-n-\frac{4}{3}$ |

**Exemple 9.9**

Trouver la solution de $a_n=4a_{n-1}+3n$, avec la condition initiale $a_1=2$.

**Solution :**

1. **Solution de la relation de récurrence homogène associée**

   On identifie la **RRHA** : $a_n=4a_{n-1}$.

   On détermine l'**équation caractéristique de la RRHA** : $r-4=0$.

   On calcule les **racines du polynôme caractéristique de la RRHA** : $r_1=4$.

   | | |
   |---|---|
   | polyRoots$(r-4,r)$ | $\{4\}$ |

   On utilise le Théorème 9.1 pour trouver la **forme de la solution de la RRHA** : $h_n=\alpha_1 4^n$.

2. **Solution particulière**

   On utilise le Théorème 9.2 pour déterminer la **forme de la solution particulière** (en remplaçant $\beta_0$ et $\beta_1$ par $c_0$ et $c_1$ pour gagner du temps lors de l'écriture sur Nspire). Comme $F(n)=3n=3n(1)^n$ on a $s=1$ (qui n'est pas une racine) et $t=1$ (le degré de $3n$). La solution $p_n$ est donc de la forme

$$p_n=\beta_0+\beta_1 n.$$

   | | |
   |---|---|
   | $p(n):=c0+c1\cdot n$ | *Terminé* |

3. **Forme de la solution**

$$f_n=h_n+p_n=\alpha_1 4^n+\beta_0+\beta_1 n.$$

4. **Coefficients**
On détermine les **valeurs des coefficients $\alpha_1$, $\beta_0$ et** $\beta_1$ : (en remplaçant $\alpha_1$ par $k_1$ et $\beta_0$, $\beta_1$ par $c_0$, $c_1$ pour gagner du temps lors de l'écriture sur Nspire). Comme il y a trois coefficients à trouver, il nous faut donc aussi 3 équations.

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_1 4 + \beta_0 + \beta_1 = 2 = a_1 \\ f_2 = \alpha_1 4^2 + \beta_0 + \beta_1 2 = 14 = a_2 \\ f_3 = \alpha_1 4^3 + \beta_0 + \beta_1 3 = 65 = a_3 \end{cases} \implies \alpha_1 = \frac{13}{12}, \quad \beta_0 = -\frac{4}{3}, \quad \beta_1 = -1.$$

| | |
|---|---|
| $a(n):=\begin{cases} 2, & n=1 \\ 4\cdot a(n-1)+3\cdot n, & n\geq 2 \end{cases}$ | *Terminé* |
| $f(n):=k1\cdot 4^n+c0+c1\cdot n$ | *Terminé* |
| $coeff:=\text{solve}\left(\begin{cases} f(1)=a(1) \\ f(2)=a(2) \\ f(3)=a(3) \end{cases}, k1, c0, c1\right)$ | $k1=\frac{13}{12}$ and $c0=\frac{-4}{3}$ and $c1=-1$ |

5. **Solution**

| | |
|---|---|
| $f(n)\mid coeff$ | $\frac{13\cdot 4^n}{12}-n-\frac{4}{3}$ |

$$f_n = \frac{13}{12}4^n - \frac{4}{3} - n.$$

6. **Vérification**

| | |
|---|---|
| seq$(a(n),n,1,8)$ | $\{2,14,65,272,1103,4430,17741,70988\}$ |
| seq$(f(n)\mid coeff,n,1,8)$ | $\{2,14,65,272,1103,4430,17741,70988\}$ |

## Exercices

**9.6**

(a) Trouver la solution de $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4^n$, avec les conditions initiales $a_1 = 3$, $a_2 = 2$.

(b) Trouver la solution de $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, avec les conditions initiales $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

(c) Trouver la solution de $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + n^2 2^n$, avec les conditions initiales $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$.

# Réponses

## Chapitre 9

**Rép. 9.1** (a) On obtient un système d'équations à une équation et une inconnue :

$$\alpha_0 = 2$$

Ainsi, $P(x) = 2$.

(b) On obtient un système d'équations à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2 \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -1$, et donc $P(x) = -x + 2$.

(c) On obtient un système d'équations à trois équations et trois inconnues :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2 \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

On obtient $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = \dfrac{-11}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{4}{3}$, et donc $P(x) = \dfrac{4x^2}{3} - \dfrac{11x}{3} + 2$.

(d) On obtient un système d'équations à quatre équations et quatre inconnues :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2 \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 &= 3 \\ \alpha_0 + 10\alpha_1 + 100\alpha_2 + 1000\alpha_3 &= 1 \end{aligned}$$

On obtient $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = \dfrac{-3959}{480}$, $\alpha_2 = \dfrac{247}{112}$, $\alpha_3 = \dfrac{-293}{480}$, et donc

$$P(x) = \frac{-293x^3}{1680} + \frac{247x^2}{112} - \frac{3959x}{840} + 2.$$

**Rép. 9.2** (a) Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 2.
- Équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0$.
- Racine caractéristique : $\begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ de multiplicité } m_1 = 1, \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ de multiplicité } m_2 = 1. \end{cases}$

(b) Pas linéaire.

