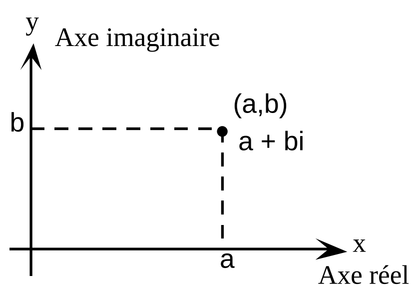
On peut quelquefois rencontrer des équations qui ne possèdent pas de solutions réelles. C'est le cas, par exemple, de l'équation $x^2 + 25 = 0$. Les solutions de cette équation, $\pm 5i$, font partie d'un ensemble de nombres qu'on appelle les nombres complexes (noté $\mathbb{C}$); cet ensemble est formé à partir des nombres réels auxquels on ajoute $i = \sqrt{-1}$. Cette dernière valeur n'est évidemment pas un nombre réel, donc ce n'est pas une quantité mesurable.

En électronique, la lettre *i* étant utilisée pour désigner l'intensité du courant, c'est la lettre j qui sert pour le nombre $\sqrt{-1}$. Ici, on se servira de *i*.

Un nombre complexe sous **forme standard** est un nombre de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et i est l'unité des nombres imaginaires. Si $b \neq 0$, alors $a + bi$ est aussi appelé **nombre imaginaire ou nombre complexe**. Si $b = 0$, alors $a + 0i$ est un **nombre réel**. Le **zéro** des complexes est $0 + 0i = 0$. Le **conjugué** de $a + bi$ est $a - bi$.

La figure suivante nous montre un nombre complexe $a + bi$ dessiné dans le **plan complexe**.



Plan complexe

Lorsque l'on fait correspondre des nombres complexes à des points dans un système de coordonnées rectangulaires, l'axe des x devient l'**axe réel** et l'axe des y devient l'**axe imaginaire**. Le nombre complexe $a + bi$ est exprimé sous **forme rectangulaire**, a étant la partie réelle et b la partie imaginaire du nombre complexe.

L'**égalité, l'addition et la multiplication** des nombres complexes est définie par:

1. $a + bi = c + di$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
2. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ et $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
3. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Puisque les nombres complexes jouissent des mêmes propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité que les nombres réels, la plupart des calculs sur les nombres complexes sont effectués à l'aide de ces dernières propriétés et aussi de la formule $i^2 = -1$. La recherche de l'**inverse multiplicatif** d'un nombre complexe et la manipulation de **quotients** amènent à utiliser la **propriété des conjugués**: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Si $a > 0$, alors la **racine carrée principale d'un réel négatif** $-a$ est $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$.
Par exemple, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$

Exemple : Effectuez les opérations suivantes

a) $(2 - 5i) + (3 + i)$ b) $(4 - 3i)\cdot(1 - 2i)$ c) $\frac{1}{2+3i}$ d) $\frac{7-3i}{1+i}$

Solutions : a) En suivant la règle #2 ci-dessus:

$$(2 - 5i) + (3 + i) = (2 + 3) + (-5 + 1)i = 5 - 4i$$

b) En suivant la règle #3 ci-dessus:

$$(4 -3i)\cdot(1 - 2i) = (4\cdot1 - [-3]\cdot[-2]) + (4\cdot[-2] + [-3]\cdot1)i = (4 - 6) + (-8 - 3)i = -2 - 11i$$

c) Simplifions cette expression en utilisant le conjugué du dénominateur:

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

d) On procède comme pour l'expression précédente:

$$\frac{7-3i}{1+i} = \frac{7-3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{4-10i}{2} = 2-5i$$

Une **équation quadratique** sous **forme standard** est une équation qui peut être ramenée sous la forme $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$, où x est la variable et a, b et c sont des constantes réelles. On peut toujours résoudre cette équation avec la **formule quadratique**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si le **discriminant** $b^2 - 4ac$ est positif, l'équation possède deux **racines réelles** distinctes; si le discriminant est égal à 0, l'équation possède une **racine réelle double**; si le discriminant est négatif, l'équation possède deux **racines imaginaires (nombres complexes)**, chacune étant la conjuguée de l'autre.

Exemple : Déterminez combien de racines possède chacune des équations suivantes:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $9x^2 + 30x + 25 = 0$ c) $5x^2 + 4x + 1 = 0$

Solutions :

a) $a = 2$; $b = -5$; $c = 3 \Rightarrow b^2 - 4ac = 25 - 4\cdot6 = 1 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles distinctes: 1 et $\frac{3}{2}$

b) $a = 9$; $b = 30$; $c = 25 \Rightarrow b^2 - 4ac = 900 - 4\cdot225 = 0 \Rightarrow$ une seule racine, double: $\frac{-5}{3}$

c) $a = 5$; $b = 4$; $c = 1 \Rightarrow b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot5 = -4 < 0 \Rightarrow$ 2 racines complexes: $\frac{-2}{5} \pm \frac{i}{5}$

Il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations qui ne sont pas des équations quadratiques, par exemple $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$, mais qui peuvent se ramener à cette forme à l'aide d'un **changement de variable approprié**: pour notre exemple, si on pose $u = x^2$ ($\Rightarrow x^4 = u^2$), on obtient :

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 + 3u - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (u+4)(u-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x^2+4)(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \text{ soit } x^2 + 4 = 0 \text{ donc } x^2 = -4 \text{ et } x = \pm 2i$$
$$\Rightarrow \text{ soit } x^2 - 1 = 0 \text{ donc } (x+1)(x-1) = 0 \text{ et } x = \pm 1$$

EXERCICES (Faites les exercices manuellement et vérifiez vos réponses avec votre TI)

1- Effectuez et donnez sous forme standard

a) $\left(-3+2i\right)+(6-8i)$ b) $(-3-3i)(2+3i)$ c) $\dfrac{13-i}{5-3i}$

2- Effectuez et écrivez sous forme standard

a) $(3+i)^2 - 2(3+i)+3$ b) i^{27}

3- Réécrivez sous la forme $a+bi$ et effectuez

a) $(2-\sqrt{-4}-(3-\sqrt{-9})$ b) $\dfrac{2-\sqrt{-1}}{3+\sqrt{-4}}$ c) $\dfrac{4+\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$

4- Évaluez $\dfrac{3,77-8,47i}{6,82-7,06i}$ avec votre TI (arrondissez votre réponse à 2 décimales)

Résolvez les équations suivantes.

5- $2x^2 = 4x$ **6-** $2x^2 = 7x-3$ **7-** $m^2 + m + 1 = 0$

8- $y^2 = \dfrac{3}{2}(y+1)$ **9-** $1 + \dfrac{3}{u^2} = \dfrac{2}{u}$ **10-** $m^4 + 5m^2 - 36 = 0$

RÉPONSES

1- a) $3-6i$ b) $3-15i$ c) $2+i$

2- a) $5+4i$ b) $i^{27} = i^{26}i = \left(i^2\right)^{13} i = \left(-1\right)^{13} i = \left(-1\right)i = -i$

3- a) $-1+i$ b) $\dfrac{4}{13} - \dfrac{7}{13}i$ c) $\dfrac{5}{2} - 2i$

4- $0,89-0,32i$ **5-** $x=0$ ou $x=2$ **6-** $x \in \left\{\dfrac{1}{2},\ 3\right\}$

7- $m = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **8-** $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$

9- $u = 1 \pm \sqrt{2}\, i$ **10-** $m = \pm 3i$ ou $m = \pm 2$