École de technologie supérieure
Service des enseignements généraux

MAT144
Introduction aux mathématiques du génie

Notes de cours

1re Partie

Par Kathleen Pineau
et Valérie Gouaillier

Rédigé en août 2017
Révisé en mai 2022

Table des matières

Avant-propos

L'objectif de ce document est d'offrir un support pédagogique aux étudiants et aux enseignants du cours *Introduction aux mathématiques du génie* de l'École de technologie supérieure. Ce cours de mise à niveau mathématique vise à préparer l'étudiant pour ses études en génie et, en particulier, pour le cours de calcul différentiel et intégral qui suivra.

Ces notes de cours ont été développées de manière à rappeler de façon progressive les concepts de base du secondaire. On porte une attention particulière aux difficultés langagières, [1] et [4], par le biais d'exemples et d'exercices de reformulation ou qui demandent un va-et-vient entre différents langages : symbolique, graphique et numérique.

Il convient de préciser que, dans le cadre de ce cours, tous les étudiants et tous les enseignants travaillent avec le même outil technologique, la calculatrice TI-Nspire CX CAS ou son équivalent sur ordinateur, facilitant, de ce fait, le passage d'un langage à l'autre.

À l'étudiant

Dans ce document, les encadrés gris servent à attirer votre attention sur un aspect particulier du propos. Il s'agit d'une mise en valeur, d'une mise en garde, d'un rappel ou d'une consigne.

Dans les exemples, certaines actions sont laissées au lecteur (*faites-le*) pour vous encourager à agir en parallèle à votre lecture. À la fin des exemples, vous rencontrerez parfois *Validation.* où il est question de vérifier si le résultat est cohérent ou *Quoi écrire ?* qui illustre comment consigner par écrit un résultat obtenu à l'aide de la calculatrice.

Les exercices de musculation algébrique des chapitres 1, 2 et 3 sont de nature algébrique et de type drill (méthode d'entrainement basée sur la réalisation répétitive d'un même type d'exercices) sur les thèmes de la simplification, de la factorisation et de la résolution d'équations. Vous les faites après avoir fait ceux du chapitre, lorsque vous sentez le besoin de pratiquer davantage les techniques.

Si vous avez des commentaires ou des suggestions, faites-moi signe. Ils sont toujours appréciés.

Remerciements

Je voudrais remercier tous ceux et celles qui ont contribué à la réalisation de ces notes de cours.

En particulier, j'aimerais remercier Mme Valérie Gouaillier, maître d'enseignement, pour sa collaboration au recueil, par des échanges sur le contenu, sa contribution à des exemples et exercices, ainsi qu'à la révision de différentes versions de l'ouvrage.

Merci à Mme Karima Mahni, chargée de cours, pour les exercices de musculation algébrique. Je remercie aussi Mme Mahni, ainsi que Mme Annie Lacasse, maître d'enseignement, pour leur participation à la révision de certains chapitres.

Je suis reconnaissante à MM. Marc Boulé et Alain Hénault, maîtres d'enseignement en sciences, pour leur disponibilité et pour avoir inspiré ou validé les exemples et exercices relevant du génie et des sciences.

Finalement, j'aimerais remercier Mme Geneviève Savard, maître d'enseignement, d'avoir généreusement partagé le fruit de son travail. La facture de ces notes de cours découle du code qu'elle a produit pour celles de MAT145.

Logiciels

L'ensemble du document a été rédigé avec l'éditeur de texte TeXnicCenter et le logiciel MikTex, une version Windows du traitement de texte scientifique TEX de Donald Knuth et de son préprocesseur LATEX de Leslie Lamport. La plupart des graphiques ont été produits à l'aide du gratuiciel GeoGebra ou directement en LATEX à l'aide de PSTricks.

Kathleen Pineau, Maître d'enseignement, mai 2022

Chapitre 1

Les notions de base

1.1 Les nombres et leurs représentations

1.1.1 L'ensemble des nombres réels

Avant d'introduire l'ensemble des nombres réels, rappelons quelques-unes des notations courantes utilisées pour décrire des ensembles.

Un **ensemble** est une collection d'objets nommés **éléments** de l'ensemble. Par exemple, l'ensemble des **nombres naturels**, désigné par $\mathbb{N}$, est formé des nombres qui servent à compter,

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Les accolades $\{ \}$ indiquent qu'il s'agit d'un ensemble et, dans cette représentation, les points-virgules séparent les éléments. Puisque l'ensemble des nombres naturels est infini, les points de suspension indiquent que la liste des éléments est sans fin.

Il est parfois utile de pouvoir exclure zéro, on utilise alors le symbole $*$. Ainsi,

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Comme on l'a fait pour les ensembles ci-dessus, un ensemble peut être décrit par la liste de ses éléments. On dit alors qu'il est décrit en **extension**. On peut aussi le décrire à l'aide d'une règle qui détermine ses éléments. On dit alors qu'il est décrit en **compréhension**. Par exemple, même s'il est infini, le contenu de l'ensemble des **nombres entiers**, $\mathbb{Z}$, s'exprime clairement en extension

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

tandis qu'il est plus approprié de décrire l'ensemble des **nombres rationnels**, $\mathbb{Q}$, en compréhension

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Ici a et b sont des variables. Le symbole $\mid$ signifie **tel que** et est suivi des contraintes imposées aux variables. Dans ce cas, on stipule que a doit être un entier, $a \in \mathbb{Z}$, et que b doit être un entier non nul, $b \in \mathbb{Z}^*$. Le symbole $\in$ signifie **appartient à** ou est **un élément de**. Un nombre est donc rationnel s'il s'écrit comme un quotient d'entiers dont le dénominateur n'est pas zéro.

L'ensemble des **nombres réels**, $\mathbb{R}$, est formé de tous les nombres qui possèdent une représentation décimale. Par exemple, $-30{,}4 = -152/5$, $12{,}333333\ldots = 12{,}\overline{3} = 37/3$ et $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ sont des réels.

Puisque tout nombre rationnel est aussi un nombre réel (il suffit d'effectuer la division des entiers impliqués pour trouver sa représentation décimale), l'ensemble des nombres rationnels est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels et on écrit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ où le symbole $\subset$ signifie **sous-ensemble**.

Un nombre peut être réel sans être rationnel ; il suffit que sa représentation décimale soit infinie et non périodique. L'ensemble des **nombres irrationnels**, noté $\mathbb{Q}'$, est formé de tous les nombres réels dont la représentation décimale est infinie mais non périodique. En fait, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ où le symbole $\setminus$ désigne la soustraction ensembliste. Dans ce cas, on lit *l'ensemble des irrationnels est formé de l'ensemble des réels sauf les rationnels.* Autrement dit, l'ensemble des nombres irrationnels est formé de l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas rationnels.

Par exemple, les nombres $\pi = 3{,}141592\ldots$ et $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ sont des irrationnels. Le nombre π représente, entre autres choses, la mesure de la surface d'un cercle de rayon 1 et le nombre $\sqrt{2}$, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle isocèle dont les deux côtés adjacents à l'angle droit sont de longueur 1.

L'ensemble des nombres réels est donc formé de la **réunion** des nombres rationnels et des nombres irrationnels, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. Puisqu'un nombre ne peut pas être à la fois rationnel et irrationnel, l'**intersection** de ces deux ensembles est vide, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$, où $\emptyset = \{\ \}$ est l'ensemble vide, celui qui ne contient aucun élément.

Les sous-ensembles usuels des nombres réels sont illustrés à la figure 1.1 et décrits au tableau 1.1 ci-dessous. Les notations usuelles pour les ensembles sont résumées au tableau 1.2.

Les nombres complexes
Il existe une extension de l'ensemble des nombres réels. Il s'agit de l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$. L'équation $x^2 = -1$ ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$, puisqu'il n'y a aucun nombre réel dont le carré est négatif. Cependant, on peut imaginer une solution en définissant un nouveau nombre i, qui n'appartient pas aux réels, et tel que $i^2 = -1$. En additionnant des nombres réels avec des multiples de ce nombre i, on génère tout un ensemble de nouveaux nombres. Par exemple, $2 + 3i$, $1 - 5i$ et $8i$ font partie de ces nombres. Toutes ces combinaisons forment l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, qu'on définit par

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + bi \,|a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}.$$

Tous les nombres réels appartiennent à l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, puisqu'ils peuvent s'écrire comme $a + 0 \cdot i$. Les nombres complexes ne seront pas beaucoup traités dans ce cours, on se concentrera plutôt sur la manipulation des nombres et fonctions réelles.

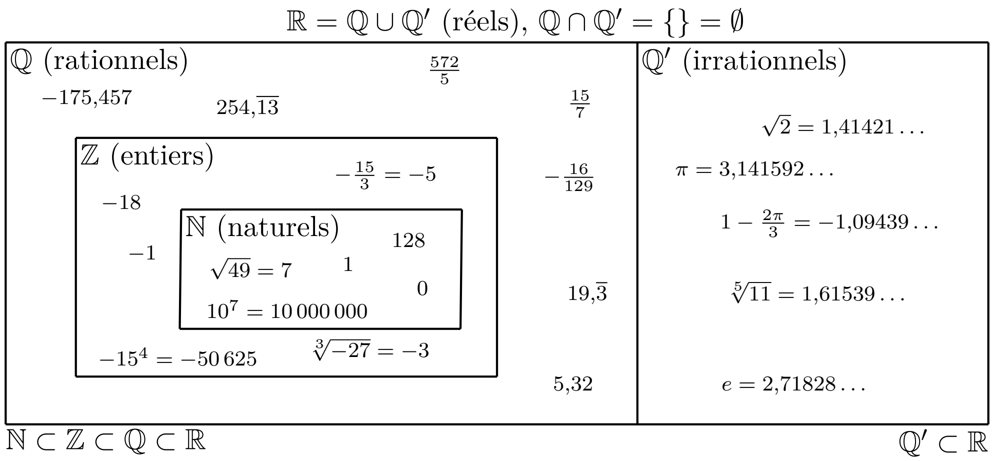


FIGURE 1.1 – Quelques sous-ensembles des réels

TABLEAU 1.1 – Quelques sous-ensembles des réels

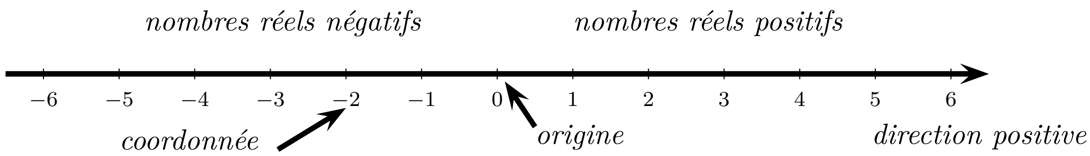
Nom	Description	Exemples d'élément
Les nombres **naturels**	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ qui servent à compter	3, 7, 18
Les nombres **entiers**	$\mathbb{Z} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$	-15, 0, 7
Les nombres **rationnels**	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\}$ ont une représentation décimale finie ou infinie périodique	$\frac{5}{3}$, 41,32 $53{,}1\overline{23}$
Les nombres **irrationnels**	$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ont une représentation décimale infinie qui n'est pas périodique	$\pi = 3{,}1415\ldots$ $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

TABLEAU 1.2 – Notations usuelles pour les ensembles

Notation	Description
$x \in A$	x **appartient** à A x est un élément de l'ensemble A
$x \notin A$	x **n'appartient pas** à A x n'est pas un élément de l'ensemble A
$A = B$	A **égal** B A et B sont composés des mêmes éléments
$A \subset B$	A est un **sous-ensemble au sens strict** de B signifie que tous les éléments de l'ensemble A appartiennent également à l'ensemble B, mais $A \neq B$
$A \subseteq B$	A est un **sous-ensemble au sens large** de B signifie que tous les éléments de l'ensemble A appartiennent également à l'ensemble B, A peut être égal à B
$A \cap B$	A **intersection** B désigne l'ensemble des éléments communs aux ensembles A et B $A \cap B = \{x \| x \in A \text{ et } x \in B\}$
$A \cup B$	A **union** B désigne l'ensemble contenant tous les éléments de A et tous les éléments de B $A \cup B = \{x \| x \in A \text{ ou } x \in B\}$
$A \setminus B$	A **moins** B (la différence de deux ensembles) désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A mais n'appartiennent pas à l'ensemble B $A \setminus B = \{x \| x \in A \text{ et } x \notin B\}$
A^*	A **astérisque** désigne le sous-ensemble des éléments non nuls de l'ensemble A $A^* = \{x \| x \in A \text{ et } x \neq 0\}$
$\emptyset$	l'**ensemble vide** $\emptyset = \{\ \}$

1.1.2 La droite réelle

La droite réelle est utilisée pour représenter les nombres réels graphiquement. Une origine est désignée par 0 ; les unités à droite du 0 sont positives tandis que celles à sa gauche sont négatives.



Sur la droite réelle, les nombres sont croissants de gauche à droite, suivez la flèche ! Une valeur est dite plus petite ($<$) qu'une autre, lorsqu'elle est située à sa gauche, par exemple $-4{,}5 < -3{,}1$. Une valeur est dite plus grande ($>$) qu'une autre lorsqu'elle est située à sa droite, par exemple $4{,}3 > 1$.

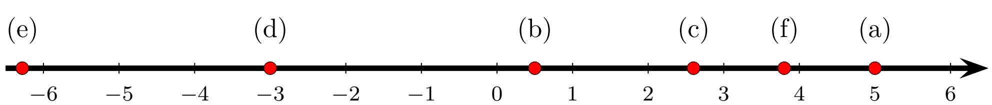
Exemple 1.1

Placez les nombres suivants aux endroits appropriés sur la droite réelle.

(a) 5 (b) $0{,}5$ (c) $\sqrt{7}$ (d) $-\sqrt{9}$ (e) -2π (f) $19/5$

Solution :

C'est à l'aide de la représentation décimale des nombres qu'on pourra les placer aux bons endroits sur la droite. On trouve $\sqrt{7} \approx 2{,}65$, $-\sqrt{9} = -3$, $2\pi \approx 6{,}28$ et $19/5 = 3{,}8$ et on place des points correspondants sur la droite.

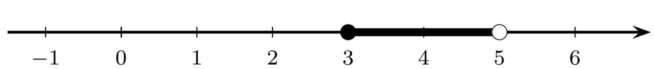


1.1.3 Les intervalles

Un **intervalle réel** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels compris entre deux nombres distincts donnés en ordre croissant. Par exemple, l'intervalle $[3; 5[$ désigne l'ensemble des nombres réels plus grands ou égaux à 3 qui sont plus petits que 5. En compréhension, ceci s'écrit $[3; 5[= \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x < 5\}$.

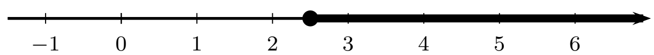
Les deux nombres utilisés pour décrire l'intervalle s'appellent les **bornes de l'intervalle**. Celles-ci peuvent être incluses ou non dans l'intervalle. Dans l'exemple ci-dessus, les bornes sont 3 et 5. La **borne inférieure** est 3 et est incluse dans l'intervalle, tandis que la **borne supérieure**, qui est 5, ne l'est pas.

On représente graphiquement un intervalle par un segment de droite et on indique si une borne est incluse ou non, respectivement, par un point plein ($\bullet$) ou vide ($\circ$). Par exemple, l'intervalle $[3; 5[$ se représente comme suit.

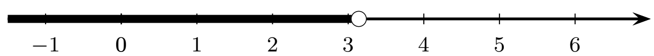


Un intervalle est dit **fermé** s'il inclut ses deux bornes et **ouvert** s'il ne les inclut pas. Si l'intervalle inclut seulement une de ses deux bornes, comme l'intervalle $[3;5[$, on le dit **semi-ouvert**.

Aux intervalles réels, on ajoute les ensembles des réels supérieurs à une valeur, par exemple, l'intervalle $[2{,}5;\infty[$,



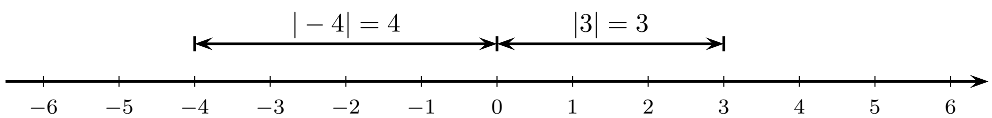
ou inférieurs à une valeur, par exemple, $]-\infty;\pi[$.



L'ensemble de tous les réels est décrit par l'intervalle $\mathbb{R} =]-\infty;\infty[$. Un résumé des notations usuelles pour les intervalles est présenté au tableau 1.3 (p. 7).

1.1.4 La valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, représente la distance qui sépare le nombre x de 0 sur la droite réelle. Par exemple, $|-4| = 4$ et $|3| = 3$.



La valeur absolue d'un nombre plus grand ou égal à 0 est le nombre lui-même, $|3| = 3$, tandis que la valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé, $|-4| = -(-4) = 4$. On peut donc définir la valeur absolue d'un nombre sans faire référence à la droite réelle.

Définition 1.1 La **valeur absolue** d'un nombre réel x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 1.2

Réécrivez chacune des expressions suivantes sans utiliser la notation $|\,|$ des valeurs absolues.

(a) $|-7{,}2|$ (b) $|12|$ (c) $|\pi - 5|$ (d) $|\sqrt{8} - 2|$

Solution :

(a) Puisque $-7{,}2 < 0$, $|-7{,}2| = -(-7{,}2) = 7{,}2$.

(b) Puisque $12 > 0$, $|12| = 12$.

(c) Puisque $\pi < 5$, $\pi - 5 < 0$ et $|\pi - 5| = -(\pi - 5) = 5 - \pi$.

(d) On peut coincer 8 entre les carrés parfaits 4 et 9 pour en déduire que $2 < \sqrt{8} < 3$. Puisque $\sqrt{8} > 2$, $\sqrt{8} - 2 > 0$ et $|\sqrt{8} - 2| = \sqrt{8} - 2$.

Tableau 1.3 – Notations usuelles pour les intervalles

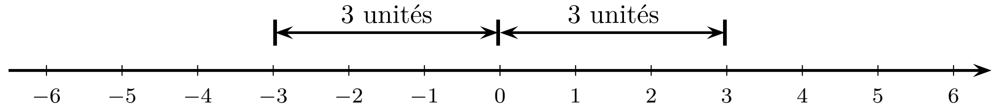
Notation	Description en compréhension	Signification	Graphique
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \| a \leq x \leq b\}$	ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a qui sont inférieurs ou égaux à b	
$]a; b[$	$\{x \in \mathbb{R} \| a < x < b\}$	ensemble des nombres réels supérieurs à a qui sont inférieurs à b	
$[a; b[$	$\{x \in \mathbb{R} \| a \leq x < b\}$	ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a qui sont inférieurs à b	
$]a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \| a < x \leq b\}$	ensemble des nombres réels supérieurs à a qui sont inférieurs ou égaux à b	
$[a; \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \| x \geq a\}$	ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a	
$]a; \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \| x > a\}$	ensemble des nombres réels supérieurs à a	
$]-\infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \| x \leq b\}$	ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à b	
$]-\infty; b[$	$\{x \in \mathbb{R} \| x < b\}$	ensemble des nombres réels inférieurs à b	
$]-\infty; \infty[$	$\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}\}$	ensemble des nombres réels	

Exemple 1.3

Déterminez, si elles existent, les valeurs réelles x qui satisfont l'égalité $|x| = 3$.

Solution :

On cherche les valeurs réelles qui sont situées à 3 unités de 0.



On constate que seuls 3 et -3 se trouvent à 3 unités de distance de 0, c'est-à-dire $|x| = 3$ seulement lorsque $x = -3$ ou $x = 3$.

La valeur absolue est souvent utilisée pour trouver la distance entre deux points sur la droite réelle. Si a et b sont des nombres réels, la distance entre a et b est la valeur absolue de leur différence. Par exemple, la distance entre 3 et 7 est 4. On peut utiliser la valeur absolue pour trouver cette distance des deux façons suivantes.

$$|7 - 3| = 4 \text{ ou } |3 - 7| = 4$$

On obtient la même distance quel que soit l'ordre dans lequel on effectue la soustraction.

Distance entre deux points sur la droite réelle

Si a et b sont deux points sur la droite réelle, alors la distance entre a et b est donnée par

$$|a - b| \text{ ou } |b - a|.$$

Exemple 1.4

Trouvez la distance entre -4 et 3 sur la droite réelle.

Solution :

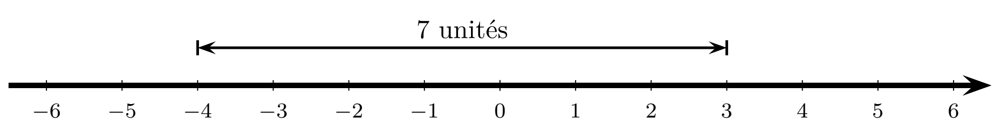
Puisque la distance entre a et b est $|a - b|$, la distance entre -4 et 3 est

$$|-4 - 3| = |-7| = 7 \text{ unités.}$$

Dans ce cas, on a posé $a = -4$ et $b = 3$. On obtient la même distance si on inverse l'ordre de la soustraction. En effet,

$$|3 - (-4)| = |3 + 4| = |7| = 7.$$

Validation. On peut vérifier rapidement le résultat en traçant une esquisse graphique.



Exemple 1.5

Le tableau ci-dessous contient, pour chacun des mois de l'année, les températures maximales moyennes et les températures minimales moyennes[i] calculées sur une période de 30 ans.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Max moyen (°C)	−5,7	−3,9	2,2	10,7	19	23,6	26,2	24,8	19,7	12,7	5,3	−2,2
Min moyen (°C)	−14,7	−12,9	−6,7	0,6	7,7	12,7	15,6	14,3	9,4	3,4	−2,1	−10,4

En utilisant ces informations, calculez l'écart qui existe entre la température maximale moyenne (Max moyen) et la température minimale moyenne (Min moyen) pour les mois de (a) février, (b) juillet et (c) novembre.

Solution :

(a) Pour le mois de février, l'écart des moyennes est $|-3{,}9-(-12{,}9)| = |-3{,}9+12{,}9| = 9$ °C.

(b) Pour le mois de juillet, l'écart est $|26{,}2-15{,}6| = 10{,}6$ °C.

(c) Pour le mois de novembre, l'écart est $|5{,}3-(-2{,}1)| = |5{,}3+2{,}1| = 7{,}4$ °C.

On constate que sur cette période de 30 ans, l'écart entre la température maximale moyenne et la température minimale moyenne est moins grande en novembre qu'en février et en juillet.

Exercices

Attention ! Les exercices 1.1 à 1.9 doivent être faits sans calculatrice.

1.1 Sachant que $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{-2; 3; 5\}$ et $C = \{7\}$, déterminez si l'énoncé est vrai ou s'il est faux.

(a) $7 \in A$
(b) $C \in A$
(c) $C \subset A$
(d) $C \subseteq A$
(e) $5 \notin C$
(f) $A \cap B = \{3; 5\}$
(g) $A = \{1; 5; 3; 7\}$
(h) $A \backslash C = \{1; 3; 5\}$
(i) $B \cap C = \emptyset$
(j) $A \cup B = \{-2; 1; 3; 5; 7\}$
(k) $A \cup C = A$
(l) $5 \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

1.2 Précisez à quels ensembles parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ et $\mathbb{R}$ appartient chacun des nombres suivants.

(a) $5{,}1$
(b) $-\sqrt{36}$
(c) $\sqrt{7}$
(d) $23/2$
(e) $-36/12$
(f) $215{,}1\overline{351}$
(g) $-512{,}36$
(h) 2π
(i) $-571{,}\overline{5}$

1.3 Placez les nombres suivants aux endroits appropriés sur la droite réelle.

(a) $2{,}4$ (b) $\dfrac{13}{-2}$ (c) $-\sqrt{10}$ (d) $\dfrac{\pi}{4}$ (e) $\sqrt{36}$

i. Données provenant de Météo Média `https://www.meteomedia.com`

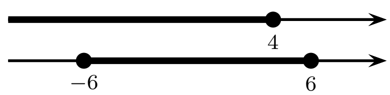
1.4 Déterminez lequel des symboles entre $<$ et $>$ est approprié.

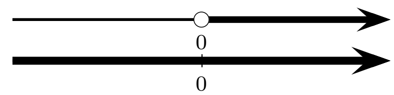
(a) $7 \ ? \ 10$ (b) $-\pi \ ? \ -3{,}2$ (c) $\sqrt{2} \ ? \ 1{,}42$ (d) $\frac{1}{2} \ ? \ \frac{1}{3}$

1.5 Décrivez l'ensemble en compréhension et donnez-en une interprétation graphique.

(a) $]-15;3]$ (b) $[\pi;\infty[$ (c) $]-\infty;-2[$ (d) $[-2{,}75;5{,}3[$

1.6 Donnez l'intervalle correspondant à la représentation graphique.

(a)
(b)


(c)
(d)


1.7 Réécrivez chacune des expressions suivantes sans utiliser la notation | | des valeurs absolues.

(a) $|-45{,}3|$ (c) $\dfrac{-5}{|-5|}$ (e) $|5-\sqrt{35}|$

(b) $|752|$ (d) $|\sqrt{52}-7|$ (f) $|3-\pi|$

1.8 Déterminez, si elles existent, les valeurs réelles x qui satisfont les égalités suivantes.

(a) $|x| = 5$ (c) $|x| = -2$ (e) $|x| = \frac{15}{4}$

(b) $|x| = 0$ (d) $|x| = 3{,}2$ (f) $|x| = \sqrt{3}$

1.9 Exprimez la distance entre les deux nombres donnés en utilisant la valeur absolue | |. Trouvez ensuite cette distance en évaluant la valeur absolue.

