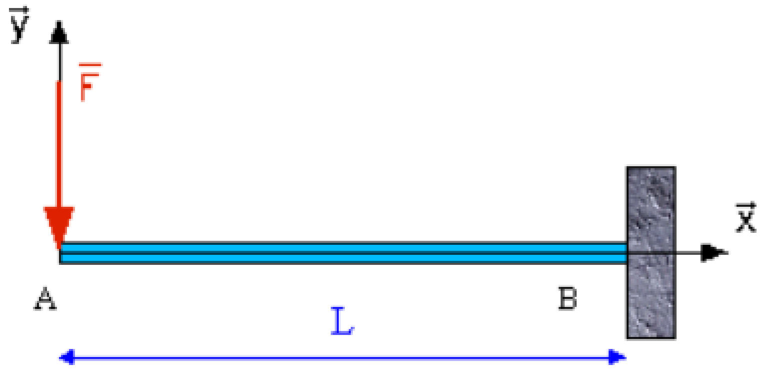
5.0 EXERCICES MÉCANIQUE ET DYNAMIQUE

Exercice n° 5.2 : Contraintes dans l'arbre de rotation

QUESTIONS :

L'arbre principal de 2 m de long d'une éolienne porte à son extrémité un moyeu et un rotor de 1500 kg. L'arbre est supposé être encastré à son autre extrémité.



L'arbre est un arbre cylindrique en acier de diamètre 0,15 m. Le module d'Young (E) de cet acier est de 210 GPa.

De combien l'arbre se plie-t-il vers le bas à son extrémité en raison de la charge du rotor/moyeu ?

Pour répondre à cette question, on donne l'expression de l'équation de la déformée $y(x)$:

$$EIy'' = -Fx$$

Le moment quadratique d'un arbre cylindrique de diamètre D est :

$$I = \frac{\pi D^4}{64}$$

REPONSES

Il faut dans un premier temps explicité la déformée en fonction de x :

$$EIy''(x) = -Fx$$
$$y'(x) = -\frac{F}{2EI}x^2 + C_1$$
$$y(x) = -\frac{F}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

Pour déterminer les constantes C_1 et C_2, on utilise les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y(L) = 0 \ \ \textit{car la déformée est nulle à l'encastrement} \\ y'(L) = 0 \ \ \textit{car la tangente est nulle à l'encastrement} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} y(L) = -\frac{F}{6EI}L^3 + C_1L + C_2 = 0 \\ y'(L) = -\frac{F}{2EI}L^2 + C_1 = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$C_2 = -\frac{FL^3}{3EI}$$
$$C_1 = \frac{F}{2EI}L^2$$

La déformée s'écrit donc :

$$y(x) = -\frac{F}{6EI}(x^3 - 3L^2x + 2L^3)$$

La flèche (déplacement à l'extrémité de la poutre) s'obtient en évaluant la déformée en 0 :

$$f = y(0) = -\frac{FL^3}{3EI}$$

Il ne reste plus qu'à faire l'application numérique :

$$f = -\frac{m * g * L^3}{3 * E * \frac{\pi D^4}{64}}$$

$$f = -\frac{1\,500 * 9{,}81 * 2^3}{3 * 210 * 10^9 * \frac{\pi * 0{,}15^4}{64}}$$

$$\boxed{f = -\,7{,}5\ mm}$$

Ainsi, sous l'effet du poids du moyeu et du rotor, l'arbre se plie de 7,5 mm vers le bas à son extrémité.