(c) Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 1.
- Équation caractéristique : $r - 4 = 0$.
- Racine caractéristique : $r_1 = 4$ de multiplicité $m_1 = 1$.

(d) Pas homogène.

(e) Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 3.
- Équation caractéristique : $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$.
- Racines caractéristiques : $\begin{cases} r_1 = -2, \text{ de multiplicité } m_1 = 2, \\ r_2 = 1, \text{ de multiplicité } m_2 = 1. \end{cases}$

(f) Pas à coefficients constants.

(g) Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 2.
- Équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{\pi} = 0$.
- Racines caractéristiques : $\begin{cases} r_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \text{ de multiplicité } m_1 = 1, \\ r_2 = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}, \text{ de multiplicité } m_2 = 1. \end{cases}$

**Rép. 9.3** (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$, $a_5 = 32$, $a_6 = 64$, $a_7 = 128$.
1. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
2. Racines caractéristiques : $\begin{cases} r_1 = 1, \text{ de multiplicité } m_1 = 1, \\ r_2 = 2, \text{ de multiplicité } m_2 = 1. \end{cases}$
3. Forme de la solution : $a_n = \alpha_0(1)^n + \alpha_1(2)^n$.
4. Valeurs des $\alpha_i$, on résout le système d'équations :
$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= 1 && \text{(pour } n = 0) \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 &= 2 && \text{(pour } n = 1) \end{aligned}$$
On obtient $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.
5. Solution : $a_n = 2^n$.

(b) $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = -23$, $b_4 = 110$, $b_5 = -419$, $b_6 = 1442$, $b_7 = -4703$.
1. Équation caractéristique : $r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0$.
2. Racines caractéristiques : $\begin{cases} r_1 = -1, \text{ de multiplicité } m_1 = 1, \\ r_2 = -2, \text{ de multiplicité } m_2 = 1. r_3 = -3, \text{ de multiplicité } m_3 = 1. \end{cases}$
3. Forme de la solution : $b_n = \alpha_0(-1)^n + \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(-3)^n$.
4. Valeurs des $\alpha_i$, on résout le système d'équations :
$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 && \text{(pour } n = 0) \\ -\alpha_0 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 &= 1 && \text{(pour } n = 1) \\ \alpha_0 + 4\alpha_1 + 9\alpha_2 &= 2 && \text{(pour } n = 2) \end{aligned}$$
On obtient $\alpha_0 = \frac{7}{2}$, $\alpha_1 = -6$ et $\alpha_2 = \frac{5}{2}$.
5. Solution : $b_n = \frac{7}{2}(-1)^n - 6(-2)^n + \frac{5}{2}(-3)^n$.

(c) $c_1 = -2$, $c_2 = -2$, $c_3 = -4$, $c_4 = -16$, $c_5 = -64$, $c_6 = -224$, $c_7 = -704$, $c_8 = -2048$.

1. Équation caractéristique : $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$.
2. Racine caractéristique : $r_1 = 2$, de multiplicité $m_1 = 3$.
3. Forme de la solution : $c_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2)(2)^n$.
4. Valeurs des $\alpha_i$, on résout le système d'équations :

$$\begin{aligned} 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= -2 && \text{(pour } n = 1\text{)} \\ 4\alpha_0 + 8\alpha_1 + 16\alpha_2 &= -2 && \text{(pour } n = 2\text{)} \\ 8\alpha_0 + 24\alpha_1 + 72\alpha_2 &= -4 && \text{(pour } n = 3\text{)} \end{aligned}$$

   On obtient $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = \frac{5}{4}$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{4}$.

5. Solution : $c_n = \left(-2 + \dfrac{5n}{4} - \dfrac{n^2}{4}\right) 2^n$.

(d) $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$, $d_5 = 5$, $d_6 = 8$, $d_7 = 13$.

1. Équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0$.
2. Racines caractéristiques : $\begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ de multiplicité } m_1 = 1, \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ de multiplicité } m_2 = 1. \end{cases}$
3. Forme de la solution : $d_n = \alpha_0 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_1 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
4. Valeurs des $\alpha_i$, on résout le système d'équations :

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= 0 && \text{(pour } n = 0\text{)} \\ \alpha_0 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 && \text{(pour } n = 1\text{)} \end{aligned}$$

   On obtient $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\alpha_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

5. Solution : $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$.

(e) $e_0 = 0$, $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$, $e_4 = 1$, $e_5 = 1$, $e_6 = 23$, $e_7 = 47$.