(a) 3 et 21 (b) 19 et 12 (c) -3 et 2 (d) -5 et -7

1.10 Un professeur a consigné dans le tableau suivant les notes obtenues par les équipes de deux de ses groupes pour un devoir.

Numéro d'équipe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Moyenne
Notes du groupe 1	92	81	73	89	85	54	76	95	83	81
Notes du groupe 2	66	84	97	89	42	77	84	82	95	80

Même si les deux moyennes sont comparables, il se demande si la dispersion des notes autour de la moyenne est semblable dans les deux groupes.

(a) Calculez la valeur absolue de l'écart à la moyenne de chaque note dans chacun des groupes.

(b) En statistique, l'écart absolu moyen est une mesure de la dispersion d'une série de données. Il se calcule en prenant la moyenne arithmétique de la valeur absolue des écarts à la moyenne

$$\text{Écart absolu moyen} = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+...+|x_n-\bar{x}|}{n},$$

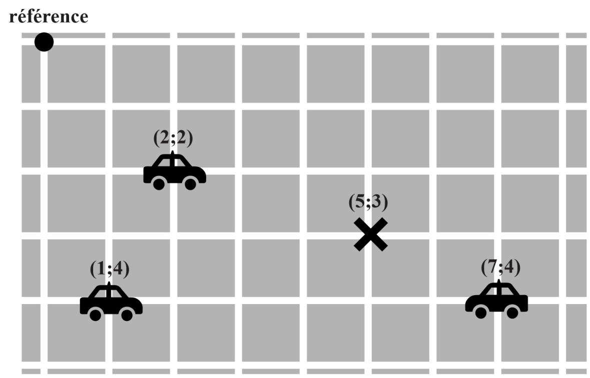
où les x_i sont les données de la série, $\bar{x}$ est la moyenne et n est le nombre de données. Calculez l'écart absolu moyen[ii] des deux groupes pour déterminer si la dispersion des notes autour de la moyenne est semblable dans les deux groupes.

ii. Bien que l'écart absolu moyen soit une mesure intuitive de la dispersion de données, c'est l'écart-type, défini par

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots(x_n-\bar{x})^2}{n}},$$

qui est le plus souvent utilisé en statistique, en raison de certaines de ses propriétés mathématiques.

1.11 Un centre-ville est quadrillé de rues orientées nord-sud et de rues orientées est-ouest. Les intersections sont à égale distance les unes des autres. Les rues sont numérotées à partir d'un point de référence situé au nord-ouest. Le couple $(x;y)$ correspond à l'intersection de la x^e rue à l'est du point de référence et de la y^e rue au sud de celui-ci. Un client se trouvant à l'intersection $(5;3)$ appelle une entreprise de taxi pour qu'on lui envoie une voiture. Les taxis disponibles sont en $(1;4)$, $(2;2)$ et $(7;4)$.



Le centre de répartition veut envoyer le taxi dont le trajet sera le plus court pour rejoindre le client. La distance de Manhattan (*City block distance*) permet de calculer la longueur d'un trajet dans une grille, entre deux points P_1 et P_2 . Elle est définie par

$$d(P_1,P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

En calculant la distance de Manhattan entre le client et chaque taxi, déterminez lequel devrait prendre la course.

1.2 L'évaluation d'une expression algébrique

Comme vous l'avez sans doute remarqué, en algèbre on utilise des lettres, telles que x et y, pour représenter des nombres réels. On les appelle des **variables**. En général, une combinaison de variables et de nombres où interviennent des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, de puissance ou de radical est appelée **expression algébrique**. Les expressions

$$2x-1,\ \frac{t}{5-t},\ 5+2xy^2,\ \sqrt{x+2} \text{ et } \frac{6-y}{x^2}$$

sont toutes des expressions algébriques.

Évaluer une expression algébrique signifie qu'on trouve la valeur de l'expression lorsqu'on substitue des valeurs à ses variables. Pour effectuer les calculs, on suit la convention donnée par l'ordre de priorité des opérations.

L'ordre de priorité des opérations
Lorsqu'on effectue une suite d'opérations sur des nombres réels, on doit respecter l'ordre de priorité suivant.

1. On commence par effectuer les opérations situées à l'intérieur des parenthèses.
   La barre d'une fraction, un radical ou une valeur absolue joue le rôle de parenthèses.
2. On calcule ensuite les puissances (exposants).
3. On poursuit avec les multiplications et les divisions de gauche à droite.
4. On termine avec les additions et les soustractions de gauche à droite.

Lorsqu'on veut modifier cet ordre, on introduit des parenthèses.

Exemple 1.6

Évaluez les expressions suivantes aux valeurs indiquées.

(a) $(25t^2+5t)\div(2t^2+6)$ pour $t=3$

(b) $\dfrac{2x-1}{x+1}$ pour $x=5$

(c) $\dfrac{2|x|+3}{2x+3}$ pour $x=-3$

(d) $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pour $a=2$, $b=3$ et $c=1$

Solution :

Pour exprimer symboliquement le fait qu'on évalue une expression, on utilise le symbole $|$, *tel que*, suivi des valeurs à substituer, lesquelles sont en indice.

(a) On substitue 3 à t :

$$\begin{aligned}(25t^2+5t)\div(2t^2+6)|_{t=3} &= (25(3)^2+5(3))\div(2(3)^2+6)\\ &= (25\cdot 9+5\cdot 3)\div(2\cdot 9+6)\\ &= (225+15)\div(18+6)\\ &= 240\div 24=10\end{aligned}$$

(b) On substitue la valeur 5 à x :

$$\left.\frac{2x-1}{x+1}\right|_{x=5}=\frac{2(5)-1}{(5)+1}=\frac{10-1}{6}=\frac{9}{6}=1{,}5$$

Attention ! La barre de division est une autre façon d'écrire la division et elle implique des parenthèses.

$$\frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \div (x+1)$$

On doit donc évaluer le numérateur et le dénominateur avant d'effectuer la division.

(c) On substitue -3 à x :

$$\left.\frac{2|x|+3}{2x+3}\right|_{x=-3} = \frac{2|-3|+3}{2(-3)+3} = \frac{2\cdot 3+3}{2(-3)+3} = \frac{6+3}{-6+3} = \frac{9}{-3} = -3$$

Attention ! La valeur absolue agit comme des parenthèses. On doit donc l'évaluer avant d'effectuer la multiplication.

(d) On substitue simultanément 2 à a, 3 à b et 1 à c :

$$\begin{aligned}\left.\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|_{a=2,\ b=3,\ c=1} &= \frac{-3+\sqrt{3^2-4(2)(1)}}{2(2)} \\ &= \frac{-3+\sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3+\sqrt{1}}{4} = \frac{-3+1}{4} \\ &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = -0{,}5\end{aligned}$$

Attention ! Le radical agit comme des parenthèses. On doit donc l'évaluer avant d'effectuer l'addition.

Exercices

1.12 Sans calculatrice, évaluez les expressions suivantes aux valeurs indiquées.

(a) $x^2 - 3x + 1$ en $x = 2$

(b) $(x-1)^2 + (y-3)^2$ en $x = 2$ et $y = 5$

(c) $\dfrac{|5x| - 3}{3 - 2x}$ en $x = -3$

(d) $b^2 - 4ac$ en $a = 2$, $b = 3$ et $c = 0$

(e) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_1 = 1$ et $y_2 = 3$

1.13 Un objet est lancé verticalement vers le haut. La hauteur h (en mètres) de l'objet à partir du sol, t secondes après avoir été lancé, peut être modélisée par

$$h = -4{,}9t^2 + 30t + 2.$$

(a) Selon ce modèle, de quelle hauteur l'objet a-t-il été lancé ?

(b) Selon ce modèle, quelle est la hauteur de l'objet 5,1 secondes après avoir été lancé ?

(c) Selon ce modèle, quelle est la hauteur de l'objet 8 secondes après avoir été lancé ?

1.14 La fréquence fondamentale d'une corde de guitare (mesurée en hertz, Hz) est donnée par

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

où L est la longueur de la corde (en mètres, m), T est la tension de la corde (en newtons, N) et μ est sa masse linéique, c'est-à-dire sa masse par unité de longueur (en kilogrammes par mètre, kg/m). Évaluez la fréquence fondamentale d'une corde de guitare de 65 cm, ayant une masse linéique d'environ 11,85 g/m et dont la tension est de 136 N.

1.3 Les propriétés des opérations

Vous avez certainement remarqué que lorsqu'on additionne deux nombres à l'aide d'une calculatrice, le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel les nombres ont été entrés.

$$15 + 9 = 9 + 15 = 24$$

Le fait qu'on puisse effectuer l'opération d'addition sans se préoccuper de l'ordre est dû à la propriété de *commutativité* de l'addition. De la même façon, le résultat de l'addition de trois nombres est indépendant du choix des deux premiers nombres additionnés.

$$2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7 = 12$$

Il s'agit alors de la propriété d'*associativité* de l'addition.

Il en est de même pour la multiplication. Deux nombres peuvent être multipliés dans n'importe quel ordre

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$$

et le résultat de la multiplication de trois nombres est indépendant du choix des deux premiers nombres multipliés.

$$2 \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot 7 = 70$$

Autrement dit, et comme l'addition, la multiplication est une opération commutative et associative.

Une autre propriété très importante est celle de la *distributivité de la multiplication sur l'addition.* Cette propriété permet, entre autres, de réécrire une multiplication comme une addition de multiplications moins imposantes.

$$7 \cdot 15 = 7 \cdot (10 + 5) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 5 = 70 + 35 = 105$$

On dit alors que la multiplication se distribue sur l'addition.

Ces trois propriétés (commutativité, associativité et distributivité) de l'addition et de la multiplication sont résumées dans les premières lignes du tableau 1.4 (p. 16). Qu'en est-il pour la soustraction et la division ?

Puisque zéro (0) n'a aucun effet dans une somme, on l'appelle le neutre de l'addition. L'opposé d'un nombre n est alors le nombre qui, ajouté à n, donne zéro (0), le neutre de l'addition. La soustraction peut donc être définie comme l'addition de l'opposé.

De la même façon, un (1) n'a aucun effet dans une multiplication et on l'appelle le neutre de la multiplication. L'inverse d'un nombre n est le nombre qui, multiplié par n, donne un (1), le neutre de la multiplication. La division peut donc être définie comme la multiplication par l'inverse.

Tableau 1.4 – Propriétés des opérations

Propriétés	Addition	Multiplication
Commutativité	Deux nombres réels peuvent être additionnés dans n'importe quel ordre. $a + b = b + a$ Exemples $15 + 9 = 9 + 15 = 24$ $15x + 9 = 9 + 15x$	Deux nombres réels peuvent être multipliés dans n'importe quel ordre. $a \cdot b = b \cdot a$ Exemples $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$ $x \cdot 6 = 6 \cdot x = 6x$
Associativité	Le résultat de l'addition de trois nombres réels est indépendant du choix des deux premiers nombres additionnés. $a + (b + c) = (a + b) + c$ Exemples $2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7 = 12$ $2 + (3 + x) = (2 + 3) + x = 5 + x$	Le résultat de la multiplication de trois nombres réels est indépendant du choix des deux premiers nombres multipliés. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Exemples $2 \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot 7 = 70$ $-2 \cdot (3 \cdot x) = (-2 \cdot 3) \cdot x = -6x$
Distributivité de la multiplication sur l'addition $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$		Exemples $7(4 + 5) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 63$ $5(3x + 7) = 5 \cdot 3x + 5 \cdot 7 = 15x + 35$ $(5 - 3x)2 = 5 \cdot 2 - 3x \cdot 2 = 10 - 6x$
Neutre	Zéro (0) peut être éliminé d'une somme $a + 0 = 0 + a = a$ Exemples $5 + 0 = 5$ $0 + 6x = 6x$	Un (1) peut être éliminé d'un produit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ Exemples $\pi \cdot 1 = \pi$ $1 \cdot 12x = 12x$
Inverse	La somme d'un nombre et de son inverse additif (dit l'opposé) donne le neutre de l'addition $a + (-a) = 0$ et $(-a) + a = 0$ Exemples $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$ $(-4y) + 4y = 0$	La multiplication d'un nombre et de son inverse multiplicatif (dit l'inverse) donne le neutre de la multiplication. Si $a \neq 0$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ et $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ Exemples $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ si $x \neq 2$, $\left(\frac{1}{x-2}\right) \cdot (x - 2) = 1$

Définition 1.2 Soient a et b des nombres réels, des variables ou des expressions algébriques. L'inverse de b sous l'addition est désigné par $-b$ et s'appelle **l'opposé** de b. L'opération de **soustraction**, $a-b$, est alors définie comme l'addition de a avec l'opposé de b :

$$a-b \stackrel{\text{déf}}{=} a+(-b).$$

L'inverse de b sous la multiplication est désigné par $\frac{1}{b}$ et s'appelle **l'inverse** de b. L'opération de **division**, $a \div b$, est alors définie comme la multiplication de a par l'inverse de b :

$$a \div b = \frac{a}{b} \stackrel{\text{déf}}{=} a \cdot \frac{1}{b} \text{ où } b \neq 0.$$

Dans la fraction $\dfrac{a}{b}$, a est appelé le **numérateur** et b, le **dénominateur** de la fraction.

Exemple 1.7

Pour chacun des nombres suivants, donnez son opposé, son inverse et l'opposé de son inverse.

(a) 5 (b) 0,2 (c) π

Solution :

(a) L'opposé de 5 est -5, son inverse est $\frac{1}{5}=0{,}2$ et l'opposé de son inverse est $-\frac{1}{5}=-0{,}2$.

(b) L'opposé de 0,2 est $-0{,}2$, son inverse est 5 (car $0{,}2\cdot 5=1$) et l'opposé de son inverse est -5.

(c) L'opposé de π est $-\pi$, son inverse est $\frac{1}{\pi}$ et l'opposé de son inverse est $-\frac{1}{\pi}$.

En définissant la soustraction comme l'addition de l'opposé, on peut distribuer une multiplication sur une soustraction.

$$5(3x-2)=5\cdot(3x+(-2))=5\cdot(3x)+5\cdot(-2)=(5\cdot 3)x-10=15x-10$$

Le fait qu'il y a commutativité de la multiplication, la distributivité de la multiplication sur l'addition peut aussi se faire de droite à gauche.

$$(4x+5)\cdot 3=4x\cdot 3+5\cdot 3=12x+15$$

On peut aussi distribuer la multiplication sur plus d'une addition.

$$\begin{aligned} 5(2x-3y+4) &= 5\cdot 2x-5\cdot 3y+5\cdot 4 && \text{on distribue 5 sur chacune des composantes de la parenthèse} \\ &= (5\cdot 2)x-(5\cdot 3)y+20 && \text{on associe les constantes} \\ &= 10x-15y+20 \end{aligned}$$

Exemple 1.8

Réécrivez chacune des expressions suivantes en utilisant les propriétés indiquées.

(a) La commutativité de l'addition sur $3+5x$.
(b) L'associativité de l'addition sur $4+(3+5x)$.
(c) La distributivité de la multiplication sur l'addition sur $2\cdot(-10+3)$.
(d) L'associativité de la multiplication sur $3\cdot(-5x)$.
(e) La distributivité de la multiplication sur l'addition suivie de l'associativité de la multiplication sur $-5\cdot(2x+3)$.

(f) La commutativité de la multiplication suivie de la distributivité de la multiplication sur l'addition sur $(2y+1)(3x)$.

Solution :

(a) $3+5x=5x+3$

(b) $4+(3+5x)=(4+3)+5x=7+5x$

(c) $2\cdot(-10+3)=2\cdot(-10)+2\cdot 3=-20+6=-14$

(d) $3\cdot(-5x)=(3\cdot(-5))x=-15x$

(e) $-5\cdot(2x+3)=-5\cdot(2x)+-5\cdot(3)=-(5\cdot 2)x-15=-10x-15$

(f) $(2y+1)(3x)=(3x)(2y+1)=(3x)(2y)+(3x)(1)$

Exemple 1.9

Pour chacune des égalités suivantes, nommez la propriété qui a été utilisée.

(a) $5x+(-4)=(-4)+5x$

(b) $3\cdot(5+2x)=3\cdot 5+3\cdot(2x)$

(c) $3\cdot(2x)=6x$

(d) $3+(2+x)=5+x$

(e) $4+(-4)=0$

(f) si $x\neq 2$, $(4-2x)\cdot\dfrac{1}{(4-2x)}=1$

Solution :

(a) La commutativité de l'addition

(b) La distributivité de la multiplication sur l'addition

(c) L'associativité de la multiplication, $3\cdot(2x)=(3\cdot 2)\cdot x=6x$

(d) L'associativité de l'addition, $3+(2+x)=(3+2)+x=5+x$

(e) L'addition d'un nombre avec son opposé donne le neutre de l'addition (0)

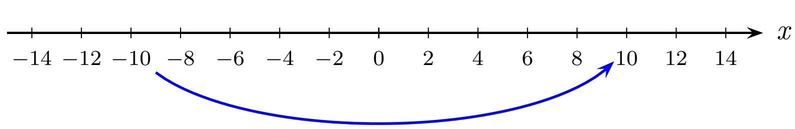
(f) La multiplication d'un nombre avec son inverse donne le neutre de la multiplication (1)

Attention ! Le signe moins « $-$ » peut représenter l'opération de soustraction ou l'addition de l'opposé d'un nombre.

Deux signes moins « $-$ » peuvent se trouver côte à côte dans une expression. Par exemple, lorsqu'on distribue la multiplication du négatif -5 sur la soustraction $3x-2$ ci-dessous.

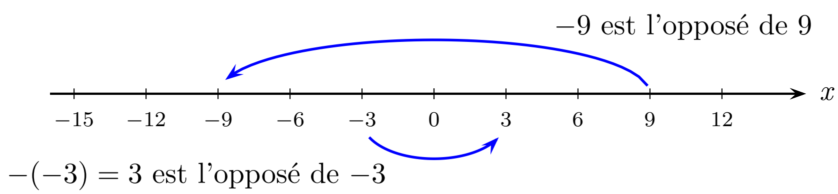
$$-5(3x-2)=(-5)\cdot(3x-2)=(-5)\cdot(3x)-(-5)\cdot 2=-15x-(-10)=-15x+10$$

Dans cette dernière expression, $-(-10)$ peut être vu comme la soustraction de -10 ou comme l'addition de l'opposé de -10.



l'opposé de -10 est $-(-10)=10$

Les propriétés des négatifs sont résumées au tableau 1.5 (p. 23). Pour s'aider à les comprendre, on peut interpréter le $-$ qui précède un nombre, qu'il soit positif ou négatif, comme lui faisant effectuer une rotation de 180° autour de l'origine.



L'addition et la multiplication sont commutatives, mais ce n'est pas le cas de la soustraction, ni de la division.

$$7 - 2 \neq 2 - 7 \quad \text{et} \quad 10 \div 2 \neq 2 \div 10.$$

De plus, les notations $a - b - c$ et $a \div b \div c$ sont ambiguës si on ne connaît pas l'ordre de priorité des opérations. En effet,

$$(7 - 2) - 9 \neq 7 - (2 - 9) \quad \text{et} \quad (10 \div 5) \div 2 \neq 10 \div (5 \div 2).$$

En fait,

$$(7 - 2) - 9 = 5 - 9 = -4$$

tandis que

$$7 - (2 - 9) = 7 - (-7) = 7 + 7 = 14$$

et

$$(10 \div 5) \div 2 = 2 \div 2 = 1$$

tandis que

$$10 \div (5 \div 2) = 10 \div 2{,}5 = 4.$$

Rappel. L'ordre de priorité des opérations
Lorsqu'on effectue une suite d'opérations sur des nombres réels, on doit respecter l'ordre de priorité suivant.

1. On commence par effectuer les opérations situées à l'intérieur des parenthèses.
   La barre d'une fraction, un radical ou une valeur absolue joue le rôle de parenthèses.
2. On calcule ensuite les puissances (exposants).
3. On poursuit avec les multiplications et les divisions de gauche à droite.
4. On termine avec les additions et les soustractions de gauche à droite.

Lorsqu'on veut modifier cet ordre, on introduit des parenthèses.

L'ordre de priorité des opérations permet de réduire le nombre de parenthèses à utiliser pour écrire une expression. Ainsi,

$$7 - 2 - 9 = (7 - 2) - 9 = 5 - 9 = -4 \quad \text{et} \quad 10 \div 5 \div 2 = (10 \div 5) \div 2 = 2 \div 2 = 1.$$

Exemple 1.10

Évaluez, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

(a) $7 - (3 \cdot 5 + 2)$

(b) $4 \cdot 7 - 2(5 - 3(7 + 2))$

Solution :

(a) On effectue d'abord les opérations à l'intérieur des parenthèses, $\cdot$ suivi de $+$. On termine avec la soustraction.

$$7 - (3 \cdot 5 + 2) = 7 - (15 + 2) = 7 - 17 = -10$$

(b) On effectue d'abord l'opération située à l'intérieur des parenthèses les plus profondes. Attention, le produit a priorité sur la soustraction, $5 - 3(9) \neq (5 - 3)(9)$.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 7 - 2(5 - 3\underbrace{(7+2)}_{9}) &= 4 \cdot 7 - 2(5 - \underbrace{3(9)}_{27}) \\ &= 4 \cdot 7 - 2\underbrace{(5 - 27)}_{-22} \\ &= \underbrace{4 \cdot 7}_{28} - \underbrace{2(-22)}_{-44} \\ &= 28 + 44 = 72 \end{aligned}$$

La notation qui utilise des barres horizontales pour désigner la division (par exemple, $\frac{1}{2} = 1 \div 2$) facilite le décodage de l'ordre de priorité des opérations. On appellera ce type d'écriture une **écriture verticale** tandis qu'on appellera celle où on ne retrouve que les symboles $+$, $-$, $\cdot$ et $\div$, une **écriture horizontale**.

Exemple 1.11

Sans effectuer les opérations, traduisez les expressions suivantes sous forme horizontale.

(a) $\dfrac{3(x+1)y}{2}$

(b) $\dfrac{1}{4x} - \dfrac{2x}{x+3}$

Solution :

(a) On remplace la barre horizontale par le symbole de division et on introduit des parenthèses afin de distinguer le numérateur du dénominateur.

$$\frac{3(x+1)y}{2} = \frac{(3(x+1)y)}{(2)} = (3(x+1)y) \div (2)$$

Sachant que les multiplications et les divisions ont la même priorité et qu'elles s'effectuent de gauche à droite, on élimine les parenthèses superflues.

$$(3(x+1)y) \div (2) = 3(x+1)y \div 2$$

Attention, si on avait eu $\frac{3(x+1)y+1}{2}$ au lieu de $\frac{3(x+1)y}{2}$, on devrait laisser les parenthèses.

$$\frac{3(x+1)y+1}{2} = (3(x+1)y+1) \div 2$$

(b) On introduit d'abord des parenthèses pour ensuite remplacer les barres horizontales par des symboles de division.

$$\frac{1}{4x} - \frac{2x}{x+3} = \frac{(1)}{(4x)} - \frac{(2x)}{(x+3)} = (1) \div (4x) - (2x) \div (x+3)$$

On élimine les parenthèses superflues.

$$(1) \div (4x) - (2x) \div (x+3) = 1 \div (4x) - 2x \div (x+3)$$

Attention, les parenthèses restantes sont nécessaires, car

$$1 \div 4x = 1 \div 4 \cdot x = (1 \div 4) \cdot x = \frac{1}{4}x \neq \frac{1}{4x}.$$

Exemple 1.12

Sans effectuer les opérations, traduisez les expressions suivantes sous forme verticale.

(a) $(2 \div 3) \div (5x \div (y+1))$

(b) $-2x + 1 \div x - 1$

(c) $5x \div (3y) - (2x+1) \div (x-1)$

(d) $5x \div 3y - (2x+1) \div x - 1$

Solution :

(a) Les parenthèses indiquent qu'il s'agit d'une division de fractions. L'expression $(2 \div 3)$ s'écrit $\frac{2}{3}$ tandis que $(5x \div (y+1))$ s'écrit $\frac{5x}{y+1}$. Puisque les deux expressions sont divisées, on a

$$(2 \div 3) \div (5x \div (y+1)) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5x}{y+1}}.$$

Regardez bien la longueur des barres horizontales, plus elles sont courtes, plus les fractions sont profondément imbriquées dans l'expression.

(b) L'expression $-2x + 1 \div x - 1$ contient 3 termes, $-2x$, $1 \div x$ et -1, dont l'addition se fait en dernier selon l'ordre de priorité des opérations.

Attention ! On appelle **termes** des éléments qui sont additionnés.

$$-2x + 1 \div x - 1 = \boxed{-2x} + \boxed{1 \div x} + \boxed{-1}$$

La réécriture de chaque terme mène à l'expression verticale $-2x + \frac{1}{x} - 1$.

