3.0 EXERCICES AÉRODYNAMISME

Exercice n° 3.2 : Courbe de puissance

QUESTIONS :

1. Pour un grand nombre de turbine, le coefficient de puissance est relié à la vitesse spécifique par un polynôme de degré trois de la forme :

$$C_p(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

À l'aide des hypothèses suivantes, déterminez l'expression de $C_p(\lambda)$:

1) λ_{Max} est la vitesse spécifique correspondant au coefficient de puissance maximal $C_{p_{Max}}$
2) Le coefficient de puissance est nul lorsque la vitesse spécifique est elle aussi nulle
3) La pente de la courbe du coefficient de puissance est nulle pour une vitesse spécifique nulle
4) La pente de la courbe du coefficient de puissance est également nulle pour une vitesse spécifique maximale

REPONSES

1. Les différentes hypothèses peuvent être mise sous forme d'un système d'équations. Nous avons quatre hypothèses pour quatre inconnus, le système peut se résoudre.

   L'évaluation de la pente de la courbe du coefficient de puissance nécessite de connaître la dérivée du coefficient du puissance en fonction de la vitesse spécifique (pente nulle = dérivée nulle) :

$$\frac{dC_p}{d_\lambda} = 3a\lambda^2 + 2b\lambda + c$$

   Le système d'équation (dans l'ordre des hypothèses) s'écrit alors de cette façon :

$$\begin{cases} C_{p_{Max}} = a\lambda_{Max}^3 + b\lambda_{Max}^2 + c\lambda_{Max} + d \\ C_p(0) = d = 0 \\ \dfrac{dC_p(0)}{d\lambda} = c = 0 \\ \dfrac{dC_p(\lambda_{Max})}{d\lambda} = 3a\lambda_{Max}^2 + 2b\lambda_{Max} = 0 \end{cases}$$

   Ce système d'équation permet d'ores et déjà de conclure que $\boxed{c = d = 0.}$

   Le système d'équation précédent peut alors se simplifier (la division par λ_{Max} est possible car sinon λ_{Max} serait nulle et il n'y aurait aucun intérêt) :

$$\begin{cases} C_{p_{Max}} = a\lambda_{Max}^3 + b\lambda_{Max}^2 \\ b = -\dfrac{3}{2}a\lambda_{Max} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{C_{p_{Max}}}{\lambda_{Max}^3} - \dfrac{b}{\lambda_{Max}} \\ b = -\dfrac{3}{2}a\lambda_{Max} \end{cases}$$

   La résolution de ce système donne alors :

$$\boxed{\begin{cases} a = -2\dfrac{C_{p_{Max}}}{\lambda_{Max}^3} \\ b = 3\dfrac{C_{p_{Max}}}{\lambda_{Max}^2} \end{cases}}$$

   On obtient in fine la relation entre le coefficient de puissance et la vitesse spécifique :

$$\boxed{C_p(\lambda) = -2\frac{C_{p_{Max}}}{\lambda_{Max}^3} * \lambda^3 + 3\frac{C_{p_{Max}}}{\lambda_{Max}^2} * \lambda^2}$$