1. Équation caractéristique : $r^6 - 2r^5 - 21r^4 + 20r^3 + 71r^2 - 114r + 45 = 0$.
2. Racines caractéristiques : $\begin{cases} r_1 = 1, \text{ de multiplicité } m_1 = 3, \\ r_2 = -3, \text{ de multiplicité } m_2 = 2, \\ r_3 = 5, \text{ de multiplicité } m_3 = 1, \end{cases}$
3. Forme de la solution : $e_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2)(1)^n + (\alpha_3 + \alpha_4 n)(-3)^n + \alpha_5 (5)^n$.
4. Valeurs des $\alpha_i$, on résout le système d'équations :

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_5 &= 0 && \text{(pour } n = 0\text{)} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 - 3\alpha_4 + 5\alpha_5 &= 0 && \text{(pour } n = 1\text{)} \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + 18\alpha_4 + 25\alpha_5 &= 0 && \text{(pour } n = 2\text{)} \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 - 27\alpha_3 - 81\alpha_4 + 125\alpha_5 &= 0 && \text{(pour } n = 3\text{)} \\ \alpha_0 + 4\alpha_1 + 16\alpha_2 + 81\alpha_3 + 324\alpha_4 + 625\alpha_5 &= 1 && \text{(pour } n = 4\text{)} \\ \alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 - 243\alpha_3 - 1215\alpha_4 + 3125\alpha_5 &= 1 && \text{(pour } n = 5\text{)} \end{aligned}$$

   On obtient $\alpha_0 = \frac{1}{256}$, $\alpha_1 = \frac{-1}{64}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{-5}{1024}$, $\alpha_4 = \frac{1}{384}$ et $\alpha_5 = \frac{1}{1024}$.

5. Solution : $e_n = \dfrac{1}{256} - \dfrac{n}{64} + \left(\dfrac{-5}{1024} + \dfrac{n}{384}\right)(-3)^n + \dfrac{1}{1024} 5^n$.

**Rép. 9.4** (a) Non, l'exponentielle est soustraite au polynôme et non multipliée.
(b) Oui, avec $Q(n) = n+1$ et $s = -2$.
(c) Oui, avec $Q(n) = n^2$ et $s = 1$.
(d) Oui, avec $Q(n) = n^2$ et $s = 3$.
(e) Oui, avec $Q(n) = \frac{\pi^2}{6}$ et $s = 1$.
(f) Non, il s'agit d'une somme de deux exponentielles ayant des bases différentes.

**Rép. 9.5** (b) Pour $n = 2$, on obtient l'équation : $8\beta_0 = 10\beta_0 + 4$. La solution est $\beta_0 = -2$.
(c) On choisit $n = 2,3,4$ et on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
\left(\beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2\right) &= 5\left(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2\right)(-1) - 6\beta_0 + 4 && \text{(pour } n = 2\text{)}\\
\left(\beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2\right)(-1) &= 5\left(\beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2\right) - 6\left(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2\right) - 9 && \text{(pour } n = 3\text{)}\\
\left(\beta_0 + 4\beta_1 + 16\beta_2\right) &= 5\left(\beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2\right)(-1) - 6\left(\beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2\right) + 16 && \text{(pour } n = 4\text{)}
\end{aligned}$$

La solution est : $\beta_0 = \dfrac{115}{864}$, $\beta_1 = \dfrac{17}{72}$ et $\beta_2 = \dfrac{1}{12}$.
(d) On choisit $n = 2,3$ et on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
18(\beta_0 + 2\beta_1) &= 15(\beta_0 + \beta_1) - 6\cdot 0 + 9 && \text{(pour } n = 2\text{)}\\
81(\beta_0 + 3\beta_1) &= 90(\beta_0 + 2\beta_1) - 18(\beta_0 + \beta_1) + 54 && \text{(pour } n = 3\text{)}
\end{aligned}$$

La solution est : $\beta_0 = \dfrac{-15}{2}$ et $\beta_1 = \dfrac{3}{2}$.

**Rép. 9.6** (a)
- Solution de la RRHA : $h_n = \alpha_0 2^n + \alpha_1 3^n$.
- Solution particulière : $p_n = 8\cdot 4^n$,
- Solution de la relation de récurrence : $a_n = \dfrac{39}{2}2^n - \dfrac{68}{3}3^n + 8\cdot 4^n$.

(b)
- Solution de la RRHA : $h_n = \alpha_0\varphi^n + \alpha_1\overline{\varphi}^n$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Solution particulière : $p_n = -1$,
- Solution de la relation de récurrence : $a_n = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\varphi^n + \dfrac{5-\sqrt{5}}{5}\overline{\varphi}^n - 1$.

(c)
- Solution de la RRHA : $h_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n)2^n + \alpha_3$.
- Solution particulière : $p_n = \dfrac{1}{6}\left(11 + n^2\right)n^2 2^n$.
- Solution de la relation de récurrence : $a_n = \left(\dfrac{157}{2} - 32n + \dfrac{11n^2}{6} + \dfrac{n^4}{6}\right)2^n - 95$.

Rédigé par Geneviève Savard, Anouk Bergeron-Brlek et Xavier Provençal,
révisé en juin 2020 par Marie Forest et Geneviève Savard,
Service des enseignements généraux,
École de technologie supérieure.