(c) L'expression $5x \div (3y) - (2x+1) \div (x-1)$ contient 2 termes, $5x \div (3y)$ et $-(2x+1) \div (x-1)$.

$$5x \div (3y) - (2x+1) \div (x-1) = \boxed{5x \div (3y)} + \boxed{-(2x+1) \div (x-1)}$$

Puisque les multiplications et les divisions s'effectuent de gauche à droite,

$$5x \div (3y) = (5x) \div (3y) = \frac{5x}{3y} \text{ et } -(2x+1) \div (x-1) = -\frac{2x+1}{x-1}.$$

En combinant ces deux expressions, on obtient

$$5x \div (3y) - (2x+1) \div (x-1) = \frac{5x}{3y} - \frac{2x+1}{x-1}.$$

(d) L'expression $5x \div 3y - (2x+1) \div x - 1$ ressemble beaucoup à $5x \div (3y) - (2x+1) \div (x-1)$ mais elle est différente. Les parenthèses y font pour beaucoup !

Il y a 3 termes dans $5x \div 3y - (2x+1) \div x - 1$.

$$5x \div 3y - (2x+1) \div x - 1 = \boxed{5x \div 3y} + \boxed{-(2x+1) \div x} + \boxed{-1}$$

Encore une fois, les multiplications et les divisions s'effectuent de gauche à droite. Ainsi,

$$5x \div 3y = 5 \cdot x \div 3 \cdot y = ((5 \cdot x) \div 3) \cdot y = \frac{5 \cdot x}{3} \cdot y = \frac{5xy}{3}.$$

La dernière égalité, $\frac{5 \cdot x}{3} \cdot y = \frac{5xy}{3}$, résulte d'une propriété des fractions. Celles-ci seront présentées à la section suivante.

Finalement, puisque

$$-(2x+1) \div x = -\frac{2x+1}{x}$$

on a

$$5x \div 3y - (2x+1) \div x - 1 = \frac{5xy}{3} - \frac{2x+1}{x} - 1.$$

Pour faciliter la lecture des expressions algébriques et rendre les simplifications plus efficaces, on utilise habituellement une combinaison d'écritures horizontale et verticale.

TABLEAU 1.5 – Propriétés des négatifs

	Propriétés	Exemples
1.	$(-1)a = -a$	$(-1)4x = -4x$
2.	$-(-a) = a$	$-(-5xy) = 5xy$
3.	$(-a)b = -ab$	$(-4)5xy = -(4 \cdot 5)xy = -20xy$
4.	$a(-b) = -ab$	$5x(-3y) = -5x \cdot 3y = -15xy$
5.	$(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-5x) = (2 \cdot 5)x = 10x$
6.	$-(a+b) = -a - b$	$-(3x + 4y) = -3x - 4y$
7.	$-(a-b) = -a + b = b - a$	$-(3x - 4y) = -3x + 4y = 4y - 3x$

On suppose que a et b sont des nombres réels, des variables ou des expressions algébriques.

Exercices

1.15 Réécrivez chacune des expressions suivantes en utilisant les propriétés indiquées. Simplifiez lorsque possible.

(a) L'associativité de la multiplication sur $3(6x)$.
(b) L'associativité de l'addition sur $6x + (5x + 3)$.
(c) La commutativité de la multiplication sur $x \cdot 5$.
(d) La distributivité de la multiplication sur l'addition sur $3(x + 2)$.
(e) La distributivité de la multiplication sur l'addition suivie de l'associativité de la multiplication sur $4(2x - 5)$.

1.16 Pour chacune des égalités suivantes, nommez la propriété utilisée.

(a) $x \cdot 3 = 3x$
(b) $3x + 0 = 3x$
(c) $2 + (5 + 3x) = (2 + 5) + 3x$
(d) $1 \cdot \pi x = \pi x$
(e) $2 \cdot (5 \cdot x) = (2 \cdot 5) \cdot x$
(f) $2(\sqrt{3} + 5x) = 2\sqrt{3} + 10x$
(g) $(3 \cdot 5) + (4 \cdot 2) = (4 \cdot 2) + (3 \cdot 5)$
(h) $\sqrt{3}(x + 1) = (x + 1)\sqrt{3}$

1.17 Dites si l'affirmation suivante est vraie ou si elle est fausse. Si elle est fausse, corrigez-la.

(a) $3(6x) = (3 \cdot 6)x = 18x$ illustre la commutativité de la multiplication.
(b) $(3x)(2y + 1) = (2y + 1)(3x)$ illustre la commutativité de la multiplication.
(c) $2x + 3(1 + x) = 2x + 3 + 3x$ illustre l'associativité de l'addition.
(d) $2x + 3 + 3x = 3 + 2x + 3x$ illustre la commutativité de l'addition.

1.18 Pour chacun des nombres suivants, donnez son opposé.

(a) 1 (b) 2/3 (c) 0,5 (d) $-\pi$ (e) 0

1.19 Pour chacun des nombres suivants, donnez son inverse.

(a) 1 (b) 2/3 (c) 0,5 (d) $-\pi$ (e) 0

1.20 Pour chacun des nombres suivants, donnez l'opposé de son inverse.

(a) 3 (b) -1 (c) 0,75 (d) -2 (e) 0,1

1.21 Évaluez, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

(a) $5 + (-2)$
(b) $-5 + 9$
(c) $9 - (-5)$
(d) $5(-3)$
(e) $-4(-7)$
(f) $-(-9) \div 3$
(g) $-6(10 - 5) \div 2$
(h) $2(2 - 5) \div 6$
(i) $(3(-9) - 2(-3)) \div (3 - 10)$

1.22 Traduisez les expressions suivantes sous forme verticale et vérifiez chacune de vos réponses en entrant directement l'expression donnée dans votre calculatrice, sans utiliser les modèles. Appuyez sur [enter] et comparez ce qui est affiché à gauche de l'écran à votre traduction.

> **Attention !** On ne s'intéresse pas ici à la simplification de l'expression, mais plutôt à sa traduction d'une forme à l'autre.

(a) $2x \div x^2 - 4$
(b) $2x \div (x^2 - 4)$
(c) $2y \div (5x \div y + 1)$
(d) $3x + 2 \div (3x) - 1$
(e) $3x + 2 \div 3x - 1$
(f) $(1 \div x + x \div 8) \cdot 2 \div x - x \div 4$

1.23 Traduisez les expressions suivantes sous forme horizontale en utilisant le moins de parenthèses possible. Vérifiez chacune de vos réponses en entrant l'expression horizontale dans votre calculatrice, appuyez sur [enter] et comparez ce qui est affiché à gauche de l'écran à l'expression initiale.

> **Attention !** On ne s'intéresse pas ici à la simplification de l'expression, mais plutôt à sa traduction d'une forme à l'autre.

(a) $\dfrac{2x}{3} - y$
(b) $\dfrac{2}{5x} - \dfrac{1}{3}$
(c) $\dfrac{3}{x+2}$
(d) $\dfrac{5(x+1)}{3} + \dfrac{2}{5x}$
(e) $\dfrac{x - \frac{2}{y}}{\frac{3}{z}}$
(f) $\dfrac{5}{4 + \frac{1}{3-x}}$

1.4 La simplification d'une expression

Simplifier une expression consiste à écrire celle-ci de façon plus compacte, ou dans une forme plus révélatrice, sans en changer la valeur. En général, on écrit une expression algébrique sous sa forme la plus simple. Cela peut dépendre du contexte et de l'utilisation qui en est faite, mais habituellement, l'expression la plus simple est celle qui comprend le moins de composantes.

1.4.1 La réduction des termes

L'anatomie d'une expression
Dans une expression algébrique, les parties séparées les unes des autres par des additions sont des **termes**. Par exemple, $5x - 9xy + 7$ s'écrit $5x + (-9xy) + 7$. Cette expression a donc trois termes : $5x$, $-9xy$ et 7.
Un terme formé uniquement d'un nombre s'appelle un **terme constant**. Dans l'expression $5x - 9xy + 7$, 7 est un terme constant.
La partie numérique d'un terme s'appelle le **coefficient** du terme. Par exemple, 5 est le coefficient du terme $5x$ et -9 est le coefficient du terme $-9xy$.

Rappel. Le **coefficient** d'un terme indique le nombre d'occurrences de sa partie variable dans une somme. Par exemple, l'expression $5x$ signifie qu'il y a addition de 5 termes x

$$5x = x + x + x + x + x,$$

$-9xy$ signifie qu'il s'agit de l'opposé de $9xy$ où il y a addition de 9 termes xy

$$-9xy = -(xy + xy + xy + xy + xy + xy + xy + xy + xy)$$

et le terme constant 7 signifie qu'on additionne 7 fois le nombre 1.

$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Utiliser des coefficients permet donc d'écrire une somme de façon plus concise. L'expression

$$x+x+x+x+x+x-(xy+xy+xy+xy+xy+xy+xy+xy+xy)+1+1+1+1+1+1+1$$

devient alors, sous une forme simplifiée,

$$5x - 9xy + 7.$$

On dit que deux **termes** sont **semblables** lorsqu'ils ne diffèrent que par leur coefficient. Par exemple, $3x$ est semblable à $8x$ puisque leur partie variable, x, est identique. Par contre, $5x$ et $-9xy$ ne sont pas semblables car leurs parties variables sont différentes, x n'étant pas identique à xy.

La propriété de distributivité du tableau 1.4 (p. 16), lue de gauche à droite, peut être utilisée pour développer des expressions afin d'en retirer les parenthèses. Par exemple,

$$5(x + 1) - 2(3x + 2) = 5x + 5 - 6x - 4.$$

L'expression obtenue peut alors être simplifiée en utilisant à nouveau la distributivité, mais cette fois en la lisant de droite à gauche, pour regrouper les termes semblables. Par exemple,

$$5x + 5 - 6x - 4 = (5 - 6)x + (5 - 4) = -x + 1.$$

On dit qu'une **expression** a été **réduite** lorsque des parenthèses ont été retirées et les termes semblables ont été regroupés. Réduire fait souvent partie du processus de la simplification.

Exemple 1.13

Simplifiez les expressions suivantes en les réduisant, c'est-à-dire retirez les parenthèses et regroupez les termes semblables.

(a) $7-(3x+2)$

(b) $7x+(2-x+3(x-1)+1)-2$

(c) $4x-2(5-3(x+2))$

(d) $4x\div 2-(5x\cdot 3+12\div 3\div 2x-1)$

Solution :

(a) $7-(3x+2)$ a deux termes.

$$7-(3x+2)=\boxed{7}+\boxed{-1\cdot(3x+2)}$$

Puisque le produit a priorité sur la somme, on l'effectue en premier. On réduit donc les termes encadrés avant de les additionner.

$$\begin{array}{rcll} 7-(3x+2) & = & \boxed{7}+\boxed{-1\cdot(3x+2)} & \\ & = & 7-3x-2 & \text{on effectue le produit en utilisant la distributivité de } \cdot \text{ sur } + \\ & = & 7-2-3x & \text{on commute } -3x \text{ et } -2 \\ & = & 5-3x & \text{on regroupe les termes constants par l'associativité de } + \end{array}$$

(b) Il y a 3 termes dans l'expression $7x+(2-x+3(x-1)+1)-2$.

$$\boxed{7x}+\boxed{(2-x+3(x-1)+1)}+\boxed{-2}$$

Les termes $7x$ et -2 sont déjà sous des formes simples. On doit donc réduire le terme du centre avant de l'additionner aux autres termes.

$$\begin{array}{rcll} 2-x+3(x-1)+1 & = & \boxed{2}+\boxed{-x}+\boxed{3(x-1)}+\boxed{1} & \\ & = & 2-x+3x-3+1 & \text{on effectue le produit} \\ & = & (-x+3x)+(2-3+1) & \text{on regroupe les termes semblables} \\ & = & 2x & \text{on réduit} \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} 7x+(2-x+3(x-1)+1)-2 & = & \boxed{7x}+\boxed{(2-x+3(x-1)+1)}+\boxed{-2} \\ & = & \boxed{7x}+\boxed{2x}+\boxed{-2} \\ & = & (7x+2x)-2 \\ & = & 9x-2 \end{array}$$

(c) Il y a deux termes dans l'expression $4x-2(5-3(x+2))$.

$$4x-2(5-3(x+2))=\boxed{4x}+\boxed{-2(5-3(x+2))}$$

Puisque $4x$ est déjà sous une forme simple, on doit simplifier le deuxième terme avant de pouvoir l'additionner à $4x$.

Selon l'ordre de priorité des opérations, on doit d'abord effectuer les opérations à l'intérieur des parenthèses.

$4x-2(5-3(x+2))$	$=$	$4x-2(5-3x-6)$	on effectue le produit qui est à l'intérieur des parenthèses
	$=$	$4x-2(-1-3x)$	on regroupe les termes semblables situés dans les parenthèses
	$=$	$4x+2+6x$	on effectue le produit pour retirer les parenthèses
	$=$	$10x+2$	on regroupe les termes semblables

(d) L'expression $4x \div 2-(5x\cdot 3+12\div 3\div 2x-1)$ a deux termes, mais il y en a trois à l'intérieur des parenthèses ($5x\cdot 3$, $12\div 3\div 2x$ et -1).

Attention ! Même si le symbole $\cdot$ n'apparaît pas dans une expression comme $12\div 3\div 2x$, il y a tout de même une multiplication, $12\div 3\div 2x = 12\div 3\div 2\cdot x$.

Sachant que les opérations $\cdot$ et $\div$ ont la même priorité, elles se font de gauche à droite. Ainsi,

$$12\div 3\div 2\cdot x = ((12\div 3)\div 2)\cdot x = (4\div 2)\cdot x = 2x.$$

et

$$\begin{aligned}5x\cdot 3+12\div 3\div 2x-1 &= \boxed{5x\cdot 3}+\boxed{12\div 3\div 2x}+\boxed{-1}\\ &= \boxed{15x}+\boxed{2x}+\boxed{-1}\\ &= 15x+2x-1\\ &= 17x-1\end{aligned}$$

Puisque la division est une multiplication par l'inverse, on peut simplifier le terme $4\cdot x\div 2$.

$$4\cdot x\div 2 = (4\cdot x)\cdot\frac{1}{2} = (4\cdot\frac{1}{2})\cdot x = 2x$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}4x\div 2-(5x\cdot 3+12\div 3\div 2x-1) &= \boxed{4x\div 2}+\boxed{-(5x\cdot 3+12\div 3\div 2x-1)}\\ &= \boxed{2x}+\boxed{-(17x-1)}\\ &= 2x-17x+1\\ &= -15x+1\\ &= 1-15x.\end{aligned}$$

Exercices

1.24 Dans chacune des expressions suivantes, encadrez les termes.

(a) $13x + 6$
(b) $5x(-3y) - 5x + 6y$
(c) $-7(xy + z)$
(d) $(x + 15)(x - 4)$
(e) $3x + 2 \div 3x - 1$
(f) $(1 \div x + x \div 8) \cdot 2 \div x - x \div 4$

1.25 Simplifiez les expressions suivantes en les réduisant, c'est-à-dire retirez les parenthèses et regroupez les termes semblables.

(a) $(-1)(-5xy) - xy$
(b) $(-7)4xy$
(c) $5x(-3y) - 5x + 6y$
(d) $1 - 2(-5x)$
(e) $2(3x + 4) - 5$
(f) $2(4 - 3x) + 5x$
(g) $5(3x + 1) - 4(5x - 2)$
(h) $3 + 5(x + 1)$
(i) $-(-5x)$
(j) $-(3x - 2y + 5)$
(k) $\frac{1}{5}(5x) + ((2t) + (-2t)) - x$
(l) $1 - (1 - 3x) - (2 - x) - 3x$
(m) $5x + 1 - (x - 3 + 2(x - 2) + 3) - 1$
(n) $3 + 5(xy - y) + x - y + 2xy$
(o) $6(4x - 3y) + 5(y - 3x)$
(p) $1 \div 2 \cdot 4x - (5x - 5x)$
(q) $3x - 2(x - 5 - 4(x - 1))$

1.4.2 La simplification de fractions

Deux **fractions** sont **équivalentes** lorsque les produits croisés sont identiques.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc}$$

Exemple 1.14

Julien a eu 15 sur 20 à son minitest. Cela signifie qu'il a eu 75 % ou, autrement dit, 75 sur 100. Cette affirmation s'exprime par l'égalité des fractions suivante.

$$\frac{15}{20} = \frac{75}{100}$$

$\frac{15}{20}$ et $\frac{75}{100}$ sont des fractions équivalentes et on a bien $15 \cdot 100 = 20 \cdot 75$.

Simplifier une fraction signifie qu'on élimine les **facteurs communs** (les expressions qui sont multipliées) du numérateur et du dénominateur dans le but d'obtenir une fraction équivalente dont les composantes (numérateur et dénominateur) sont plus petites.

$$\boxed{\frac{ka}{kb} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{lorsque } k \neq 0}$$

Par exemple,

$$\frac{12}{100} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 25} = \frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4} \cdot 25} = \frac{3}{25}.$$

Les fractions $\frac{12}{100}$ et $\frac{3}{25}$ sont bien équivalentes, puisque $12 \cdot 25 = 3 \cdot 100$.

Lorsqu'on **multiplie** deux fractions, on divise le produit des numérateurs par le produit des dénominateurs.

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Par exemple,

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 10} = \frac{35}{30}.$$

La fraction obtenue peut alors être simplifiée en utilisant à nouveau la propriété de multiplication des fractions, mais cette fois, en la lisant de droite à gauche.

$$\frac{35}{30} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 6} = \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{6} = \mathbf{1} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

Comme la multiplication d'une quantité par 1 ne change pas sa valeur, les deux fractions, $\frac{35}{30}$ et $\frac{7}{6}$ sont équivalentes. Simplifier une fraction revient donc à éliminer des multiplications par 1 qui s'y cachent.

Procédure pour simplifier une fraction

1. On écrit le numérateur et le dénominateur comme un produit de facteurs. On dit alors qu'on les **factorise**.
2. On élimine tous les **facteurs** qui sont **communs** au numérateur et dénominateur. Lorsqu'il ne reste aucun facteur commun entre le numérateur et le dénominateur autre que 1 et -1, on dit que la **fraction** est **irréductible** ou qu'il s'agit d'un **quotient simplifié**.

Exemple 1.15

Simplifiez chaque fraction suivante pour obtenir une fraction irréductible équivalente.

(a) $\dfrac{24}{40}$ (b) $\dfrac{21xy}{3y}$

Solution :

(a) Pour simplifier la fraction, il faut décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs. On élimine ensuite les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{24}{40}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}=\underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}_{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

(b) En factorisant le coefficient du numérateur, on peut simplifier la fraction de la façon suivante.

$$\frac{21xy}{3y}=\frac{3\cdot 7\cdot x\cdot y}{3\cdot y}=\underbrace{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}}_{1}\cdot\frac{7x}{1}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}}}_{1}=7x,\text{ pour } y\neq 0$$

Attention ! Par les propriétés des négatifs du tableau 1.5 et la propriété de la multiplication de fractions $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ lu de droite à gauche, on peut placer le $-$ devant la fraction.

$$\frac{-a}{b}=\frac{(-1)\cdot a}{1\cdot b}=\frac{(-1)}{1}\cdot\frac{a}{b}=(-1)\cdot\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$$

Les propriétés des négatifs appliquées aux fractions sont résumées au tableau 1.6 à la page 32.

Exemple 1.16

Évaluez, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

(a) $-\frac{-16}{2}$ (b) $\frac{-5(17-11)}{-3}$ (c) $\frac{4(-2)-5(-1)}{15-8}$

Solution :

(a) Puisque $-\frac{-16}{2}$ est l'opposé de $\frac{-16}{2}$,

$$-\frac{-16}{2}=-(-8)=8.$$

Ceci est équivalent à utiliser la propriété 8 du tableau 1.6 et ensuite la propriété 2 du tableau 1.5, page 23, où $a=16$ et $b=2$

$$-\frac{-16}{2}=-\left(-\frac{16}{2}\right)=\frac{16}{2}=8$$

ou encore, en utilisant directement la propriété 9.

(b) La division de deux négatifs donne un positif (propriété 9) :

$$\frac{-5(17-11)}{-3} = \frac{-5(6)}{-3} = \frac{-30}{-3} = \frac{\cancel{(-1)} \cdot 30}{\cancel{(-1)} \cdot 3} = 10.$$

(c) On évalue les composantes de la fraction et ensuite on utilise la propriété 8 des négatifs.

$$\frac{4(-2)-5(-1)}{15-8} = \frac{-8+5}{7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$

On pourrait être tenté de simplifier les x de l'expression $\frac{2x}{5+x}$, même si ce type de simplification ne nous viendrait pas à l'esprit avec des nombres.

$$\frac{2 \cdot 6}{5+6} = \frac{12}{11} \neq \frac{2}{5}$$

Dans la fraction $\frac{2x}{5+x}$, x est un facteur du numérateur, mais il n'est pas un facteur du dénominateur. Il en est un terme et un terme ne peut pas être simplifié avec un facteur.

Avant de simplifier une fraction, il est donc très important de distinguer les termes et les facteurs qui la composent pour pouvoir simplifier la fraction correctement.

Tableau 1.6 – Propriétés des négatifs, suite

	Propriétés	Exemples
8.	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-3x}{y+1} = \frac{3x}{-(y+1)} = -\frac{3x}{y+1}$
9.	$\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}$	$\frac{-2}{-x-y} = -\frac{2}{-(x+y)} = -\frac{-2}{x+y} = \frac{2}{x+y}$

On suppose que a et b sont des nombres réels, des variables ou des expressions algébriques et qu'il n'y a aucune division par 0.

L'anatomie d'une expression, suite

Des expressions qui sont multipliées sont appelées **facteurs**. Par exemple, l'expression $-9xy$ ne comprend qu'un seul terme qui lui, comprend les trois facteurs -9, x et y.

$$-9 \cdot x \cdot y$$

Une quantité entre parenthèses qui est multipliée par une autre est un facteur et ce, même si elle contient plusieurs termes. Par exemple, dans le terme $7(x+1)$, il y a les facteurs 7 et $(x+1)$.

$$7 \cdot (x+1)$$

Une expression comme $5x - 9xy + 7$ est composée de trois termes qui sont eux, composés de facteurs.

$$\boxed{5 \cdot x} + \boxed{-9 \cdot x \cdot y} + \boxed{7}$$

— Le premier terme est $5x$ et il est composé des facteurs 5 et x.
— Le deuxième terme est $-9xy$ et il est composé des facteurs -9, x et y.
— Le troisième terme est 7 et il est composé d'un seul facteur 7.

On peut considérer que tout terme comprend le facteur 1, mais on ne l'indique pas à moins qu'il soit le seul élément d'un terme.

Exemple 1.17

Dans les expressions suivantes, encadrez les termes et, pour chacun de ces termes, encerclez ses facteurs.

(a) $2x + 1 + 3(x+2)$

(b) $3(x+1)y$

Solution :

(a) L'expression $2x + 1 + 3(x+2)$ est composée de trois termes

$$\boxed{2 \cdot x} + \boxed{1} + \boxed{3 \cdot (x+2)}$$

—Le premier terme est $2x$ et il est composé des facteurs 2 et x.
—Le deuxième terme est 1 et il est composé d'un seul facteur 1.
—Le troisième terme est $3(x+2)$ et il est composé de deux facteurs 3 et $(x+2)$.

(b) L'expression $3(x+1)y$ est composé d'un terme et ses facteurs sont 3, $(x+1)$ et y

$$\boxed{3 \cdot (x+1) \cdot y}$$

Exemple 1.18

Simplifiez chaque fraction suivante pour obtenir une fraction irréductible équivalente.

(a) $\dfrac{6x + 12y}{18}$

(b) $\dfrac{x-2}{x-2}$

Solution :

(a) Le numérateur consiste en une somme de deux termes. Si on veut pouvoir simplifier la fraction, il faut l'exprimer comme un produit de facteurs. On constate que 6 est un facteur commun à chaque terme du numérateur. Par la propriété de distributivité, appliquée dans le sens inverse, on peut mettre en évidence ce facteur.

$$\frac{6x+12y}{18} = \frac{\boxed{6\cdot x}+\boxed{6\cdot 2\cdot y}}{18} = \frac{6\cdot(x+2y)}{18}$$

Le numérateur étant factorisé, on peut simplifier les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{6(x+2y)}{18} = \frac{6(x+2y)}{6\cdot 3} = \underbrace{\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}}_{1}\cdot\frac{(x+2y)}{3} = \frac{(x+2y)}{3}$$

(b) Lorsque $x \neq 2$,

$$\frac{x-2}{x-2} = 1$$

puisque qu'une quantité non nulle divisée par elle-même donne 1. Il s'agit en fait de la multiplication de $x-2$ par son inverse $\frac{1}{x-2}$.

Attention ! On simplifie le numérateur et le dénominateur d'une fraction seulement lorsque ceux-ci sont factorisés et ont des **facteurs** communs.

On ne simplifie pas un terme avec un facteur. Par exemple, dans l'expression

$$\frac{5}{5+3x},$$

les 5 ne peuvent pas être éliminés, car 5 n'est pas un facteur du dénominateur, il en est un terme. C'est la somme $5+3x$ qui divise 5.

$$\frac{5}{5+3x} = \overset{\text{facteur}}{5}\cdot\frac{1}{\underset{\text{terme}}{\boxed{5}}+3x} \qquad \text{(Ne se simplifie pas)}$$

On ne simplifie pas un terme du numérateur avec un terme du dénominateur.

$$\frac{4x+3}{4x+1} = \frac{\overset{\text{terme}}{\boxed{4x}}+3}{\underset{\text{terme}}{\boxed{4x}}+1} \qquad \text{(Ne se simplifie pas)}$$

Ici, $4x$ n'est pas divisé par $4x$. C'est la somme $4x+3$ qui est divisée par la somme $4x+1$. Il ne s'agit donc pas d'une multiplication par 1 qui peut être éliminée.

Pour pouvoir simplifier une fraction, il faut s'assurer que le numérateur et le dénominateur soient sous forme factorisée, comme dans l'expression suivante.

$$\frac{7(x-2)}{14(x+2)} = \frac{7\cdot(x-2)}{7\cdot 2\cdot(x+2)} = \frac{\overset{\text{facteur}}{\cancel{7}}\cdot\overset{\text{facteur}}{(x-2)}}{\underset{\text{facteur}}{\cancel{7}}\cdot\underset{\text{facteur}}{2}\cdot\underset{\text{facteur}}{(x+2)}} = \frac{x-2}{2(x+2)}$$

On sait multiplier des fractions et simplifier la fraction résultante. Qu'en est-il pour la division, l'addition et la soustraction de fractions ?

Pour **diviser** deux fractions, on multiplie la fraction de gauche par l'inverse de la fraction de droite. Par exemple,

$$\frac{5}{3} \div \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{35}{12}$$

En général, si a, b, c et d sont des nombres réels (ou des expressions) tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

Pour **additionner** (ou **soustraire**) deux fractions ayant le **même dénominateur** on additionne (ou on soustrait) les numérateurs. Le dénominateur de la fraction résultante est le dénominateur commun aux deux fractions. Par exemple,

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1-4}{3} = \frac{-3}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

En général, si a, b et c sont des nombres réels (ou des expressions) tels que $b \neq 0$,

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}}$$

Pour **additionner** (ou **soustraire**) deux fractions ayant des **dénominateurs différents**, on additionne (on soustrait) des fractions équivalentes ayant le même dénominateur. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} - \frac{4}{5} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{3} && \text{le diviseur est le produit des deux dénominateurs} \\
&= \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 3} && \text{on effectue les multiplications} \\
&= \frac{5}{15} - \frac{12}{15} && \text{on soustrait deux fractions ayant le même dénominateur} \\
&= \frac{5-12}{15} = \frac{-7}{15} = -\frac{7}{15}
\end{aligned}$$

En général, si a, b, c et d sont des nombres réels (ou des expressions) tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}}$$

Les propriétés des fractions présentées dans cette section sont résumées au tableau 1.7 à la page 39.

Exemple 1.19

Simplifiez chaque fraction suivante pour obtenir une fraction irréductible équivalente.

(a) $\frac{30}{42}$

(b) $\frac{-9}{5} \cdot \frac{2x-1}{3}$

(c) $\frac{3}{x} \div \frac{x+2}{x}$

(d) $\frac{3x-1}{2} + \frac{x+3}{2}$

(e) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+3}{2}$

(f) $\frac{x+2}{5} - \frac{1-2x}{3}$

Solution :

(a) On factorise le numérateur et le dénominateur et on simplifie les facteurs communs à l'aide de la propriété 2 des fractions, $\frac{k\cdot a}{k\cdot b} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{30}{42} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 7} = \frac{5}{7}$$

Attention ! On peut simplifier les facteurs communs, car il s'agit de la multiplication par le neutre.

$$\frac{30}{42} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{5}{7} = 1\cdot 1\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

(b) Puisqu'il s'agit d'une multiplication de fractions, on utilise la propriété 3 des fractions, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

$$\begin{aligned}
\frac{-9}{5}\cdot\frac{2x-1}{3} &= \frac{-9\cdot(2x-1)}{5\cdot 3} && \text{on multiplie les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble (prop. 3)}\\
&= \frac{-3\cdot\cancel{3}\cdot(2x-1)}{5\cdot\cancel{3}} && \text{on factorise les coefficients}\\
&= \frac{-3(2x-1)}{5} && \text{on simplifie les facteurs communs (prop. 2)}\\
&= -\frac{3(2x-1)}{5} && \text{on utilise la propriété des négatifs } \tfrac{-a}{b} = -\tfrac{a}{b} \text{ pour mettre le } - \text{ devant la fraction}
\end{aligned}$$

(c) On utilise la propriété 4 pour diviser deux fractions, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x}\div\frac{x+2}{x} &= \frac{3}{x}\cdot\frac{x}{x+2} && \text{on transforme la division en une multiplication par l'inverse du dénominateur (prop. 4)}\\
&= \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)} && \text{on multiplie les fractions (prop. 3)}\\
&= \frac{3}{x+2} && \text{pour } x\neq 0\text{, on simplifie les facteurs communs (prop. 2)}
\end{aligned}$$

(d) On constate que le dénominateur est commun aux deux fractions. On utilise donc la propriété 5, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{2}+\frac{x+3}{2} &= \frac{(3x-1)+(x+3)}{2} && \text{on additionne deux fractions ayant le même dénominateur (prop. 5)}\\
&= \frac{3x-1+x+3}{2} && \text{on élimine les parenthèses superflues}\\
&= \frac{4x+2}{2} && \text{on réduit le numérateur en regroupant les termes semblables}\\
&= \frac{\cancel{2}(2x+1)}{\cancel{2}} && \text{on met en évidence 2 au numérateur en utilisant la propriété de distributivité de } \cdot \text{ sur } +\\
&= 2x+1 && \text{on simplifie les facteurs communs (prop. 2)}
\end{aligned}$$

(e) Comme en (d), les deux fractions ont le même dénominateur. Puisqu'il s'agit d'une soustraction, on utilise la propriété 6, $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{2} - \frac{x+3}{2} &= \frac{(3x-1)-(x+3)}{2} && \text{on soustrait deux fractions ayant le même dénominateur (prop. 6)}\\
&= \frac{3x-1-x-3}{2} && \text{on distribue } -1 \text{ sur } (x+3) \text{ et on élimine les parenthèses superflues}\\
&= \frac{2x-4}{2} && \text{on réduit le numérateur en regroupant les termes semblables}\\
&= \frac{\cancel{2}(x-2)}{\cancel{2}} && \text{on met en évidence 2 au numérateur en utilisant la propriété de distributivité de } \cdot \text{ sur } +\\
&= x-2 && \text{on simplifie les facteurs communs (prop. 2)}
\end{aligned}$$

(f) Puisque les dénominateurs sont différents, on utilise la propriété 8, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ et non la propriété 6.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{5} - \frac{1-2x}{3} &= \frac{(x+2)3-5(1-2x)}{5 \cdot 3} && \text{on pose } a = x+2,\ b = 5,\ c = 1-2x \text{ et } d = 3 \text{ (prop. 8)}\\
&= \frac{3x+6-5+10x}{15} && \text{on développe le numérateur}\\
&= \frac{13x+1}{15} && \text{on regroupe les termes semblables}
\end{aligned}$$

Exemple 1.20

Simplifiez chacune des fractions suivantes pour obtenir des fractions irréductibles équivalentes.

(a) $\dfrac{2}{\frac{1}{x}}$ (b) $\dfrac{\frac{2}{x-1}+1}{3}$ (c) $\dfrac{\frac{x}{x-2}+1}{\frac{3}{x-2}-1}$

Solution :

(a) Puisque $\frac{2}{\frac{1}{x}} = 2 \div (1 \div x)$, 2 est divisé par la fraction $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{x}} &= \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{x}} && \text{diviser par 1 ne change pas la valeur du numérateur}\\
&= \frac{2}{1} \cdot \frac{x}{1} && \text{on multiplie par l'inverse du dénominateur (prop. 4)}\\
&= \frac{2 \cdot x}{1 \cdot 1} = 2x && \text{on effectue le produit (prop. 3)}
\end{aligned}$$

(b) On peut s'aider en écrivant 1 comme la fraction $\frac{1}{1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{x-1}+1}{3} &= \frac{\frac{2}{x-1}+\frac{1}{1}}{3} && \text{diviser par 1 ne change pas la valeur du numérateur} \\
&= \frac{\frac{2+(x-1)}{x-1}}{3} && \text{on met au même dénominateur (prop. 7)} \\
&= \frac{\frac{x+1}{x-1}}{3} && \text{on réduit le numérateur} \\
&= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1}{3} && \text{on multiplie par l'inverse du dénominateur (prop. 4)} \\
&= \frac{x+1}{(x-1)\cdot 3} && \text{on effectue le produit} \\
&= \frac{x+1}{3(x-1)} && \text{on utilise la commutativité de la multiplication}
\end{aligned}$$

(c) On simplifie les composantes de la fraction avant d'inverser son dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{x-2}+1}{\frac{3}{x-2}-1} &= \frac{\frac{x+(x-2)}{x-2}}{\frac{3-(x-2)}{x-2}} && \text{on met au dénominateur commun (le numérateur et le dénominateur, prop. 7)} \\
&= \frac{\frac{x+x-2}{x-2}}{\frac{3-x+2}{x-2}} && \text{on élimine les parenthèses par distributivité de } \cdot \text{ sur } + \\
&= \frac{\frac{2x-2}{x-2}}{\frac{5-x}{x-2}} && \text{on réduit les numérateurs} \\
&= \frac{2x-2}{x-2}\cdot\frac{x-2}{5-x} && \text{on multiplie par l'inverse de la fraction du dénominateur (prop. 4)} \\
&= \frac{(2x-2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(5-x)} && \text{en supposant que } x \neq 2\text{, on simplifie le facteur commun } (x-2) \text{ (prop. 2)} \\
&= \frac{2x-2}{5-x} = \frac{2(x-1)}{5-x} && \text{on peut présenter la solution de plus d'une façon...}
\end{aligned}$$

Tableau 1.7 – Propriétés des fractions

	Propriétés	Exemples
1.	fractions équivalentes	
	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$	$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ car $4 \cdot 9 = 36 = 6 \cdot 6$
2.	simplification	
	$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{a}{b}$	$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$
		$\frac{3(x+1)xy}{2x} = \frac{3(x+1)y}{2}$, si $x \neq 0$
	opérations	
3.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$
		$\frac{2}{3} \cdot \frac{5x}{y+1} = \frac{2 \cdot 5x}{3(y+1)} = \frac{10x}{3y+3}$
4.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$
		$\frac{2}{3} \div \frac{5x}{y+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y+1}{5x} = \frac{2(y+1)}{15x}$
5.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}$
		$\frac{5x}{3y} + \frac{2x+1}{3y} = \frac{5x+2x+1}{3y} = \frac{7x+1}{3y}$
6.	$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1$
		$\frac{5x}{3y} - \frac{2x+1}{3y} = \frac{5x-(2x+1)}{3y} = \frac{5x-2x-1}{3y} = \frac{3x-1}{3y}$
7.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{5}{7} + \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 5 + 7 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{25+28}{35} = \frac{53}{35}$
		$\frac{5x}{7} + \frac{4y}{5} = \frac{5x \cdot 5 + 7 \cdot 4y}{7 \cdot 5} = \frac{25x+28y}{35}$
8.	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$	$\frac{5}{7} - \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 5 - 7 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{25-28}{35} = \frac{-3}{35} = -\frac{3}{35}$
		$\frac{2x}{3} - \frac{2y-3}{5} = \frac{2x \cdot 5 - 3 \cdot (2y-3)}{3 \cdot 5} = \frac{10x-6y+9}{15}$

On suppose que a, b, c, d, k sont des nombres réels, des variables ou des expressions algébriques et qu'il n'y a aucune division par 0.

Exercices

1.26 Dans les expressions suivantes, encadrez les termes et, pour chacun de ces termes, encerclez ses facteurs.

(a) $13x + 6$
(b) $4x - yz$
(c) $5xy + 3y + 9$
(d) $8(x + 1)$
(e) $-7(xy + z)$
(f) $(x + 15)(x - 4)$

1.27 Est-ce possible d'éliminer les nombres en gras, sans changer la valeur de l'expression ? Justifiez.

(a) $\dfrac{\mathbf{2} + x}{\mathbf{2}}$
(b) $\dfrac{\mathbf{2}x}{\mathbf{2}}$
(c) $\dfrac{\mathbf{2} + \mathbf{2}x}{\mathbf{2}}$
(d) $\dfrac{\mathbf{3}x}{\mathbf{3}y}$
(e) $\dfrac{\mathbf{8}(x - 1)}{\mathbf{8}x}$
(f) $\dfrac{\mathbf{5}}{x - \mathbf{5}}$
(g) $\dfrac{x - \mathbf{7}y}{2 + \mathbf{7}y}$
(h) $\dfrac{\mathbf{9}a}{\mathbf{9}b + \mathbf{9}}$

1.28 Si les numérateurs et dénominateurs des fractions suivantes ne sont pas complètement factorisés, décomposez-les en facteurs. Simplifiez ensuite les fractions.

(a) $\dfrac{72}{27}$
(b) $\dfrac{6xy}{21y}$
(c) $\dfrac{5x + 5}{5(x + 1)}$
(d) $\dfrac{24(a + 1)(b + c)}{15(a + 1)}$
(e) $\dfrac{4x - 16}{20x + 12}$
(f) $\dfrac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{5 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}$
(g) $\dfrac{3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)}{3 \cdot (x - 1)}$
(h) $\dfrac{-x(x + 8)}{-13(x + 8)}$
(i) $\dfrac{(2x + 2)(3y - 3)}{12}$

1.29 Simplifiez les fractions suivantes, lorsque c'est possible.

(a) $\dfrac{28a}{12b}$
(b) $\dfrac{6x + 1}{6}$
(c) $\dfrac{4(a - b)}{2b}$
(d) $\dfrac{x}{x - 17}$
(e) $\dfrac{7x + 14y}{21x + 7y}$
(f) $\dfrac{a + 2b}{3a + 2b}$
(g) $\dfrac{x - y}{x + y}$
(h) $\dfrac{x - y}{x - y}$
(i) $\dfrac{15(x + 2)(x - 3)}{5(x - 3)}$

1.30 Simplifiez les fractions suivantes. Donnez vos réponses sous forme de fractions irréductibles.

(a) $\dfrac{45}{35}$
(b) $\dfrac{-350}{280}$
(c) $\dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{5}{2}$
(d) $\dfrac{3}{7} \cdot 2$
(e) $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{-10}{3}$
(f) $\dfrac{5}{3} \div \dfrac{2}{3}$
(g) $\dfrac{5}{3} \div 3$
(h) $-\dfrac{4}{5} \div \dfrac{-3}{25}$
(i) $-\dfrac{-4}{9} \div \dfrac{8}{-15}$
(j) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$
(k) $\dfrac{\frac{1}{2}}{3}$
(l) $\dfrac{2}{9} + \dfrac{7}{9}$
(m) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{4}$
(n) $\dfrac{-3}{5} + \dfrac{7}{5}$
(o) $\dfrac{5}{4} - \dfrac{15}{4}$
(p) $\dfrac{5}{2} - \dfrac{-13}{2}$
(q) $\dfrac{5}{7} + \dfrac{3}{6}$
(r) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{3}$
(s) $\dfrac{3}{10} - \dfrac{7}{20}$
(t) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\right) \div (\dfrac{5}{2} \cdot 3)$
(u) $\dfrac{\frac{3}{7} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{30 \cdot \frac{5}{6}}$
(v) $\dfrac{\frac{5-9}{2} - 1}{\frac{1}{5-2} + 1}$
(w) $\dfrac{\frac{-5-3}{-2} - \frac{3}{-6}}{\frac{2-1}{2} + \frac{6}{3}}$

1.31 Simplifiez les fractions suivantes. Donnez vos réponses sous forme de fractions irréductibles.

(a) $\dfrac{2(x-1)}{6}$

(b) $\dfrac{6x-3}{6}$

(c) $\dfrac{5x(y+2)}{2y+4}$

(d) $-\dfrac{3}{y+1}\cdot\dfrac{4x}{-5}$

(e) $\dfrac{2x-1}{5}\cdot\dfrac{3}{5}$

(f) $\dfrac{2x-1}{5}\div\dfrac{3}{5}$

(g) $\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3}{5}$

(h) $\dfrac{5}{3}+\dfrac{2x}{3}$

(i) $\dfrac{4}{7}+\dfrac{2x+3}{7}$

(j) $\dfrac{5x-1}{3}+\dfrac{4x-2}{3}$

(k) $\dfrac{5}{2}-\dfrac{2x+1}{2}$

(l) $\dfrac{4-x}{x+2}+\dfrac{5x+4}{x+2}$

(m) $\dfrac{5(x+1)}{3}-\dfrac{2}{3}$

(n) $\dfrac{3x}{2y+1}-\dfrac{5z}{2y+1}$

(o) $\dfrac{4x}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x+1}$

(p) $\dfrac{1-3x}{x}-\dfrac{5x+1}{x}$

(q) $\dfrac{15x+1}{6}-\dfrac{5x-1}{6}$

(r) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{3}{6}$

(s) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{3-x}{6}$

(t) $\dfrac{2x}{5}-\dfrac{3-x}{6}$

(u) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}x$

(v) $2x\div x^2-4$

(w) $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{2x+3}{6}$

1.32 Simplifiez les fractions suivantes. Donnez vos réponses sous forme de fractions irréductibles.

(a) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}$

(b) $\dfrac{4-\frac{1}{x}}{8+\frac{1}{x}}$

(c) $\dfrac{5}{4+\frac{1}{3-x}}$

(d) $\dfrac{x-\frac{x}{x+3}}{x+2}$

1.5 Les exposants

1.5.1 Les exposants entiers

Définition 1.3 On appelle n^e puissance de a ou a puissance n, le produit de a par lui-même n fois.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a\ n\ \text{fois}} \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

La valeur a est la **base** et n est l'**exposant** de l'expression a^n.

Rappel. Comme le coefficient d'une expression indique le nombre de termes identiques dans une somme, un exposant sert à indiquer le nombre d'occurrences de facteurs identiques dans un produit. Par exemple,

$$x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x.$$

Il faut bien distinguer une expression comme xy^2 de $(xy)^2$. Dans le premier cas, seul le facteur y est présent deux fois dans le produit, tandis que dans le deuxième, c'est xy qui est répété dans le produit.

$$xy^2 = x \cdot y \cdot y \text{ tandis que } (xy)^2 = xy \cdot xy = x \cdot x \cdot y \cdot y = x^2y^2$$

L'exposant ne s'applique qu'au symbole qui le précède immédiatement, à moins qu'il s'agisse d'une quantité entre parenthèses. C'est pourquoi

$$-1^2 = -1, \text{ tandis que } (-1)^2 = (-1)(-1) = 1.$$

L'expression -1^2 signifie l'opposé de 1^2, tandis que $(-1)^2$ représente le carré de -1.

Les propriétés des exposants sont résumées au tableau 1.8 (p. 43) et sont utilisées pour simplifier des expressions contenant des exposants. Les erreurs typiques qu'il faut à tout prix éviter sont décrites au tableau 1.9 (p. 46).

Exemple 1.21

Déterminez lequel des symboles, $=$ ou $\neq$, est approprié.

(a) $5^2 \cdot 5^3 \ ? \ 5^6$ (b) $5^3 + 5^3 \ ? \ 5^6$ (c) $(4^2)^3 \ ? \ 4^8$

Solution :

(a) $5^2 \cdot 5^3 \neq 5^6$, car on additionne les exposants

$$\underbrace{5^2 \cdot 5^3}_{(5\cdot5)(5\cdot5\cdot5)} = 5^{2+3} = 5^5$$

(b) $5^3 + 5^3 \neq 5^6$, car $5^3 + 5^3 = 2 \cdot 5^3 = 250$, on additionne deux termes ($5^3 + 5^3 = 125 + 125$).

(c) $(4^2)^3 \neq 4^8$, car $\underbrace{(4^2)^3}_{(4^2)(4^2)(4^2)} = 4^{2\cdot3} = 4^6$, on multiplie les exposants.

TABLEAU 1.8 – Propriétés des exposants

	Propriétés	Exemples
1.	Produit de puissances : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$ $x^{-3}x^7 = x^{-3+7} = x^4$
2.	Puissance à une puissance : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$ $(x^{-3})^4 = x^{-3 \cdot 4} = x^{-12} = \dfrac{1}{x^{12}}$
3.	Produit à une puissance : $(ab)^m = a^m \cdot b^m$	$(-2y)^3 = (-2)^3y^3 = -8y^3$
4.	Quotient à une puissance : si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$ $\left(-\frac{3}{x}\right)^3 = (-1)^3\left(\frac{3}{x}\right)^3 = -\frac{3^3}{x^3} = -\frac{27}{x^3}$
5.	Quotient de puissances : si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{2^8}{2^3} = 2^{8-3} = 2^5 = 32$ $\dfrac{x^3}{x^7} = x^{3-7} = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$
6.	Exposant zéro : si $a \neq 0$, $a^0 = 1$	$7^0 = 1$, $(-2)^0 = 1$, $-2^0 = -1$
7.	Exposant négatif : si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $\frac{1}{4^{-2}} = 4^2 = 16$

On suppose que a et b représentent des nombres réels ou des expressions algébriques et que m et n sont des entiers.

Une **expression contenant des exposants est** dite **simplifiée**
— s'il n'y a pas de parenthèses inutiles,
— s'il n'y a aucune puissance de puissance,
— si chaque base n'apparaît qu'une fois,
— si les exposants sont positifs.

Exemple 1.22

Utilisez les propriétés des exposants pour simplifier les expressions suivantes.

(a) $6(xy^3)^5$ (b) $\dfrac{9x^8y^6}{3x^4y^8}$ (c) $\left(\dfrac{8u^{-1}}{2^2u^2v^0}\right)^{-2}$

Solution :

(a) On utilise d'abord la propriété du produit à une puissance (prop. 3) et ensuite celle de la puissance d'une puissance (prop. 2).

$$6(xy^3)^5 = 6 \cdot x^5 \cdot (y^3)^5 = 6x^5y^{15}$$

(b) On utilise la propriété du produit de fractions, celle du quotient de puissances et, finalement, la transformation de l'exposant négatif.

$$\frac{9x^8y^6}{3x^4y^8} = \frac{9}{3} \cdot \frac{x^8}{x^4} \cdot \frac{y^6}{y^8} = 3x^{8-4}y^{6-8} = 3x^4y^{-2} = 3x^4 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{3x^4}{y^2}$$

(c) On calcule d'abord $2^2 = 4$ et on utilise le fait que $v^0 = 1$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{8u^{-1}}{2^2u^2v^0}\right)^{-2} &= \left(\frac{8u^{-1}}{4u^2 \cdot 1}\right)^{-2} && \\
&= \left(\frac{8}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{u^2}\right)^{-2} && \text{on réécrit comme un produit de fractions} \\
&= (2 \cdot u^{-3})^{-2} && \text{on soustrait les exposants} \\
&= 2^{-2} \cdot (u^{-3})^{-2} && \text{on applique l'exposant sur le produit} \\
&= 2^{-2} \cdot u^6 && \text{on multiplie les exposants} \\
&= \frac{1}{2^2} \cdot u^6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^6}{1} && \text{on transforme l'exposant négatif} \\
&= \frac{u^6}{4} && \text{on écrit comme une seule fraction simplifiée}
\end{aligned}$$

Exemple 1.23

Sans l'aide d'une calculatrice, déterminez lequel des trois symboles suivants est approprié :

$$< \quad = \quad >$$

(a) $-10^6 \;\; ? \;\; 10^{-6}$ (b) $0{,}25^{13} \;\; ? \;\; 0{,}25^{21}$ (c) $5^{-27} \;\; ? \;\; (0{,}2)^{27}$

Solution :

(a) $-10^6 < 10^{-6}$
On a que $10^{-6} = \frac{1}{10^6}$. Bien que $\frac{1}{10^6}$ soit très petit (un millionième), il s'agit d'un nombre positif supérieur au nombre négatif -10^6 (moins un million).

(b) $0{,}25^{13} > 0{,}25^{21}$
Si on transforme en fractions,

$$0{,}25^{13} = \left(\frac{1}{4}\right)^{13} = \frac{1^{13}}{4^{13}} = \frac{1}{4^{13}} \quad \text{et} \quad 0{,}25^{21} = \left(\frac{1}{4}\right)^{21} = \frac{1^{21}}{4^{21}} = \frac{1}{4^{21}}.$$

Le nombre $\dfrac{1}{4^{13}}$ est très petit, mais $\dfrac{1}{4^{21}}$ l'est encore plus.

(c) $5^{-27} = (0{,}2)^{27}$
En effet, $5^{-27} = \left(5^{-1}\right)^{27} = \left(\frac{1}{5}\right)^{27} = (0{,}2)^{27}$.

Tableau 1.9 – Erreurs typiques à éviter

Erreur typique	Description de l'erreur	Correction
$a^3a^4 \cancel{=} a^{12}$	Les exposants ne doivent pas être multipliés, ils doivent être additionnés	$a^3a^4 = a^{3+4} = a^7$
$3^n3^m \cancel{=} 9^{n+m}$	La base commune est 3, pas 9	$3^n3^m = 3^{n+m}$
$\dfrac{5^{16}}{5^4} \cancel{=} 5^4$	Les exposants ne doivent pas être divisés, ils doivent être soustraits	$\dfrac{5^{16}}{5^4} = 5^{16-4} = 5^{12}$
$(4a)^3 \cancel{=} 4a^3$	Tous les facteurs sont au cube	$(4a)^3 = 4^3a^3 = 64a^3$
$3^{-4} \cancel{=} -\dfrac{1}{3^4}$	Seulement l'exposant change de signe	$3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$
$(a+3)^{-1} \cancel{=} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{3}$	L'exposant affecte la somme complète	$(a+3)^{-1} = \dfrac{1}{a+3}$

Exercices

1.33 Lorsqu'on cherche le centre de gravité d'une section de disque plat de rayon r et d'épaisseur uniforme, on obtient l'équation suivante pour sa position en x,

$$x = \frac{4\pi r^3}{3} \div \left(\frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi\right).$$

Simplifiez le côté droit de l'équation pour décrire x en fonction de r sous sa forme la plus simple.

1.34 Une pièce carrée est découpée à partir d'une planche en bois rectangulaire de 10 cm × 30 cm. On supposera que la planche est d'épaisseur uniforme.

(a) Si la pièce découpée de la planche a un côté de longueur 5 cm, quelle est la mesure de la surface (c'est-à-dire l'aire) de la planche restante ?

(b) Si la pièce découpée de la planche a un côté de longueur x cm, déterminez une expression en termes de x pour la mesure de la surface de la planche restante. On suppose qu'on peut ne rien découper, c'est-à-dire que x peut être zéro.

Quelles sont les contraintes sur x ? Exprimez les contraintes sous la forme d'un intervalle.

(c) Évaluez l'expression obtenue en (b) pour $x = 5$ cm, $x = 10$ cm et $x = 3{,}2$ cm.

1.35 Écrivez chacune des puissances suivantes sous forme de produits de facteurs sans exposant et évaluez les expressions obtenues. Par exemple, $2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

(a) 3^2
(b) -5^3
(c) $(-5)^3$
(d) 5^{-3}
(e) $2^3 3^2$
(f) $-3\left(\frac{1}{5}\right)^2$
(g) $-5(-2)^{-3}$

1.36 Écrivez les puissances suivantes sous forme de produits de facteurs sans exposant. Lorsque possible, simplifiez les expressions obtenues.

(a) $(3x)^2(2y)^3$
(b) $\dfrac{(2xy)^2 x^5}{xy}$
(c) $2^{-1}xy^{-3}$

1.37 Écrivez chacune des expressions suivantes à l'aide de puissances. Par exemple, $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 5^3 10^2 = 12500$, $(3xy)(3xy) = (3xy)^2 = 9x^2y^2$ et $3xxxx + 1 = 3x^4 + 1$.

(a) $(-3)(-3)(-3)(-3)$
(b) $-2 \cdot 2 \cdot 2$
(c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
(d) $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}$
(e) $3xxxx + 5yyzzz$
(f) $3x^2x^2x^2y^3y^3y^3y^3$
(g) $(1-3x)(1-3x)(1-3x)(1-3x)$
(h) $(x-2y)^2 \cdot (x-2y)^2 \cdot (x-2y)^2$

1.38 Déterminez lequel des symboles, $=$ ou $\neq$, est approprié.

(a) $-2x^{-1}$? $2x$
(b) $3^2 \cdot 3^3$? 9^5
(c) $2^3 + 2^3$? 4^3
(d) $(3^2)^3$? 3^5
(e) $\dfrac{3^8}{3^2}$? 3^4
(f) $\dfrac{10^8}{2^8}$? 5^8
(g) $\dfrac{5x^2}{x^2}$? $4x^2$
(h) $\dfrac{x^2-2}{x^2}$? -2
(i) $1 - 3x^{-2}$? $1 - \dfrac{1}{3x^2}$
(j) $3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1}$? 1
(k) 2^{100} ? 16^{25}
(l) 10^{-3} ? $0{,}0001$
(m) $15{,}17 \times 10^5$? $1{,}517 \times 10^6$

1.39 La masse de la Terre est estimée à 5 972 000 000 000 000 000 000 000 kg et celle de Jupiter à $1{,}898 \times 10^{27}$ kg. Jupiter serait donc combien de fois plus massive que la Terre ?

1.40 Utilisez les propriétés des exposants pour simplifier les expressions suivantes.

(a) x^2x^3

(b) $(x^2)^3$

(c) $a^2a^3a^4$

(d) $(3a^2b)^4(ab)^3$

(e) $(a+b)^2(a+b)^3(a+b)^4$

(f) $(3x)^4y^{-2}$

(g) $\left(\dfrac{1}{2x^{-2}y^4}\right)^3$

(h) $9x^{-1}$

(i) $\left(\dfrac{7a}{3b}\right)^{-1}$

(j) $12(x^5y)^0$

(k) $\dfrac{-(ab^2)^{-6}}{b^{-1}}$

(l) $\dfrac{(x^5y)^2}{(x^5y)^3}$

(m) $\dfrac{64xy^{-1}z}{(8yz^3)^2}$

(n) $\dfrac{-4st}{(-st)^4}$

(o) $(-3^{-2}a)^{-1}(-a^3b^{-4})^2$

(p) $\left(\dfrac{11}{6x^2y^{-4}}\right)^{-2}$

(q) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{(5x)^2}{2x}\right)^{-3}$

(r) $\dfrac{(a+1)^3(b+1)}{(a+1)^2(b+1)^4}$

(s) $\dfrac{5^{n+1}\,5^n}{5^{n-1}} \cdot \dfrac{1}{5^{-2n}}$

(t) $\dfrac{2^n\,(n+1)\,x^{n+1}}{2^{n+1}\,n\,x^n}$

1.41 Sans l'aide d'une calculatrice, déterminez lequel des trois symboles suivants est approprié :

$$< \quad = \quad >$$

(a) 2^{-11} ? $0{,}5^{11}$

(b) $(-0{,}1)^{-15}$? -10^{15}

(c) 2^{25} ? 2^{33}

(d) 2^{-25} ? 2^{-33}

(e) $(-2)^{25}$? $(-2)^{33}$

(f) 10^{-25} ? 10^{33}

(g) $0{,}5^{25}$? $0{,}5^{33}$

(h) $(-0{,}5)^{25}$? $(-0{,}5)^{33}$

(i) $(-0{,}5)^{-15}$? $(-0{,}5)^{-17}$

(j) $0{,}5^{-25}$? $0{,}1^{-25}$

(k) -3^{-5} ? 5^{-3}

1.5.2 Les radicaux et les exposants rationnels

Définition 1.4 Une **racine carrée** d'un nombre réel positif a est un nombre réel b tel que

$$b^2 = a.$$

La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est la valeur **positive** b telle que $b^2 = a$.

Exemple 1.24

Évaluez, lorsque possible, les expressions suivantes.

(a) $\sqrt{100}$ (b) $\sqrt{1}$ (c) $\sqrt{-25}$ (d) $-\sqrt{25}$ (e) $\sqrt{0}$

Solution :

(a) Les racines carrées de 100 sont 10 et -10. Celle qu'on désigne par $\sqrt{100}$ est positive, $\sqrt{100} = 10$.

(b) 1 et -1 sont des racines carrées de 1 et $\sqrt{1} = 1$.

(c) $\sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$, car il est impossible qu'un nombre réel, élevé au carré, soit négatif.

(d) $-\sqrt{25} = -5$, car $\sqrt{25} = 5$.

Rappel. Le radical agit comme une parenthèse. On doit donc l'évaluer avant de prendre l'opposé.

(e) 0 n'a qu'une seule racine carrée, $\sqrt{0} = 0$.

Contrairement à la racine carrée, la racine cubique d'un nombre réel est toujours définie dans les réels.

Définition 1.5 Une **racine cubique** d'un nombre réel a est un nombre réel b tel que

$$b^3 = a.$$

Dans les réels, la **racine cubique** de a, notée $\sqrt[3]{a}$, est la seule valeur réelle b telle que $b^3 = a$.

Exemple 1.25

Évaluez, lorsque possible, les expressions suivantes.

(a) $\sqrt[3]{-27}$ (b) $\sqrt[3]{0}$ (c) $\sqrt[3]{125}$ (d) $-\sqrt[3]{-64}$ (e) $\sqrt[3]{1}$

Solution :

(a) $\sqrt[3]{-27} = -3$, car $(-3)^3 = -27$

(b) $\sqrt[3]{0} = 0$, car $0^3 = 0$

(c) $\sqrt[3]{125} = 5$, car $(5)^3 = 125$

(d) $\sqrt[3]{-64} = -4$ et, puisqu'on veut son opposé, $-\sqrt[3]{-64} = 4$

(e) $\sqrt[3]{1} = 1$, car $1^3 = 1$

Définition 1.6 Dans les réels, pour $n \in \mathbb{N}^*$, **une racine** n^e d'un nombre réel a est un nombre réel b tel que

$$b^n = a.$$

Définition 1.7 Dans les réels, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la **racine** n^e d'un nombre réel a, notée $\sqrt[n]{a}$, est définie selon la parité de n de la façon suivante.

— Si n est impair et $b^n = a$ alors $\sqrt[n]{a} = b$. Autrement dit, la racine n^e de a est l'unique racine n^e réelle de a.

— Si n est pair, $a \geq 0$ et $b^n = a$ alors $\sqrt[n]{a} = b$ où $b \geq 0$. Autrement dit, parmi les racines n^e de a, la racine n^e de a qu'on désigne par $\sqrt[n]{a}$ est celle qui est positive.

Exemple 1.26

Si n est un **entier impair**, tout nombre réel a possède une seule racine n^e dans les réels et on la désigne par $\sqrt[n]{a}$.

(a) 2 est une racine cubique (racine 3^e) de 8 car $2^3 = 8$. Puisque 2 est la seule racine cubique de 8, on écrit $2 = \sqrt[3]{8}$.

(b) Puisque $(-3)^5 = -243$ et que -3 est la seule racine 5^e de -243 dans les réels, on écrit $\sqrt[5]{-243} = -3$.

Exemple 1.27

Si n est un **entier pair**, tout nombre réel positif a possède deux racines n^e réelles. C'est la racine positive qu'on désigne par $\sqrt[n]{a}$. Si on veut la racine négative, on écrira $-\sqrt[n]{a}$.

Par exemple, le nombre 625 a deux racines 4^e puisque $5^4 = 625$ et $(-5)^4 = 625$. De ces deux racines, la positive est celle qu'on désigne par $\sqrt[4]{625}$, c'est-à-dire $\sqrt[4]{625} = 5$. La racine négative est $-\sqrt[4]{625} = -5$.

Attention ! Il ne faut pas confondre $\sqrt[4]{625}$ avec l'ensemble des solutions possibles de l'équation $x^4 = 625$. La notation $\sqrt[4]{625}$ est réservée à la racine positive. On parle alors de *la* racine 4^e de 625 plutôt que *d'une* racine quatrième de 625.

Les nombres complexes
Les affirmations de cette section sont vraies si on se limite aux nombres réels. Dans l'univers des nombres complexes, celles-ci doivent être nuancées. Dans l'ensemble plus large des complexes, un nombre possède exactement n racines n^e, c'est-à-dire que, pour tout nombre complexe a, il existe n nombres complexes b_i tels que $b_i^n = a$ pour $i = 1,2,...,n$.
Par exemple, -8 n'a qu'une seule racine cubique réelle, qui est -2, mais possède trois racines cubiques complexes, soit -2 et $1-\sqrt{3}i$ et $1+\sqrt{3}i$. En effet, $(-2)^3 = -8$, $(1-\sqrt{3}i)^3 = -8$ et $(1+\sqrt{3}i)^3 = -8$. En multipliant $1-\sqrt{3}i$ trois fois par lui-même et en considérant que $i^2 = -1$, on vérifie qu'il s'agit bien d'une racine cubique de -8 :

$$\begin{aligned}
(1-\sqrt{3}i)^3 &= (1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) \\
&= (1-2\sqrt{3}i+3i^2)(1-\sqrt{3}i) \\
&= (1-2\sqrt{3}i-3)(1-\sqrt{3}i) \\
&= (-2-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) \\
&= -2+6i^2 \\
&= -2-6 \\
&= -8.
\end{aligned}$$

La vérification pour $1+\sqrt{3}i$ se fait de la même façon.

On aimerait bien pouvoir simplifier des expressions contenant des radicaux comme on le fait avec celles contenant des exposants entiers. Les définitions suivantes nous le permettront.

Définition 1.8 Si $\sqrt[n]{a}$ représente un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

De plus, si $a \neq 0$,

$$a^{-1/n} = \frac{1}{a^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Définition 1.9 Si $\sqrt[n]{a}$ représente un nombre réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Toutes les propriétés des exposants décrites au tableau 1.8 (p. 43) restent valides pour les exposants fractionnaires et sont résumées, sous leur formulation comme radicaux, au tableau 1.10 de la page 52.

Tableau 1.10 – Propriétés des radicaux

	Propriétés	Exemples
1.	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$	$625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5,\ (-243)^{1/5} = \sqrt[5]{-243} = -3,$ $(32x^5)^{1/5} = \sqrt[5]{32x^5} = \sqrt[5]{(2x)^5} = 2x$ $\sqrt[4]{8x^3} = (8x^3)^{1/4}$
2.	$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$	$7^{5/2} = (\sqrt{7})^5$, $3^{2/5} = (\sqrt[5]{3})^2$ $\sqrt{x^4} = (x^4)^{1/2} = x^{4/2} = x^2$
3.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$48^{1/2} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ $54^{1/3} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$
4.	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\dfrac{4}{25}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$ $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^6}} = \dfrac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{x^6}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5 \cdot x}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5}\,\sqrt[5]{x}} = \dfrac{1}{x\sqrt[5]{x}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{-40x}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{-40x}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{-8 \cdot 5 \cdot x}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{-8}\,\sqrt[3]{5x}}{3} = \dfrac{-2\sqrt[3]{5x}}{3}$

On suppose que a et b représentent des nombres réels ou des expressions algébriques, que m et n sont des entiers positifs et que tous les radiaux sont définis dans les réels.

Exemple 1.28

Simplifiez le plus possible les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2^2+4^2}}$ (b) $\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{108}$ (c) $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Solution :

(a) On évalue l'intérieur du radical en priorité puisqu'il agit comme des parenthèses.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2^2+4^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} && \text{on effectue les carrés et on les additionne}\\
&= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\cdot 5}} && \text{on factorise pour extraire le plus grand carré parfait possible}\\
&= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}\sqrt{5}} && \text{on applique le radical à chaque facteur}\\
&= \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} && \text{on simplifie le facteur commun}
\end{aligned}$$

Rappel. Un nombre est dit carré parfait lorsqu'il est le carré d'un nombre naturel.

(b) On factorise chacune des composantes des radicaux pour en extraire les plus grands carrés parfaits possibles.

$$\begin{aligned}
\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{108} &= \sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{16\cdot 3}+2\sqrt{36\cdot 3}\\
&= \sqrt{9}\sqrt{3}-3\sqrt{16}\sqrt{3}+2\sqrt{36}\sqrt{3}\\
&= 3\sqrt{3}-3\cdot 4\sqrt{3}+2\cdot 6\sqrt{3}\\
&= 3\sqrt{3}-12\sqrt{3}+12\sqrt{3}\\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(c) On factorise pour extraire les plus grands carrés parfaits possibles et on simplifie les facteurs communs aux composantes du quotient.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{75}+\sqrt{48}}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3\cdot 25}+\sqrt{16\cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{(5+4)\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 9
\end{aligned}$$

Exemple 1.29

Dans les cours de physique de l'École, on utilise souvent les identités[iii] suivantes.

(a) $\sqrt{(2a)^2+(4a)^2} = 2\sqrt{5}\,a$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+4b^2}}$

En utilisant les propriétés vues à ce chapitre, sachant que $a>0$, démontrez ces identités.

iii. Une identité est une équation qui est vraie quelle que soit la valeur de la ou des variables. On y reviendra au chapitre sur les équations.

Solution :

(a) On simplifie d'abord l'intérieur du radical pour ensuite en extraire la racine carrée.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(2a)^2+(4a)^2} &= \sqrt{4a^2+16a^2} && \text{on applique les exposants sur les produits}\\
&= \sqrt{20a^2} && \text{on regroupe les termes semblables}\\
&= \sqrt{20}\,\sqrt{a^2} && \text{on applique l'exposant sur le produit, ici l'exposant est } 1/2\\
&= \sqrt{20}\,a && a>0 \text{ donc } \sqrt{a^2}=a\\
&= \sqrt{4\cdot 5}\,a && \text{on factorise}\\
&= \sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\,a && \text{on applique l'exposant sur le produit}\\
&= 2\sqrt{5}\,a && \text{on évalue le radical}
\end{aligned}$$

(b) On simplifie l'intérieur du radical et on inverse la fraction.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}} && \text{on applique l'exposant sur le quotient}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{4}}} && \text{on met au dénominateur commun}\\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{\sqrt{4}}} && \text{on applique l'exposant sur le quotient}\\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}} && \text{on évalue le radical}\\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2+4b^2}} && \text{on inverse la fraction : } \left(\frac{A}{B}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{A}{B}}=\frac{B}{A}
\end{aligned}$$

Il est souvent plus pratique de traduire les radicaux sous forme d'exposants rationnels avant de simplifier.

Exemple 1.30

Simplifiez, lorsque possible, chacune des expressions suivantes. On supposera que les variables sont positives et qu'il n'y a aucune division par 0.

(a) $\sqrt[3]{125x^9y^6}$

(b) $\sqrt{\dfrac{x^{-1/3}y^{1/4}}{(9x^{-1/3}y^{-1/2})^3}}$

Solution :

(a) On traduit d'abord les radicaux sous forme d'exposants rationnels.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{125x^9y^6} &= (5^3x^9y^6)^{1/3} && \text{on traduit le radical en exposant}\\
&= (5^3)^{1/3}(x^9)^{1/3}(y^6)^{1/3} && \text{on applique l'exposant sur les produits}\\
&= 5x^3y^2 && \text{on multiplie les exposants}
\end{aligned}$$

(b) On traduit d'abord, on simplifie ensuite.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^{-1/3}y^{1/4}}{(9x^{-1/3}y^{-1/2})^3}} &= \left(\frac{x^{-1/3}y^{1/4}}{(3^2x^{-1/3}y^{-1/2})^3}\right)^{1/2} && \text{on traduit le radical en exposant} \\
&= \left(\frac{x^{-1/3}y^{1/4}}{(3^2)^3(x^{-1/3})^3(y^{-1/2})^3}\right)^{1/2} && \text{on applique l'exposant sur les produits} \\
&= \left(\frac{x^{-1/3}y^{1/4}}{3^6x^{-1}y^{-3/2}}\right)^{1/2} && \text{on multiplie les exposants} \\
&= \left(\frac{x^{2/3}y^{7/4}}{3^6}\right)^{1/2} && \text{on soustrait les exposants} \\
&= \frac{(x^{2/3}y^{7/4})^{1/2}}{(3^6)^{1/2}} && \text{on applique l'exposant sur le quotient} \\
&= \frac{(x^{2/3})^{1/2}(y^{7/4})^{1/2}}{(3^6)^{1/2}} && \text{on applique l'exposant sur le produit} \\
&= \frac{x^{1/3}y^{7/8}}{3^3} && \text{on multiplie les exposants} \\
&= \frac{x^{1/3}y^{7/8}}{27} = \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[8]{y^7}}{27} && \text{on traduit en radicaux}
\end{aligned}
$$

Attention ! Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^n} &= a && \text{si } n \text{ est impair} \\
\sqrt[n]{a^n} &= |a| && \text{si } n \text{ est pair}
\end{aligned}
$$

Pour que la simplification $\sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2} = x^{2/2} = x$ soit valide, x doit être positif. Par exemple, en posant $x = 5$, on trouve bien $\sqrt{5^2} = 5$ mais ce n'est pas le cas lorsque $x = -7$, $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 \neq -7$. En fait,

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarquez bien le début la définition 1.9 (p. 51) où l'on stipule que $\sqrt[n]{a}$ doit être un nombre réel pour que

$$(\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

Or, $\sqrt{x}$ est un nombre réel seulement lorsque x est positif ou nul.

Exercices

Attention ! Les exercices de cette section doivent être faits sans calculatrice.

1.42 Simplifiez, lorsque possible, chacune des expressions suivantes.

(a) $\sqrt{81}$
(b) $-\sqrt{49}$
(c) $\sqrt{-49}$
(d) $\sqrt[3]{-125}$
(e) $\sqrt{0{,}25}$
(f) $\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$
(g) $\sqrt[5]{-32}$
(h) $\frac{\sqrt[3]{128}}{-\sqrt[3]{16}}$
(i) $\sqrt{19}^2$
(j) $\sqrt{50}$
(k) $\sqrt{\frac{80}{7-3}}$
(l) $\sqrt{81\cdot 10^{-2}}$
(m) $\sqrt{\frac{9+16}{36}}$
(n) $\sqrt{3^2+9^2}$
(o) $\sqrt{1+3^2}$
(p) $\sqrt{5^2-4^2}$
(q) $2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\sqrt{3}$
(r) $\sqrt{75}-\sqrt{27}$
(s) $\dfrac{\sqrt{32}+\sqrt{18}}{14\sqrt{2}}$
(t) $6\sqrt{5}+4\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}$
(u) $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{8}}{5\sqrt{2}}$
(v) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2}+3^{-2}$
(w) $\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}$

1.43 Effectuez les multiplications suivantes et simplifiez. On suppose ici que b est un valeur positive.

(a) $(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$
(b) $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$
(c) $(a+3\sqrt{b})(a-2\sqrt{b})$

1.44 Rationalisez le dénominateur de chacune des expressions suivantes.

Attention ! Rationaliser un dénominateur signifie réécrire une expression de telle sorte qu'il n'y ait plus de radical au dénominateur.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
(c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

1.45 En utilisant les propriétés vues à ce chapitre, sachant que $a>0$, démontrez les identités utilisées en physique suivantes.

(a) $\dfrac{a}{(a^2)^{3/2}}=\dfrac{1}{a^2}$

(b) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{5}\,a}{2}$

(c) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}$

(d) $\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}}$

1.46 Traduisez chacune des expressions suivantes sous forme de radicaux.

(a) $x^{2/3}$
(b) $5x^{2/3}$
(c) $5x^{-2/3}$
(d) $-4x^{2/3}$
(e) $4xy^{-2/3}$
(f) $-2x^{2/3}y^{-5/3}$

1.47 Traduisez chacune des expressions suivantes en termes de puissances et simplifiez. On suppose que les variables sont strictement positives.

(a) $\sqrt{25x^2y}$
(b) $\dfrac{7\sqrt[3]{250x^5}}{\sqrt{5x^3}}$
(c) $\sqrt[6]{\dfrac{64x^2}{9^3}}$
(d) $\dfrac{\sqrt[5]{x^0}\sqrt{4y^{-1}}}{3\sqrt{x^3}}$

1.48 Simplifiez, lorsque possible, chacune des expressions suivantes. On suppose que les variables sont positives et qu'il n'y a aucune division par 0.

(a) $27^{2/3}$
(b) $32^{-3/5}$
(c) $-9^{3/2}$
(d) $8^{-1/3}$
(e) $(-4)^{3/2}$
(f) $4^0 - 4^{-1}$
(g) $\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}$
(h) $\sqrt[3]{2^{15}}$
(i) $\sqrt[4]{64x^{20}}$
(j) $\sqrt[5]{2x^2}\,\sqrt[5]{16x}$
(k) $\sqrt{32}\sqrt{50}$
(l) $\left(\dfrac{25}{16}\right)^{3/2}$
(m) $(-32)^{2/5}$
(n) $x^{1/3} \cdot x^{1/2}$
(o) $\dfrac{a^{-3/2}}{a^{1/4}}$
(p) $\left(\dfrac{x^{4/5}}{y^{-1/3}}\right)^{1/2}$
(q) $\dfrac{4^{1/2}x^{1/4}}{2^{1/3}x^{2/5}}$
(r) $\dfrac{1}{2}(x^2+6)^{-1/2}\cdot 2x$
(s) $(5x^{1/2})(7x^{3/4})$
(t) $\dfrac{32x^{5/3}}{16x^{3/4}}$
(u) $(125x^9y^6)^{1/3}$
(v) $\dfrac{(25x^{3/2}y^{-1})^2}{5x^0y^{-1}}$

1.49 Sans l'aide d'une calculatrice, déterminez lequel des trois symboles suivants est approprié :

$$< \quad = \quad >$$

(a) $10^{2/5}\ ?\ 7^{2/5}$
(b) $10^{-2/5}\ ?\ 7^{-2/5}$
(c) $0{,}5^{-2/5}\ ?\ 0{,}1^{-2/5}$

1.50 Simplifiez, lorsque possible, chacune des expressions suivantes. Donnez vos réponses sous forme de radicaux. On suppose que les variables sont positives et qu'il n'y a aucune division par 0.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$
(b) $\sqrt{5}(\sqrt{5})^3(\sqrt{5})^{-4/3}$
(c) $\sqrt[3]{16x^3y}$
(d) $\sqrt{\dfrac{a^3b}{4ab^2}}$
(e) $\dfrac{7x\sqrt{y^4}}{y\sqrt{7x}}$
(f) $\sqrt[3]{\dfrac{x^{-5}y^2}{-5xy}}$
(g) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
(h) $\dfrac{2(x+y)}{\sqrt{4x+4y}}$

1.51 Les expressions suivantes sont obtenues à l'aide des formules et des règles de dérivation que vous verrez dans le cours de calcul différentiel. Simplifiez chacune des expressions suivantes et donnez la réponse sous forme d'une seule fraction simplifiée.

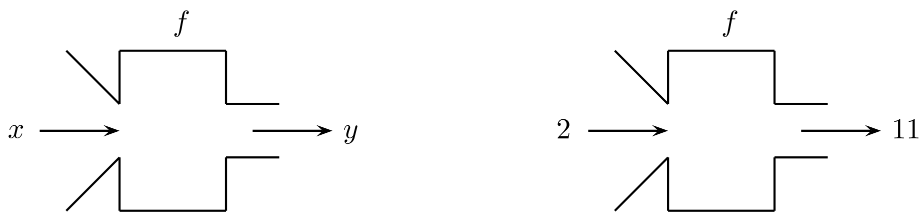
(a) $-\frac{1}{3}(6x-1)^{-4/3}\cdot 6$
(b) $\frac{1}{2}(5x^2+2x)^{-1/2}(10x+2)$
(c) ★ $\dfrac{(2x-1)^{1/2} - x\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{-1/2}\cdot 2}{2x-1}$

1.6 Les outils graphiques

On peut penser à une expression algébrique comme à une suite d'instructions, suivant l'ordre de priorité des opérations, qui nous dit comment obtenir sa valeur lorsqu'on connaît les valeurs de ses variables. Par exemple, lorsqu'on évalue l'expression à une variable $3x^2 - 1$ en $x = 2$ on obtient

$$3x^2 - 1\Big|_{x=2} = 3(2)^2 - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 12 - 1 = 11.$$

Si on désigne par $f(x)$ (on dit « f de x ») la fonction qui prend ce qu'on lui donne, x, le met au carré, multiplie ce résultat par 3 et ensuite enlève 1, on écrira $f(x) = 3x^2 - 1$ (« f de x égale $3x^2 - 1$ ») et, dans le cas particulier où on évalue la fonction en $x = 2$, $f(2) = 11$ (« f de 2 égale 11 »). Les rapports entre f, la « machine » mathématique, x, la valeur en laquelle on l'évalue, et y, le résultat de cette évaluation, sont illustrés ci-dessous.

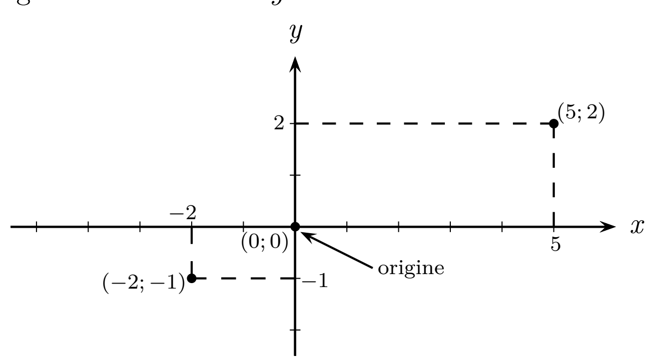


Une fonction à une seule variable se présente aussi sous la forme d'un graphe dans le plan cartésien.

Le **plan cartésien** est un **système de coordonnées rectangulaires** qui est formé par deux droites réelles perpendiculaires, une horizontale et l'autre verticale, qui se coupent à leur origine. À chaque point du plan, on associe ses **coordonnées**, c'est-à-dire une paire ordonnée $(a; b)$ déterminée en abaissant à partir du point une perpendiculaire à l'axe des x et une autre qui soit perpendiculaire à l'axe des y. La coordonnée a est dite l'**abscisse** du point et la coordonnée b est dite l'**ordonnée** du point.

Exemple 1.31

Le point de coordonnées $(5; 2)$ est d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 et est situé 5 unités à droite de l'axe des y et 2 unités en haut de l'axe des x tandis que le point $(-2; -1)$ est d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 et est situé 2 unités à gauche de l'axe des y et 1 unité en bas de l'axe des x.

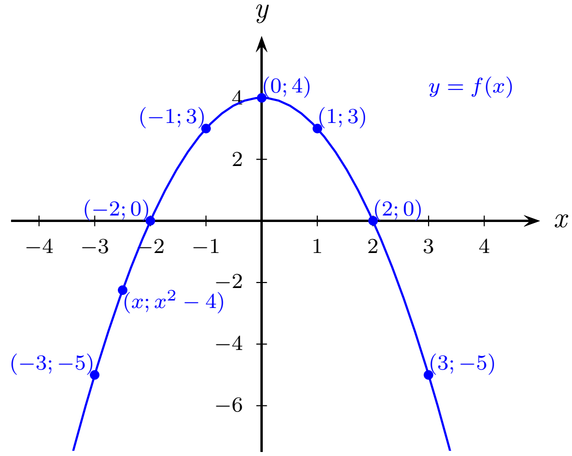


Exemple 1.32

Tracez le graphe de la fonction $f(x) = 4 - x^2$ en utilisant pour x les entiers entre -3 et 3.

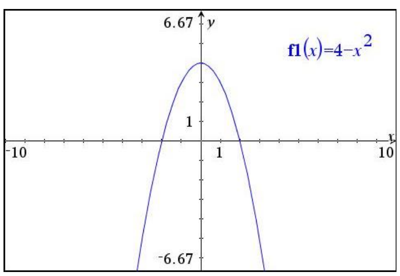
Solution :
On calcule la valeur y obtenue en évaluant $f(x)$ à chacune des valeurs entières de x entre -3 et 3. On place ensuite les couples trouvés dans le plan cartésien et on relie les points par une courbe lisse.

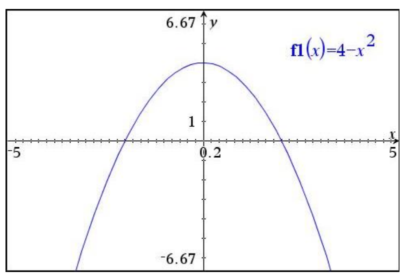
x	$y = 4 - x^2$	$(x; y)$
-3	-5	$(-3; -5)$
-2	0	$(-2; 0)$
-1	3	$(-1; 3)$
0	4	$(0; 4)$
1	3	$(1; 3)$
2	0	$(2; 0)$
3	-5	$(3; -5)$

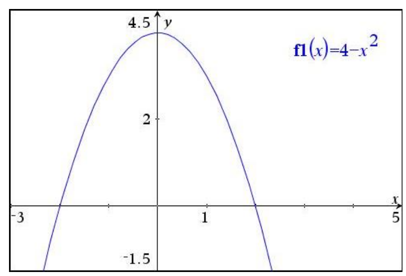


Les calculatrices ou les logiciels dits *graphiques* sont des outils puissants qui génèrent rapidement des graphiques et fonctionnent essentiellement de la même façon que ce qu'on a fait à l'exemple précédent, mais ils utilisent beaucoup plus de points !

Les graphiques suivants ont été obtenus à l'aide du logiciel TI Nspire CX CAS.







La fenêtre du graphique de gauche est celle dite *standard* sur ce logiciel ; les valeurs de l'abscisse vont de -10 à 10, $x \in [-10; 10]$, et celles de l'ordonnée de $-6{,}67$ à $6{,}67$, $y \in [-6{,}67; 6{,}67]$. Les deux axes ont des graduations aux entiers.

On peut choisir sa fenêtre graphique. Par exemple, dans l'image du centre $x \in [-5; 5]$ et les graduations sont aux multiples de 0,2 tandis que dans l'image de droite, $x \in [-3; 5]$ et $y \in [-1{,}5; 4{,}5]$ et les graduations sont aux unités en abscisse et aux multiples de 2 en ordonnée.

Comme le graphe de la fonction $f(x) = 4 - x^2$ dépassera tout support matériel sur lequel on voudra le tracer, on se satisfera d'une fenêtre graphique qui donne une bonne idée du comportement de la courbe.

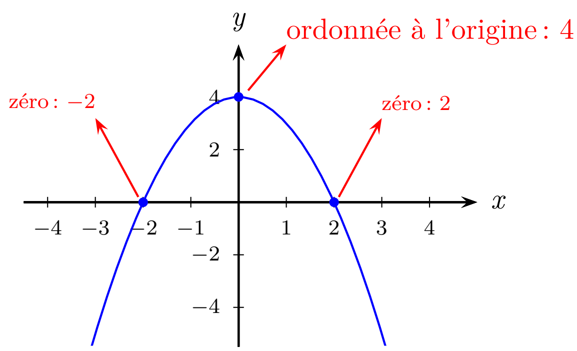
Un **zéro d'une fonction** désigne une valeur de l'abscisse x pour laquelle son ordonnée y est 0. Graphiquement, les zéros d'une fonction à une variable correspondent aux abscisses des points d'intersection de son graphe avec l'axe des x. L'**ordonnée à l'origine** du graphe d'une fonction désigne la valeur de l'ordonnée y lorsque l'abscisse x vaut 0. Graphiquement, l'ordonnée à l'origine d'une fonction à une variable correspond à l'ordonnée du point d'intersection de son graphe avec l'axe des y.

Exemple 1.33

Déterminez les zéros et l'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x) = 4 - x^2$.

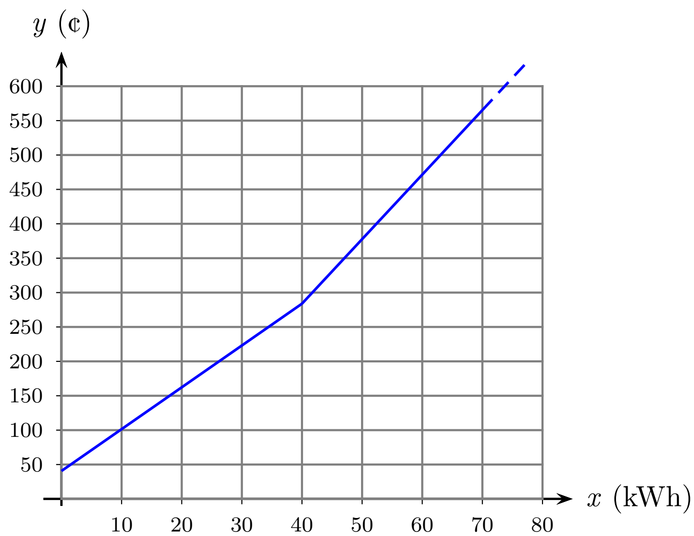
Solution :

Les zéros sont -2 et 2 tandis que l'ordonnée à l'origine est 4.



Exemple 1.34

Le coût de la consommation d'hydroélectricité est représentée au graphique suivant où x désigne la consommation d'électricité dans une journée (en kWh) et y est le coût qui lui est associé (en ¢).



Répondez aux questions suivantes à l'aide du graphique.

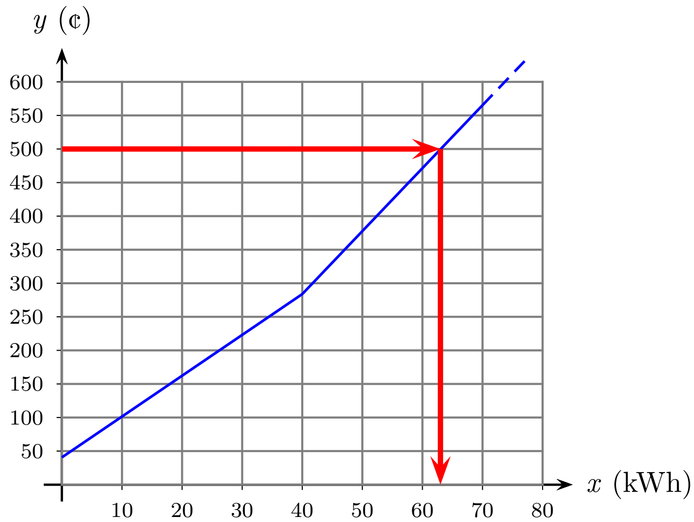
(a) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la courbe ? À quoi correspond cette valeur dans le contexte ?

(b) Si le compte d'hydro indique 5,00 \$ pour la journée, quelle a été la consommation d'hydroélectricité durant cette journée ? Sur une reproduction du graphique ci-dessus, donnez une interprétation de votre réponse.

Solution :

(a) L'ordonnée à l'origine de la courbe est environ 40. Cette valeur correspond au coût de base du service, soit 40 ¢ par jour.

(b) Si le compte d'hydro indique $5{,}00 \ \$ = 500$ ¢ pour la journée, la consommation d'hydroélectricité est environ 63 kWh cette journée. D'un point de vue graphique ceci signifie que pour une ordonnée de 500, l'abscisse du point sur la courbe est environ 63.



y (¢)
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
10
20
30
40
50
60
70
80
x (kWh)

Exercices

1.52 Situez les points $(-1;3)$, $(4;-1)$, $(\frac{9}{2};2)$ et $(-4;-3)$ dans le plan cartésien.

1.53 Tracez le graphe de la fonction $f(x) = 2x - 3$ en utilisant pour x les entiers entre -3 et 3. Déterminez son ordonnée à l'origine et ses zéros.

1.54 Faites tracer le graphe de la fonction obtenue à l'exercice 1.34 (b) dans une fenêtre où $x \in [-20;20]$ et $y \in [-25;325]$. À quoi correspondent les valeurs trouvées à l'exercice 1.34 (c) sur ce graphique ?

1.55 Un objet est lancé verticalement vers le haut. Sa hauteur h (en mètres) mesurée à partir du sol, t secondes après avoir été lancé, est modélisée à l'exercice 1.13 par

$$h = -4{,}9t^2 + 30t + 2.$$

Faites tracer le graphe de la fonction h dans une fenêtre où $t \in [0;7]$ et $h \in [0;50]$ et servez-vous de celui-ci pour répondre aux questions suivantes.

(a) Dans ce contexte, à quoi correspond l'ordonnée à l'origine de la fonction h ?

(b) Dans ce contexte, à quoi correspond le zéro de la fonction h ?

1.56 Pour traduire une température de x °C à celle correspondante en Fahrenheit y °F, on utilise la relation

$$y = \frac{9}{5}x + 32.$$

(a) Lorsqu'il fait 20 °C, que fait-il en Fahrenheit ?

Faites tracer le graphe de cette fonction dans une fenêtre où $x \in [-30;30]$ et $y \in [-15;100]$. À quoi la valeur calculée correspond-elle sur le graphique ? Illustrez.

(b) Déterminez la valeur de l'ordonnée à l'origine. Dans ce contexte, à quoi correspond-elle ?

(c) On dit que l'idéal est de fixer la température de son congélateur à 0 °F. À quoi cette valeur correspond-elle en °C ? À quoi correspond-elle sur le graphique ? Illustrez.

Musculation algébrique

Les exercices qui suivent viennent bonifier ceux du texte. Ce sont des exercices de nature algébrique de type drill (méthode d'entraînement basée sur la réalisation répétitive d'un même type d'exercices) sur le thème de la simplification.

> **Attention !** Dans les exercices qui suivent, on suppose que les variables sont positives et qu'il n'y a aucune division par 0.

1.57 Simplifiez les fractions suivantes. Donnez vos réponses sous forme de fractions irréductibles.

(a) $\dfrac{4a-5}{4} \div \dfrac{5a}{4}$

(b) $\dfrac{a}{8} + \dfrac{2b}{9}$

(c) $\dfrac{5}{6a} - \dfrac{3}{10b} + \dfrac{1}{30ab}$

(d) $\dfrac{3x+y}{x} - \dfrac{y}{2x}$

(e) $\dfrac{x(3x-2)}{6x-4}$

(f) $\dfrac{3x}{3(a+4)} - \dfrac{x-2}{a+4}$

(g) $-\dfrac{x+4}{3-y} + \dfrac{x+4}{9-3y}$

(h) $\dfrac{2(7t-6)}{8} \times \dfrac{2}{-7} \div \dfrac{7t-6}{2}$

(i) $\dfrac{xy(2-x)}{-y(x-2)}$

(j) $\dfrac{7x+1}{3} - \dfrac{5-x}{27} - \dfrac{x}{3}$

(k) $\dfrac{x+4}{3x+12}$

(l) $\dfrac{x-4}{5x+20} - \dfrac{x}{x+4}$

(m) $\dfrac{-5a}{3b} \div (2a)$

(n) $\dfrac{11x}{10y} \div \dfrac{22x}{5y} \div \dfrac{xy}{4}$

(o) $\dfrac{x+4}{x-4} \div \dfrac{2(x+4)}{x-4}$

(p) $\dfrac{8x}{6} \cdot \dfrac{x-3}{2x-6} \cdot \dfrac{3}{2x}$

(q) $-\dfrac{9}{x-7} - \dfrac{3}{x-7}$

(r) $32x \cdot \dfrac{y}{-4z}$

(s) $\dfrac{-2xz}{3yz} + \dfrac{5z}{3yz}$

(t) $\dfrac{30x+24}{6} - \dfrac{8}{3}$

1.58 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\left(a^{-10}b^5\right)^5 \cdot \left(a^{20}b^{-9}\right)^3$

(b) $\dfrac{x^2}{x^3} \cdot (8x)^{-2}$

(c) $\dfrac{\left(7x^7\right)^0}{9x^{-7}}$

(d) $\dfrac{64(xyz)^3}{8xz}$

(e) $\left(a^4b^2\right)^{-2}$

(f) $3 \cdot \left(\dfrac{4}{7}\right)^{-3} \left(\dfrac{4}{7}\right)^5$

(g) $\dfrac{x^3}{x^{-6}} \left(\dfrac{x}{(x^2)^3}\right)$

(h) $\dfrac{9a^{-2}(a+b)^{-2}}{(a+b)^{-5}}$

(i) $(ab)(ab)^3$

(j) $(a^2b^4)^4(a^2b^4)^{-1}$

(k) $\dfrac{(7x^3y)^2}{x^3y^3}$

(l) $\dfrac{8}{14}a^3b^{-2}\dfrac{21}{24}a^2b^4$

(m) $\dfrac{x^4x^{-7}}{x^{-2}x^{-9}}$

(n) $5^2\left(\dfrac{5a^{-3}b^{-5}}{2a^2}\right)^{-2}$

(o) $\dfrac{16a^4b^2}{4ab^3}$

(p) $\dfrac{b^{-1}a^3}{(a^4b^{-6})^{-6}}$

(q) $(5x^2y^3)\dfrac{x}{(y^{-3})^2}$

(r) $\dfrac{2x^3y^{-2}}{2^{-2}x^4y^3} \cdot \dfrac{4}{8}(xy)^2$

(s) $\left(\dfrac{7}{4}\right)^{-2}\left(\dfrac{x^2}{7(x^{-1})^{-3}}\right)^{-1}$

(t) $\left(3^2 \cdot \dfrac{2^3}{3} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 x^{-3}\right)^2$

1.59 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\left(\dfrac{2}{3}x^6 \div \left(\dfrac{3}{4}x^4\right)\right)^{-1/2}$

(b) $\dfrac{3}{4}a^{-1/5}\dfrac{1}{5}a^{3/5}$

(c) $-ab \cdot (-ab^2)^{1/3}$

(d) $\left(\dfrac{x^7y^{-3}z^{-5}}{x^5z^4}\right)^{2/3}$

(e) $\dfrac{x^{6/4}x^{4/6}}{x^{1/6}} \div \dfrac{6^2}{(2\times 3)^2}$

(f) $(x-y)^{5/3}(x-y)^{-3/2}$

(g) $-x^3 \div (y^4x^0)^{-1/2}$

(h) $(x-y)^{-2}(x+y)^{5/2}(x-y)^{-5/2}$

(i) $\dfrac{1}{5(25x^3y^5)^{-1/2}}$

(j) $\dfrac{54(a+2b)^{-2/3}}{9(a+2b)^{3/4}}$

(k) $\left(\dfrac{x^2y^{-1}}{x^{-4}y^3}\right)^{-2/3}$

(l) $(a^{-2}b^3)^{1/2}(a^{-1}b^{2/3}c)$

(m) $\left(\dfrac{64}{125}\,\dfrac{x^{-3}}{x^3}\right)^{1/3}$

(n) $\left(3^4(ab)^{-4/5}\right)(3^{-3}ab)$

(o) $\left(a^{-2/5}y^{1/2}\right)^{1/4}$

(p) $\dfrac{a^{-3}b^{3/4}}{(ab)^3}$

(q) $(3abc)(9a^0b^{-2}c)^{1/2}$

(r) $\left(x^{1/3}y^{-1/3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{x^5y^4}$

(s) $(a^{-2}b^5)^{1/5}(a^{2/5}b^{-1})$

(t) $\left(\dfrac{(-2)^3y^{-3}x^{-2/7}}{-8x^{-2}y^{-7}}\right)^{7/2}$

Chapitre 2

Les polynômes et les fractions rationnelles

2.1 Les polynômes

Définition 2.1 Un **monôme** est une expression algébrique à un seul terme formée du produit d'une constante avec une ou plusieurs variables où chacune des variables est affectée d'un exposant naturel ($\mathbb{N}$). Le **degré d'un monôme** est la somme des exposants de ses variables.
Cas particuliers :

- Si le monôme est une constante non nulle, son degré est 0.
- Si le monôme est la constante 0, son degré est indéfini. En effet, puisque

$$0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 = \ldots$$

on ne peut pas définir son degré.

Exemple 2.1

Parmi les expressions suivantes, identifiez celles qui sont des monômes. Lorsqu'il s'agit d'un monôme, déterminez ses variables, son coefficient et son degré.

(a) $5x^3y^2z$ (b) $-\sqrt{3}\,x^2$ (c) -15 (d) $5x^3y^{1/2}z^{-2}$ (e) $12 - 5x^2y$

Solution :

(a) $5x^3y^2z$ est un monôme à 3 variables, x, y et z. Son coefficient est 5 et son degré est 6.

(b) $-\sqrt{3}\,x^2$ est un monôme à une seule variable, x, dont le coefficient est $-\sqrt{3}$ et le degré est 2.

(c) -15 est un monôme constant, son degré est 0.

(d) $5x^3y^{1/2}z^{-2}$ n'est pas un monôme car les exposants de ses variables ne sont pas tous des entiers positifs, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ et $-2 \notin \mathbb{N}$.

(e) $12 - 5x^2y$ n'est pas un monôme car il est formé de deux termes : un monôme constant et un monôme de degré 3.

Définition 2.2 Un **polynôme** est une expression algébrique formée d'une somme finie de monômes. En particulier, un **binôme** est un polynôme composé de deux termes et un **trinôme** est un polynôme composé de trois termes.

Le polynôme $x + 2xy - 3x^2y - y^2 + 12$ est à deux variables, x et y, et il s'écrit comme la somme

$$x + 2xy + (-3x^2y) + (-y^2) + 12.$$

Il contient 5 termes, 1 est le coefficient du terme en x, 2 est le coefficient du terme en xy, -3 est le coefficient du terme en x^2y, -1 est le coefficient du terme en y^2 et 12 est son terme constant.

Définition 2.3 Le **degré d'un polynôme** est le plus grand des degrés de ses termes.

Exemple 2.2

Parmi les expressions suivantes, identifiez celles qui sont des polynômes. Lorsqu'il s'agit d'un polynôme, déterminez son degré.

(a) $7x^3 - 2x^5 + 1$
(b) $5x^{3/2} + 3x^{1/2} - 4$
(c) $\sqrt{7}x - 2$
(d) $12 - 3x^2y$
(e) $\dfrac{3}{x^2} + 5$
(f) $x - \frac{3}{2}x^3y^4 + 12$

Solution :

(a) $7x^3 - 2x^5 + 1$ est un polynôme (trinôme) de degré 5.

(b) $5x^{3/2} + 3x^{1/2} - 4$ n'est pas un polynôme car certains des exposants de ses variables ne sont pas des nombres naturels, $3/2 \notin \mathbb{N}$ et $1/2 \notin \mathbb{N}$.

(c) $\sqrt{7}x - 2$ est un polynôme (binôme) de degré 1.

Attention ! L'expression $\sqrt{7}x - 2$ n'est pas équivalente à $\sqrt{7x} - 2$ car

$$\sqrt{7}x = (7)^{1/2}x \text{ tandis que } \sqrt{7x} = (7x)^{1/2} = 7^{1/2}x^{1/2} = \sqrt{7}x^{1/2}.$$

Ainsi $\sqrt{7}x - 2$ est un polynôme mais $\sqrt{7x} - 2$ ne l'est pas.

(d) $12 - 3x^2y$ est un polynôme (binôme) de degré 3.

(e) $\dfrac{3}{x^2} + 5 = 3x^{-2} + 5$ n'est pas un polynôme car l'exposant de x est négatif, $-2 \notin \mathbb{N}$.

(f) $x - \frac{3}{2}x^3y^4 + 12$ est un polynôme de degré 7.

Exemple 2.3

La mesure de la surface (l'aire) A et le volume V d'une sphère de rayon r sont donnés par les monômes à une variable r suivants.

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

(a) Quel est le degré du monôme en r qui calcule l'aire de la sphère ? Celui du volume de la sphère ?

(b) Déterminez la mesure de la surface d'une sphère de rayon 5 cm.

(c) Le Kin-Ball est un sport collectif créé au Québec, développé par la compagnie Omnikin à la fin des années 1980. Le jeu se pratique avec un grand ballon sphérique de 1,02 m de diamètre. Quel est son volume ?

Solution :

(a) $A = 4\pi r^2$ est de degré 2, tandis que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ est de degré 3.

(b) L'aire d'une sphère de 5 cm de rayon est

$$4\pi r^2\Big|_{r=5\ \mathrm{cm}} = 4\pi\cdot(5\ \mathrm{cm})^2 = 4\pi\cdot 5^2\ \mathrm{cm}^2 = 100\pi\ \mathrm{cm}^2 \approx 314{,}2\ \mathrm{cm}^2.$$

(c) Le rayon du ballon est $\frac{1{,}02}{2} = 0{,}51$ m. Son volume est alors

$$\frac{4}{3}\pi r^3\Big|_{r=0{,}51\ \mathrm{m}} = \frac{4}{3}\pi\cdot(0{,}51\ \mathrm{m})^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 0{,}51^3\ \mathrm{m}^3 \approx 0{,}56\ \mathrm{m}^3.$$

Exercices

2.1 L'aire totale de la surface A et le volume V d'un cube dont l'arête mesure c unités de longueur sont donnés par les formules

$$A = 6c^2 \quad \text{et} \quad V = c^3.$$

(a) Quel est le degré du monôme en c qui calcule l'aire du cube ? celui du volume du cube ?
(b) Déterminez l'aire totale et le volume intérieur d'un cube dont l'arête mesure 10 cm.
(c) En général, si on double la valeur c, est-ce que la surface du cube double elle aussi ? Qu'en est-il pour le volume ?

2.2 L'aire de la surface latérale A et le volume intérieur V d'un cylindre droit de rayon r unités et de hauteur h unités sont donnés par les formules

$$A = 2\pi rh \quad \text{et} \quad V = \pi r^2 h.$$

(a) Quel est le degré du monôme en les variables r et h qui calcule l'aire de la surface latérale du cylindre ? celui du volume du cylindre ?
(b) Déterminez l'aire de la surface latérale et le volume intérieur d'un cylindre droit de rayon 4 cm et de hauteur 9 cm.
(c) Trouvez les dimensions de 3 contenants cylindriques différents ayant 49π cm^3 de volume. Dans chacun de ces cas, calculez l'aire de leur surface latérale.
(d) Trouvez les dimensions d'un contenant cylindrique ayant 100 m^3 de volume. Calculez ensuite l'aire de sa surface latérale.

2.3 On considère le tube cylindrique[i] dont les dimensions sont indiquées sur la figure 2.1 ci-dessous. Précisons que r correspond à son rayon moyen.

(a) Si la paroi latérale a Δx cm d'épaisseur, déterminez un polynôme à trois variables (r, h et Δx) donnant le volume de matériau nécessaire à la construction de la paroi latérale du tube.
(b) Quel sera le volume de matériau nécessaire à la construction du tube si son rayon moyen est 4 cm, sa hauteur 9 cm et son épaisseur 1 mm ?

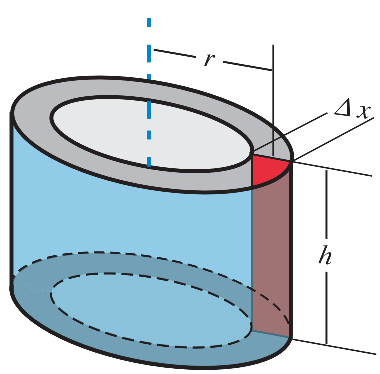


FIGURE 2.1 – Tube d'axe vertical et ses dimensions.

i. Image tirée des notes de cours de MAT-145, partie 2

2.4 Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des polynômes ? Si une expression est polynomiale, déterminez son degré.

(a) $5x^3 - 2x^6 + 5x - 1$

(b) $2x^{3/2} - 5x$

(c) $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{5}{3}$

(d) $\dfrac{3x^2 + x + 1}{2}$

(e) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

(f) 7

(g) $2x^3 - \sqrt{5}\,x$

(h) $5xy - 1 + 2x^3y^2 - 4x$

(i) $\dfrac{\sqrt{2}x^2y - xy^3 + x^2}{3}$

2.5 Soit le polynôme à une variable $P(x) = 1 - 2x + x^5 + 2x^3$.

> **Rappel.** La notation $P(x)$ se lit P de x. Par exemple, $P(-1)$ signifie qu'on évalue le polynôme en $x = -1$,
> $$P(-1) = 1 - 2x + x^5 + 2x^3 \,|_{x=-1} .$$

(a) Combien de termes comporte-t-il ?
(b) Quel est son degré ?
(c) Quel est son terme constant ? À quoi correspond cette valeur sur le graphe de la fonction $P(x)$?
(d) Quel est le coefficient de x ?
(e) Quel est le coefficient du terme de degré 3 ?
(f) Quel est le coefficient du terme de degré 4 ?
(g) Évaluez ce polynôme en $x = -1$.
(h) Évaluez $P(-2)$. À quoi correspond cette valeur sur le graphe de la fonction $P(x)$?
(i) Évaluez $P(t)$.

2.6 Soit le polynôme à trois variables $P(x; y; z) = 3xy^2z - 2x^2z + 5y^2 + x - 2$.

> **Attention !** La notation $P(x; y; z)$ se lit P de x, y et z. Par exemple, $P(-1; 2; 3)$ signifie qu'on évalue le polynôme en $x = -1$, $y = 2$ et $z = 3$,
> $$P(-1; 2; 3) = 3xy^2z - 2x^2z + 5y^2 + x - 2 \,|_{x=-1, y=2, z=3} .$$

(a) Combien de termes comporte-t-il ?
(b) Quel est son degré ?
(c) Quel est son terme constant ?
(d) Évaluez $P(-1; 2; 3)$
(e) Évaluez $P(1; 2a; -1)$
(f) Évaluez $P(x; 2x; -x)$

2.2 Les opérations sur les polynômes

Les opérations qu'on effectue avec des nombres réels se font aussi avec les polynômes. Qu'on les additionne, les soustraie ou les multiplie, on obtient à nouveaux des polynômes.

2.2.1 L'addition et la soustraction

Rappelons que deux **termes** sont dits **semblables** lorsqu'ils ne diffèrent que par leurs coefficients. Par exemple, dans le polynôme $3xy^2-4x^2y-4x^2-5xy^2-1$, les termes $3xy^2$ et $-5xy^2$ sont semblables tandis que les termes $-4x^2y$ et $-4x^2$ ne le sont pas.

Pour **additionner** ou **soustraire** des polynômes, on regroupe leurs termes semblables. Par exemple, on peut regrouper les monômes $-5x^3$ et $7x^3$ en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition du tableau 1.4 (p. 16) mais cette fois, de droite à gauche.

$$-5x^3+7x^3=(-5+7)x^3=2x^3$$

De même, pour les monômes $3xy^2$ et $-5xy^2$, on regroupe comme suit.

$$3xy^2-5xy^2=(3-5)xy^2=-2xy^2.$$

Exemple 2.4

Effectuez les opérations suivantes.

(a) $(4x^3+5x^2-x+2)+(12x^3-3x^2+5x-1)$
(b) $(4x^3+5x^2-x+2)-(12x^3-3x^2+5x-1)$
(c) $(3xy^2-4xy-4x^2-5)+(xy^2+xy-1)$
(d) $(3xy^2-4xy-4x^2-5)-(xy^2+xy-1)$

Solution :

(a) On retire les parenthèses superflues et on regroupe les termes semblables

$$\begin{aligned}&(4x^3+5x^2-x+2)+(12x^3-3x^2+5x-1)\\ &= 4x^3+5x^2-x+2+12x^3-3x^2+5x-1\\ &= (4+12)x^3+(5-3)x^2+(-1+5)x+(2-1)\\ &= 16x^3+2x^2+4x+1\end{aligned}$$

(b) On distribue -1 sur la deuxième parenthèse et on regroupe les termes semblables.

$$\begin{aligned}&(4x^3+5x^2-x+2)-(12x^3-3x^2+5x-1)\\ &= (4x^3+5x^2-x+2)-1\cdot(12x^3-3x^2+5x-1)\\ &= 4x^3+5x^2-x+2-12x^3+3x^2-5x+1\\ &= (4-12)x^3+(5+3)x^2+(-1-5)x+(2+1)\\ &= -8x^3+8x^2-6x+3\end{aligned}$$

(c) On retire les parenthèses superflues et on regroupe les termes semblables

$$\begin{aligned}&(3xy^2-4xy-4x^2-5)+(xy^2+xy-1)\\ &= (3+1)xy^2+(-4+1)xy-4x^2+(-5-1)\\ &= 4xy^2-3xy-4x^2-6\end{aligned}$$

(d) On distribue -1 sur la deuxième parenthèse et on regroupe les termes semblables.

$$\begin{aligned}&(3xy^2-4xy-4x^2-5)-(xy^2+xy-1)\\ &= (3-1)xy^2+(-4-1)xy-4x^2+(-5+1)\\ &= 2xy^2-5xy-4x^2-4\end{aligned}$$

Une méthode plus conviviale pour effectuer ces opérations consiste à utiliser une écriture verticale, où les termes semblables sont alignés par colonne. Ainsi la somme et la différence de $4x^3+5x^2-x+2$ et $12x^3-3x^2+5x-1$ s'écrivent

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & (4x^3 & + & 5x^2 & - & x & + & 2)\\ + & (12x^3 & - & 3x^2 & + & 5x & - & 1)\\ \hline & 16x^3 & + & 2x^2 & + & 4x & + & 1\end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrrr} & (4x^3 & + & 5x^2 & - & x & + & 2)\\ - & (12x^3 & - & 3x^2 & + & 5x & - & 1)\\ \hline & -8x^3 & + & 8x^2 & - & 6x & + & 3\end{array}$$

et celles de $3xy^2-4xy-4x^2-5$ et xy^2+xy-1 s'écrivent

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & (3xy^2 & - & 4xy & - & 4x^2 & - & 5)\\ + & (xy^2 & + & xy & & & - & 1)\\ \hline & 4xy^2 & - & 3xy & - & 4x^2 & - & 6)\end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrrr} & (3xy^2 & - & 4xy & - & 4x^2 & - & 5)\\ - & (xy^2 & + & xy & & & - & 1)\\ \hline & 2xy^2 & - & 5xy & - & 4x^2 & - & 4\end{array}$$

2.2.2 La multiplication

Pour **multiplier deux monômes**, on utilise la commutativité et l'associativité de la multiplication et les propriétés des exposants. Par exemple,

$$(-6x^3y)(5x^2y^3)=(-6\cdot 5)(x^3x^2)(yy^3)=(-30)x^{3+2}y^{1+3}=-30x^5y^4.$$

Pour **multiplier un monôme par un polynôme**, on doit aussi utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition. Par exemple,

$$\begin{aligned}3x^2y(x+2xy-1) &= 3x^2y(x)+3x^2y(2xy)+3x^2y(-1) && \text{on distribue } 3x^2y \text{ sur } x+2xy-1\\ &= 3x^3y+6x^3y^2-3x^2y. && \text{on simplifie}\end{aligned}$$

Pour multiplier deux polynômes, c'est simplement un peu plus long.

Exemple 2.5

Effectuez les opérations suivantes et simplifiez.

(a) $(4x^3+3xy^2+2)\cdot(3x^2y-5y^2)$ (b) $(x^2-4x+5)\cdot(2x+3)$

Solution :

(a) La multiplication étant commutative, on peut distribuer la somme de gauche sur celle de droite ou celle de droite sur celle de gauche. Dans ce cas, on distribue $3x^2y-5y^2$ sur $4x^3+3xy^2+2$ et on simplifie.

$$\begin{aligned}&(4x^3+3xy^2+2)\cdot(3x^2y-5y^2)\\ &= (4x^3)(3x^2y-5y^2)+(3xy^2)\cdot(3x^2y-5y^2)+2\cdot(3x^2y-5y^2)\\ &= 4x^3(3x^2y)+4x^3(-5y^2)+3xy^2(3x^2y)+3xy^2(-5y^2)+2(3x^2y)+2(-5y^2)\\ &= 12x^5y-20x^3y^2+9x^3y^3-15xy^4+6x^2y-10y^2\end{aligned}$$

(b) Ici, on distribue x^2-4x+5 sur $2x+3$, on simplifie chacun des monômes et on regroupe les termes semblables.

$$\begin{aligned}(x^2-4x+5)(2x+3) &= (x^2-4x+5)(2x)+(x^2-4x+5)(3)\\ &= x^2(2x)-4x(2x)+5(2x)+x^2(3)-4x(3)+5(3)\\ &= 2x^3-8x^2+10x+3x^2-12x+15\\ &= 2x^3-5x^2-2x+15\end{aligned}$$

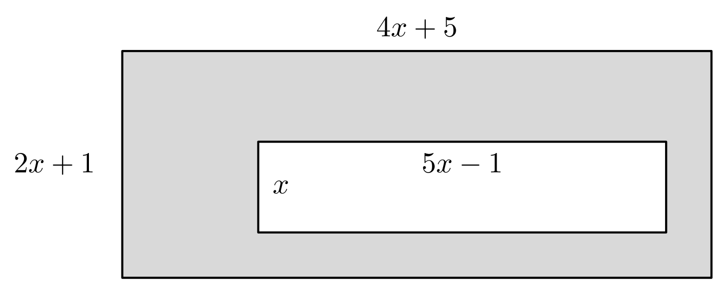
Pour effectuer la multiplication de polynômes, on peut aussi profiter de l'écriture verticale.

$$\begin{array}{cccccccccl} & x^2 & - & 4x & + & 5 & & & & \\ \times & & & 2x & + & 3 & & & & \\ \hline & 2x^3 & - & 8x^2 & + & 10x & & & & = 2x\cdot(x^2-4x+5)\\ + & & & 3x^2 & - & 12x & + & 15 & & = 3\cdot(x^2-4x+5)\\ \hline & 2x^3 & - & 5x^2 & - & 2x & + & 15 & & \text{on regroupe les termes semblables}\end{array}$$

Il est d'usage de présenter les termes d'un polynôme à une variable en ordre décroissant de leurs degrés. On dira qu'un **polynôme** est **simplifié** s'il a été développé et que ses termes semblables, une fois regroupés, sont présentés en ordre décroissant de leur degré.

Exemple 2.6

Si x est une longueur en cm, exprimez l'aire de la partie ombragée de la figure suivante comme un polynôme simplifié.



Solution :

L'aire de la partie ombragée peut être obtenue en calculant l'aire du grand rectangle moins l'aire du petit. On développe ensuite.

$$\begin{aligned}&(4x+5)\cdot(2x+1)-x\cdot(5x-1)\\ &\quad= (8x^2+10x+4x+5)-(5x^2-x) && \text{on effectue les produits}\\ &\quad= (8x^2+14x+5)-(5x^2-x) && \text{on regroupe les termes semblables}\\ &\quad= 8x^2+14x+5-5x^2+x && \text{on élimine les parenthèses}\\ &\quad= 3x^2+15x+5 && \text{on regroupe les termes semblables}\end{aligned}$$

Exercices

2.7 Effectuez les opérations suivantes et simplifiez.

(a) $(3x^2 - 4x + 2) + (5x^2 - 3x + 3)$
(b) $(5x^4 + 4x^2 - 2x + 3) - (2x^3 - 5x^2 + x - 1)$
(c) $(3xy - 2x + 4y^2 + 12) - (5x^2y - 2xy + y - 3y^2)$
(d) $[3x(y - 1) + 2y(x + 1)] + x(x + 1) - x$

2.8 Des balles identiques sont lancées dans les airs sur Terre et sur la Lune à une vitesse de 20 m/s à partir d'une hauteur de 2 m du sol. On peut obtenir une bonne approximation de la hauteur des balles t secondes après qu'elles ont été lancées à l'aide des expressions polynomiales suivantes.

$$h_{Terre} = -4{,}9t^2 + 20t + 2 \text{ et } h_{Lune} = -0{,}8t^2 + 20t + 2$$

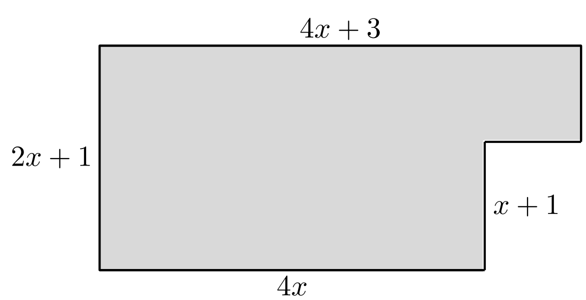
(a) À quelle hauteur se trouve la balle lancée de la Lune 3 secondes après le lancé ?
(b) À quelle hauteur se trouve la balle lancée de la Terre 3 secondes après le lancé ?
(c) Exprimez, à l'aide d'un polynôme, la différence en hauteur des balles lancées de la Lune et de la Terre, t secondes après qu'elles ont été lancées.
(d) Vérifiez que votre réponse en (c) généralise bien la différence entre les réponses obtenues en (a) et en (b).

2.9 Développez les expressions suivantes et simplifiez.

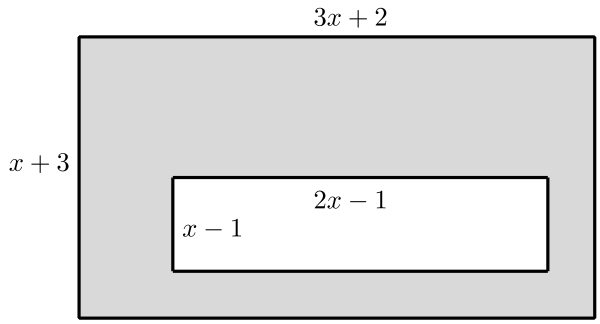
(a) $(3x^2)(-5x^4)$
(b) $-(2t^2xy)(-txy^2)$
(c) $(-2x^3y^2z)(-y^2z^3)$
(d) $(5x)(3x^2 - 2x + 1)$
(e) $3x^2(2xy - 3t^2)$
(f) $(x + 2y)(3x - y)$
(g) $x(4 - x)(5 - 2x)$
(h) $(3x + 2)(x^2 - 3x + 2)$

2.10 Sans l'aide d'une calculatrice, exprimez l'aire de la partie ombragée de la figure suivante comme un polynôme simplifié.

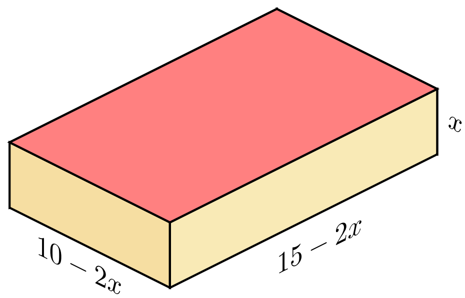
> **Rappel.** Un polynôme est dit simplifié s'il a été développé et que ses termes semblables, une fois regroupés, sont présentés en ordre décroissant de leur degré.



2.11 Exprimez l'aire de la partie ombragée de la figure suivante comme un polynôme simplifié.



2.12 (a) Exprimez le volume de la boîte suivante comme un polynôme simplifié.



(b) En effectuant les évaluations à l'aide de votre calculatrice, déterminez parmi les boîtes où $x = 1$ cm, $x = 2{,}5$ cm et $x = 5$ cm, laquelle aura le plus grand volume.

(c) Faites tracer le graphe de la fonction volume dans une fenêtre où $x \in [-0{,}5\,; 5{,}5]$ et $y \in [-10; 150]$. À quoi correspondent les valeurs que vous avez calculées en (b) sur ce graphique ?

2.3 La factorisation

On sait multiplier les polynômes $2x+3$ et $x-4$ (*faites-le*) pour montrer que

$$(2x+3)(x-4) = 2x^2 - 5x - 12.$$

Lorsqu'on renverse le processus et qu'on exprime le polynôme $2x^2-5x-12$ comme un produit

$$2x^2 - 5x - 12 = (2x+3)(x-4),$$

on dit qu'on le **factorise** et que les composantes du produit, $2x+3$ et $x-4$, sont des **facteurs** du polynôme $2x^2-5x-12$. La **factorisation** est donc un processus qui permet de transformer une somme en un produit. La forme factorisée est très utile pour simplifier des expressions et résoudre des équations.

> **Théorème 2.1 Théorème fondamental de l'algèbre** version MAT144
> Tout polynôme non constant à coefficients réels s'écrit comme un produit de facteurs linéaires (polynômes de degré 1) ou quadratiques (polynômes de degré 2) à coefficients réels.

Dans cette section, on s'intéressera, entre autres, à la factorisation dans l'ensemble des entiers, c'est-à-dire celle où tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$. L'intérêt de la factorisation dans $\mathbb{Z}$ est qu'elle est unique à l'ordre des facteurs près. Par exemple,

$$2x^2 - 5x - 12 = (2x+3)(x-4) \text{ est factorisé dans } \mathbb{Z}$$

et ne peut s'écrire que comme $(2x+3)(x-4)$ ou comme $(x-4)(2x+3)$ tandis que

$$2x^2 - 5x - 12 = 2\,(x+3/2)\,(x-4) \text{ est factorisé dans } \mathbb{Q}$$

et pourrait aussi s'écrire d'une infinité de façons différentes avec des coefficients dans $\mathbb{Q}$,

$$(2x+3)(x-4) = 4(2x+3)(x/4-1) = 3(2x/3+1)(x-4) = 12(2x/3+1)(x/4-1) = \cdots$$

Les polynômes qui ne peuvent pas être factorisés dans un ensemble sont dit **irréductibles** dans cet ensemble. Par exemple, l'expression x^2-5 est irréductible dans $\mathbb{Z}$ (il est impossible de la factoriser à l'aide uniquement de coefficients entiers), mais il est réductible dans $\mathbb{R}$ car $x^2-5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$ et tous les coefficients de sa factorisation, 1, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$, sont des nombres réels.

Pour factoriser à la main un polynôme dans un ensemble, on utilise une ou plusieurs techniques de factorisation jusqu'à ce que tous les facteurs soient irréductibles dans cet ensemble.

Les systèmes de calcul symbolique tels que *Maple*, *Nspire CAS* ou *Mathematica* factorisent les polynômes sans difficulté. Les différentes commandes pour factoriser un polynôme à l'aide de la TI Nspire CAS sont les suivantes.

`factor(expression)` dans les entiers
`factor(expression,`x`)` dans les réels
`cfactor(expression,`x`)` dans les complexes

$\text{factor}(x^2-9\cdot x+14)$	$(x-7)\cdot(x-2)$
$\text{factor}(x^2-5\cdot x+1)$	$x^2-5\cdot x+1$
$\text{factor}(x^2-5\cdot x+1,x)$	$\dfrac{(2\cdot x+\sqrt{21}-5)\cdot(2\cdot x-\sqrt{21}-5)}{4}$
$\text{cFactor}(x^2+1)$	$(x-\boldsymbol{i})\cdot(x+\boldsymbol{i})$

Remarques au sujet du théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème fondamental de l'algèbre admet plusieurs énoncés équivalents. En voici une forme qui établit le lien entre les racines et les facteurs d'un polynôme.

On dit qu'un nombre réel (ou complexe) r est une **racine** d'un polynôme P si r est une solution de l'équation polynomiale $P(r) = 0$, c'est-à-dire que si on substitue la valeur r à la variable x, on obtient 0. Si r est une racine du polynôme P, alors $(x - r)$ est un facteur de ce polynôme et, réciproquement, si $(x - r)$ est un facteur du polynôme P, alors, r en est une racine.

Théorème 2.2 Soit P un polynôme non nul de degré n défini par

$$P = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, \text{ où } a_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i = 0,1,\ldots,n$$

r est une racine de P si et seulement si $(x - r)$ est un facteur de P, c'est-à-dire que P s'écrit comme le produit $P = (x - r)Q$, où Q est un polynôme en x de degré $n - 1$.

Par exemple, puisque $x = 1$ est une racine de $x^2 - 2x + 1$,

$$(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$$

le polynôme s'écrit comme le produit

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)Q(x), \text{ où } Q(x) \text{ est de degré 1.}$$

En fait,

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1).$$

Ce polynôme possède deux facteurs identiques, associés à deux racines identiques (on dit alors qu'il s'agit d'une racine double).

Le polynôme $x^2 + 1$, quant à lui, ne possède pas de racine réelle. Il ne se factorise donc pas dans $\mathbb{R}$. Cependant, sur l'ensemble des complexes, il peut s'écrire comme un produit de facteurs linéaires.

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i), \text{ où } i \text{ est le nombre complexe tel que } i^2 = -1$$

De façon générale, tout polynôme $P = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ non nul, de degré n et à coefficients réels, possède exactement n racines complexes. Ces racines sont des nombres complexes et ne sont pas nécessairement distinctes les unes des autres. Un polynôme à coefficients réels peut donc avoir des racines qui ne sont pas réelles et se factoriser comme $a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n)$, où les r_i sont les n racines du polynôme, dont certaines peuvent être identiques.

Par exemple, $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$ sont les deux racines du polynôme $3x^2 + 3x - 6$ de degré 2, car

$$3x^2 + 3x - 6\Big|_{x=1} = 3(1)^2 + 3(1) - 6 = 3 + 3 - 6 = 0$$

$$3x^2 + 3x - 6\Big|_{x=-2} = 3(-2)^2 + 3(-2) - 6 = 12 - 6 - 6 = 0$$

et le polynôme se factorise de la façon suivante

$$3x^2 + 3x - 6 = 3(x - 1)(x - (-2)) = 3(x - 1)(x + 2) \quad (\textit{Vérifiez-le.})$$

2.3.1 La mise en évidence des facteurs communs

Dans tous les problèmes de factorisation, la première étape consiste à chercher le plus grand facteur commun à tous les termes du polynôme. On utilise ensuite la distributivité de la multiplication sur l'addition pour transformer une somme en un produit.

Rappel. La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition est

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ou, en lisant de droite à gauche,

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c),$$

ce qu'on appelle la **mise en évidence** du facteur a.

Exemple 2.7

Pour chacun des polynômes suivants, effectuez la mise en évidence de tous les facteurs communs.

(a) $5x^4 - 3x^2$

(b) $x^2(1-x) + 5(1-x)$

(c) $5x^2y + 30y^2 + 10y$

(d) $10x^4 + 30x^3 - 2x^2$

(e) $2 \cdot (3x+1) \cdot 3 \cdot (1-2x) + (3x+1)^2 \cdot (-2)$

Solution :

(a) x^2 est le seul facteur commun aux deux termes.

$$5x^2 \cdot x^2 - 3x^2 = x^2 \cdot (5x^2 - 3)$$

Validation. On s'assure que la mise en évidence est juste en distribuant le facteur commun sur l'addition (*faites-le*) et qu'on obtient l'expression de départ.

(b) $(1-x)$ est le seul facteur commun aux deux termes.

$$x^2(1-x) + 5(1-x) = (1-x) \cdot (x^2+5)$$

(c) 5 et y sont les seuls facteurs communs aux trois termes.

$$5x^2y + 5 \cdot 6 \cdot y \cdot y + 5 \cdot 2 \cdot y = 5y(x^2 + 6y + 2)$$

(d) Les facteurs communs aux trois termes sont 2 et x^2.

$$10x^4 + 30x^3 - 2x^2 = 5x^2 \cdot 2x^2 + 15x \cdot 2x^2 - 1 \cdot 2x^2 = 2x^2 \cdot (5x^2 + 15x - 1)$$

(e) L'expression à factoriser est celle qu'on obtient lorsqu'on utilise les règles et les formules de dérivation qui sont vues dans un premier cours de calcul différentiel. Elle contient deux termes dont les facteurs communs sont 2 et $3x+1$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3x+1) \cdot 3 \cdot (1-2x) + (3x+1)^2 \cdot (-2) &= 2 \cdot (3x+1) \cdot [3 \cdot (1-2x) + (3x+1)(-1)] \\ &= 2 \cdot (3x+1) \cdot [3 - 6x - 3x - 1] \\ &= 2(3x+1)(2-9x) \end{aligned}$$

2.3.2 L'inspection

Lorsque b et c sont des entiers, on tentera d'abord de factoriser des expressions quadratiques de la forme $x^2 + bx + c$ par **inspection** avant d'essayer une autre méthode.

La factorisation par inspection
Si $x^2 + bx + c$ s'écrit comme un produit $(x + m)(x + n)$, on doit trouver deux nombres, m et n, tels que $m + n = b$ et $m \cdot n = c$, c'est-à-dire on doit trouver deux nombres dont la somme est b et dont le produit est c. Ainsi

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ où } m + n = b \text{ et } m \cdot n = c$$

En effet, en développant le produit et en regroupant les termes semblables, on obtient

$$\begin{array}{rcll} (x+m)(x+n) & = & (x+m)\cdot x + (x+m)\cdot n & \text{on distribue} \\ & = & x^2 + m\cdot x + x\cdot n + m\cdot n & \text{on distribue} \\ & = & x^2 + (m+n)x + m\cdot n & \text{on regroupe les termes semblables.} \end{array}$$

Pour que deux polynômes soient égaux, les coefficients de leurs termes correspondants doivent être égaux. Dans ce cas, $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ lorsque $x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + m \cdot n$.

	$x^2 + bx + c$	$x^2 + (m + n)x + mn$
coefficient de x^2	1	1
coefficient de x	b	$m + n$
terme constant	c	$m \cdot n$

On cherche donc deux nombres m et n dont la somme est b (le coefficient de x, $b = m + n$) et dont le produit est c (le terme constant, $c = m \cdot n$).

Exemple 2.8
Factorisez les trinômes suivants dans les entiers.

(a) $x^2 + 11x + 30$ (b) $x^2 - 4x - 5$ (c) $x^2 - 9x + 14$ (d) $x^2 + 3x + 5$

Solution :

(a) Si $x^2 + 11x + 30 = (x + m)(x + n)$, il faut trouver deux nombres dont le produit est 30 et dont la somme est 11.

Les deux nombres seront nécessairement positifs, car, s'ils sont tous les deux négatifs, le produit sera positif, mais la somme sera négative, et si un des deux est négatif, le produit sera négatif. Les cas possibles sont résumés au tableau ci-dessous.

facteurs de 30	1 et 30	2 et 15	3 et 10	5 et 6
somme des facteurs	31	17	13	11

5 et 6 sont donc les nombres cherchés et la factorisation est alors

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6).$$

(b) Si $x^2 - 4x - 5 = (x + m)(x + n)$, il faut trouver deux nombres dont le produit est -5 et dont la somme est -4.

facteurs de -5	-1 et 5	1 et -5
somme des facteurs	4	-4

Selon le tableau ci-dessus, 1 et -5 sont les entiers cherchés. Ainsi,

$$x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5).$$

(c) Si $x^2 - 9x + 14 = (x+m)(x+n)$ il faut trouver deux nombres dont le produit est 14 et dont la somme est -9.

facteurs de 14	1 et 14	-1 et -14	2 et 7	-2 et -7
somme des facteurs	15	-15	9	-9

Selon le tableau ci-dessus, -2 et -7 sont les entiers cherchés. Ainsi,

$$x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7).$$

(d) Si $x^2 + 3x + 5 = (x+m)(x+n)$, il faut trouver deux nombres dont le produit est 5 et dont la somme est 3.

facteurs de 5	1 et 5	-1 et -5
somme des facteurs	6	-6

Selon le tableau ci-dessus, il est impossible de factoriser $x^2 + 3x + 5$ dans les entiers.

2.3.3 Le théorème de factorisation d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$

Théorème 2.3 Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 à une variable x et à coefficients réels.
— Si $b^2 - 4ac < 0$ alors le polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le décomposer en un produit de facteurs linéaires à coefficients réels.
— Si $b^2 - 4ac \geq 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme et sont obtenues par la formule quadratique :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

▷ **Démonstration** On peut montrer l'égalité

$$a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$$

en effectuant les multiplications. *Faites-le* si vous voulez relever le défi. ◁

L'avantage du théorème est qu'il permet de déterminer, à l'aide du **discriminant** $b^2 - 4ac$, si un polynôme de degré 2 est irréductible ou non dans $\mathbb{R}$ et, s'il est réductible, de le factoriser peu importe la nature de ses racines (qu'elles soient entières, rationnelles ou irrationnels, ...).

Exemple 2.9
Factorisez, si possible, le polynôme $x^2 - 5x + 25$.
Solution :
Dans ce cas, $a = 1$, $b = -5$ et $c = 25$. Comme le discriminant est négatif,

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=1,b=-5,c=25} = (-5)^2 - 4(1)(25) = 25 - 100 = -75 < 0$$

le polynôme $x^2 - 5x + 25$ est irréductible dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas comme un produit de facteurs linéaires à coefficients réels.

Exemple 2.10

Factorisez, si possible, le polynôme $4x^2 - 4x + 1$.

Solution :

Dans ce cas, $a = 4$, $b = -4$ et $c = 1$. Comme

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=4,b=-4,c=1} = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$$

on calcule les racines.

$$r_1 = \tfrac{--4+0}{2(4)} = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \tfrac{--4-0}{2(4)} = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcll} 4x^2 - 4x + 1 & = & 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{par le théorème de factorisation} \\ & = & 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{on factorise 4 et on utilise la commutativité de} \\ & & & \text{la multiplication} \\ & = & (2x-1)\cdot(2x-1) & \text{on distribue 2 sur } (x - \frac{1}{2}) \\ & = & (2x-1)^2 & \end{array}$$

Dans un cas comme celui-ci, lorsque le discriminant $b^2 - 4ac$ est nul, $r_1 = r_2$ et on dira alors que la **racine** est **double**.

Exemple 2.11

Factorisez le polynôme $6x^2 + 13x - 5$.

Solution :

Dans ce cas, $a = 6$, $b = 13$ et $c = -5$. Comme

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=6,b=13,c=-5} = 13^2 - 4(6)(-5) = 289 > 0$$

on calcule les racines.

$$r_1 = \tfrac{-13+\sqrt{289}}{2(6)} = \tfrac{-13+17}{12} = \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3} \quad \text{et} \quad r_2 = \tfrac{-13-\sqrt{289}}{2(6)} = \tfrac{-13-17}{12} = \tfrac{-30}{12} = -\tfrac{5}{2}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} 6x^2 + 13x - 5 & = & 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - -\frac{5}{2}\right) \\ & = & 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \end{array}$$

On vérifie que le produit des facteurs obtenus donne bien le polynôme $6x^2 + 13x - 5$ (*faites-le*). On peut également écrire

$$\begin{array}{rcll} 6x^2 + 13x - 5 & = & 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) & \text{par le théorème de factorisation} \\ & = & 6\left(\frac{3x-1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right) & \text{on met au dénominateur commun} \\ & = & 3\cdot\left(\frac{3x-1}{3}\right)\cdot 2\cdot\left(\frac{2x+5}{2}\right) & \text{on factorise 6 et on utilise la commutativité de} \\ & & & \text{la multiplication} \\ & = & (3x-1)(2x+5) & \text{on multiplie 3 par } \frac{3x-1}{3} \text{ et 2 par } \frac{2x+5}{2} \end{array}$$

pour obtenir une factorisation de $6x^2 + 13x - 5$ dans les entiers.

Exemple 2.12
Factorisez le trinôme $5x^2 + 15x - 1$.

Solution :
Dans ce cas, $a = 5$, $b = 15$ et $c = -1$. Comme

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=5,b=15,c=-1} = 15^2 - 4(5)(-1) = 245 > 0$$

on calcule les racines.

$$r_1 = \tfrac{-15+\sqrt{245}}{2(5)} = \tfrac{-15+7\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad r_1 = \tfrac{-15-\sqrt{245}}{2(5)} = \tfrac{-15-7\sqrt{5}}{10}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 5x^2 + 15x - 1 &= 5\left(x - \tfrac{-15+7\sqrt{5}}{10}\right)\left(x - \tfrac{-15-7\sqrt{5}}{10}\right) \\ &= 5\left(x + \tfrac{15-7\sqrt{5}}{10}\right)\left(x + \tfrac{15+7\sqrt{5}}{10}\right) \end{aligned}$$

On vérifie que le produit des facteurs obtenus donne bien le polynôme $5x^2 + 15x - 1$ (*faites-le*). On constate que $5x^2 + 15x - 1$ se factorise dans $\mathbb{R}$ mais, contrairement à l'exemple 2.11, ne se factorise pas dans $\mathbb{Z}$.

2.3.4 Les produits remarquables

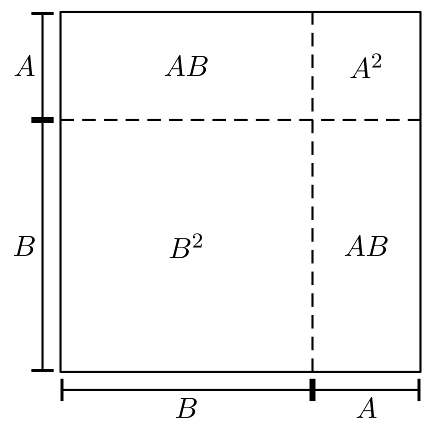
Des produits remarquables sont résumés au tableau 2.1. Dans la mesure où on reconnaît qu'un polynôme correspond à une de ces formes, on pourra le factoriser.

TABLEAU 2.1 – Produits remarquables

Nom	Identité
Carré parfait, somme	$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
Carré parfait, différence	$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
Somme de carrés	$A^2 + B^2$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$
Différence de carrés	$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
Somme de cubes	$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
Différence de cubes	$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

On suppose que A et B sont des nombres ou des expressions algébriques.

On peut démontrer toutes les identités du tableau 2.1 en développant et en simplifiant les membres de droite des égalités. *Faites-le.* Cependant, quelques-unes de ces formules ont de belles démonstrations géométriques. C'est le cas de l'identité $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ qu'on peut démontrer à l'aide de la figure suivante.



L'aire totale du grand carré est

$$(A+B)(B+A) = (A+B)(A+B) = (A+B)^2.$$

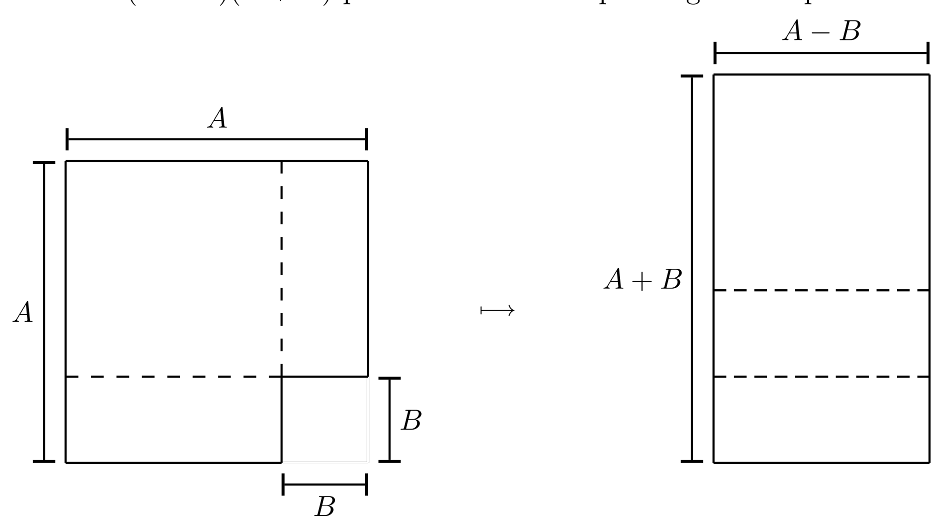
Si on calcule l'aire totale comme la somme des aires des deux rectangles et des deux carrés intérieurs on obtient

$$AB + A^2 + B^2 + AB = A^2 + 2AB + B^2.$$

Puiqu'il s'agit de l'aire du grand carré calculée de deux façons différentes, on en déduit que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

L'identité $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ peut aussi être interprétée géométriquement...



Exemple 2.13

Factorisez les carrés parfaits suivants.

(a) $x^2 + 6x + 9$

(b) $4x^2 - 20x + 25$

Solution :

(a) On soupçonne qu'il s'agit d'un carré parfait (somme), car x^2 et 9 sont des carrés parfaits et $6x = 2 \cdot (x \cdot 3)$, c'est-à-dire $A = x$ et $B = 3$.

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot (x \cdot 3) + 3^2 = (x+3)^2$$

Validation. On effectue la multiplication

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9.$$

(b) On soupçonne qu'il s'agit d'un carré parfait (différence), car $4x^2 = (2x)^2$ et $25 = 5^2$, c'est-à-dire $A = 2x$ et $B = 5$.

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = (2x - 5)^2$$

Validation. Faites-la.

Exemple 2.14

Factorisez les différences et la somme suivantes.

(a) $x^2 - 25$ (b) $9 - 16x^2$ (c) $x^3 + 125$ (d) $64x^3 - 27$

Solution :

(a) On écrit d'abord $x^2 - 25$ comme une différence de carrés où $A = x$ et $B = 5$.

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$$

(b) $9 - 16x^2$ est une différence de carrés avec $A = 3$ et $B = 4x$.

$$9 - 16x^2 = 3^2 - (4x)^2 = (3 - 4x)(3 + 4x)$$

(c) $x^3 + 125$ est une somme de cubes où $A = x$ et $B = 5$.

$$\begin{aligned} x^3 + 125 &= x^3 + 5^3 \\ &= (x+5)(x^2 - x \cdot 5 + 5^2) && \text{on utilise le produit remarquable} \\ &= (x+5)(x^2 - 5x + 25) && \text{on simplifie} \end{aligned}$$

Pour savoir si $x^2 - 5x + 25$ se factorise, on calcul le discriminant

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=1,b=-5,c=25} = (-5)^2 - 4(1)(25) = 25 - 100 = -75 < 0.$$

Puisqu'il est négatif, $x^2 - 5x + 25$ est irréductible. Le polynôme est donc complètement factorisé.

$$x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

(d) $64x^3 - 27$ est une différence de cubes où $A = 4x$ et $B = 3$.

$$\begin{aligned} 64x^3 - 27 &= (4x)^3 - 3^3 \\ &= (4x - 3)((4x)^2 + (4x)(3) + 3^2) && \text{on utilise le produit remarquable} \\ &= (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9) && \text{on simplifie} \end{aligned}$$

Pour savoir si $16x^2 + 12x + 9$ se factorise, on calcule le discriminant.

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=16,b=12,c=9} = 12^2 - 4(16)(9) = -432 < 0$$

On en conclut que $16x^2 + 12x + 9$ est irréductible et que

$$64x^3 - 27 = (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$$

est complètement factorisé.

Validation. On effectue la multiplication

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl} & 16x^2 & + & 12x & + & 9 & & & & \\ \times & & & 4x & - & 3 & & & & \\ \hline & 64x^3 & + & 48x^2 & + & 36x & & & & = 4x \cdot (16x^2 + 12x + 9) \\ -(& & & 48x^2 & + & 36x & + & 27) & & = 3 \cdot (16x^2 + 12x + 9) \\ \hline & 64x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 27 & & \text{on regroupe les termes semblables} \end{array}$$

et on simplifie pour obtenir l'expression de départ $64x^3 - 27$.

Résumé de la marche à suivre pour factoriser

Comme on l'a vu, il existe plusieurs méthodes pour factoriser un polynôme. En général,

— lorsque tous les termes du polynôme possèdent un facteur commun, on utilise la mise en évidence ;

— lorsqu'on reconnaît qu'il s'agit d'une différence de carrés, d'une somme de carrés, d'une somme de cubes ou d'une différence de cubes, on utilise les produits remarquables décrits au tableau 2.1 ;

— lorsqu'il s'agit d'un polynôme $x^2 + bx + c$ où b et c sont des entiers, on tente de le factoriser par inspection ;

— lorsqu'on reconnaît qu'il s'agit d'un carré parfait somme ou différence, on utilise les produits remarquables décrits au tableau 2.1 ;

— Finalement, si rien ne semble fonctionner, on pourra toujours utiliser le théorème 2.3 pour factoriser un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ ou pour déterminer s'il est irréductible dans les réels.

Certains polynômes peuvent être factorisés en utilisant plus d'une technique.

Exemple 2.15

Factorisez complètement les polynômes suivants dans les entiers.

(a) $5t^3 + 30t^2 + 45t$

(b) $a^2(b - 3c) + a(b - 3c) + 6(3c - b)$

(c) $x^2 - y^2 + x - y$

(d) $x^4 - 1$

Solution :

(a) On commence toujours par regarder s'il y a des facteurs à mettre en évidence.

$$\begin{aligned} 5t^3 + 30t^2 + 45t &= 5t \cdot (t^2 + 6t + 9) && \text{on met en évidence } 5t \\ &= 5t \cdot (t^2 + 2 \cdot (3 \cdot t) + 3^2) && \text{carré parfait, somme} \\ &= 5t(t + 3)^2 \end{aligned}$$

Validation. On vérifie en développant.

$$5t(t + 3)^2 = 5t(t^2 + 6t + 9) = 5t^3 + 30t^2 + 45t$$

(b) On remarque que, à un signe près pour le dernier terme, le facteur $(b - 3c)$ est commun à tous les termes.

$$\begin{aligned} &a^2(b - 3c) + a(b - 3c) + 6(3c - b) \\ &\quad = a^2(b - 3c) + a(b - 3c) - 6(b - 3c) && \text{on utilise l'égalité } (3c - b) = -(b - 3c) \\ &\quad = (b - 3c)(a^2 + a - 6) && \text{on met en évidence } (b - 3c) \\ &\quad = (b - 3c)(a - 2)(a + 3) && \text{on factorise par inspection} \end{aligned}$$

Validation. Faites-la.

(c) En factorisant les deux premiers termes, on fait ressortir un facteur commun. On appelle cette technique la mise en évidence double.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + x - y &= (x - y)(x + y) + (x - y) && \text{différence de carrés} \\ &= (x - y)(x + y + 1) && \text{on met en évidence } (x - y) \end{aligned}$$

(d) On exprime d'abord $x^4 - 1$ comme une différence de carrés.

$$\begin{array}{rcll}
x^4 - 1 & = & (x^2)^2 - 1^2 & x^4 = (x^2)^2 \\
& = & (x^2-1)(x^2+1) & \text{on factorise en posant } A = x^2 \text{ et } B = 1 \\
& = & (x^2-1^2)(x^2+1) & \text{le facteur } x^2-1 \text{ est une différence de carrés} \\
& = & (x-1)(x+1)(x^2+1) & \text{on factorise } x^2-1^2 \text{ en posant } A = x \text{ et } B = 1
\end{array}$$

Les facteurs $x-1$ et $x+1$ sont linéaires tandis que le facteur x^2+1 est une somme de carrés et est donc irréductible. On peut vérifier que x^2+1 est bien irréductible à l'aide du test du discriminant. Dans ce cas, $a=1$, $b=0$ et $c=1$ et

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=1,b=0,c=1} = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0.$$

Puisque le discriminant est négatif, on conclut que x^2+1 est bien irréductible. Le polynôme $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ est donc complètement factorisé.

Exercices

2.13 Effectuez la mise en évidence des facteurs communs pour factoriser chacun des polynômes suivants. Simplifiez chaque facteur lorsque possible.

(a) $2x^3 + 6x$ (b) $18x^4 - 6x^3 + 9x^2$ (c) $x^2 \cdot (2x-1) + 5 \cdot (2x-1)$

2.14 Les expressions suivantes ont été obtenues à l'aide des formules et des règles de dérivation que vous verrez dans le cours de calcul différentiel. Effectuez la mise en évidence des facteurs communs pour factoriser chacun des polynômes suivants. Simplifiez lorsque possible.

> **Attention !** En calcul différentiel, on cherche souvent à déterminer les points stationnaires d'une fonction (là où sa dérivée est zéro). On écrit donc les dérivées obtenues sous forme factorisée pour facilement en trouver les zéros.

(a) $2A \cdot 3B + A^2 \cdot (-1)$
(b) $2 \cdot (3x-2) \cdot 3 \cdot (1-x) + (3x-2)^2 \cdot (-1)$
(c) $3A^4 + 3B \cdot 4A^3$
(d) $3(x-1)^4 + 3x \cdot 4(x-1)^3$
(e) $3A^2 \cdot 3 \cdot B^5 + A^3 \cdot 5B^4 \cdot 2$
(f) $3(3x+2)^2 \cdot 3 \cdot (2x-1)^5 + (3x+2)^3 \cdot 5(2x-1)^4 \cdot 2$
(g) $9(4x-3)^8 \cdot 4 \cdot (5-x)^4 + (4x-3)^9 \cdot 4(5-x)^3 \cdot (-1)$

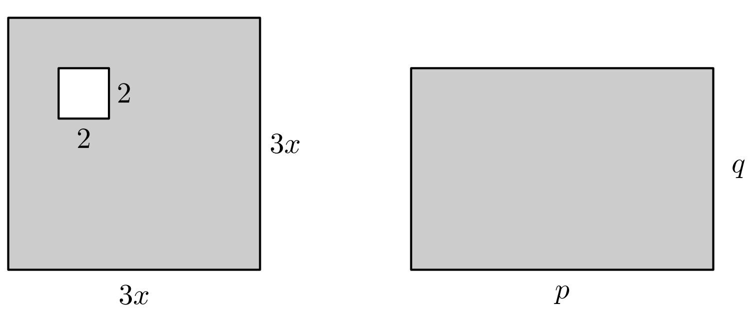
2.15 Factorisez les trinômes suivants par inspection.

(a) $x^2 + 5x + 6$
(b) $x^2 - 10x + 16$
(c) $x^2 + 2x - 15$
(d) $x^2 - x - 20$
(e) $x^2 + 8x + 15$
(f) $x^2 - 12x + 11$
(g) $t^2 - 5t - 6$
(h) $-x^2 - 5x - 4$

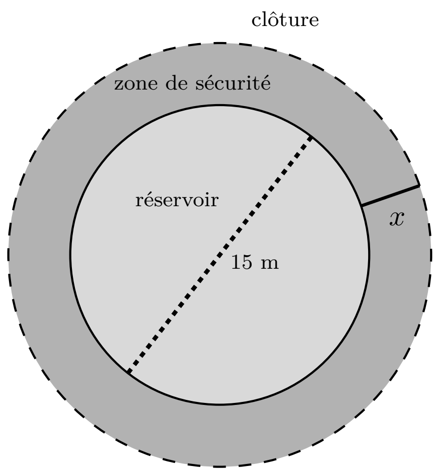
2.16 Factorisez les différences de carrés suivantes. Simplifiez chaque facteur lorsque possible.

(a) $144 - 25x^2$
(b) $49y^2 - 36x^2$
(c) $x^4 - 16$
(d) $25x^2 - 100(x+1)^2$

2.17 Déterminez un polynôme qui donne l'aire de la partie ombragée de l'image de gauche. Donnez deux polynômes p et q qui font en sorte que l'aire du rectangle de droite est la même que celle de la partie ombragée de l'image de gauche.

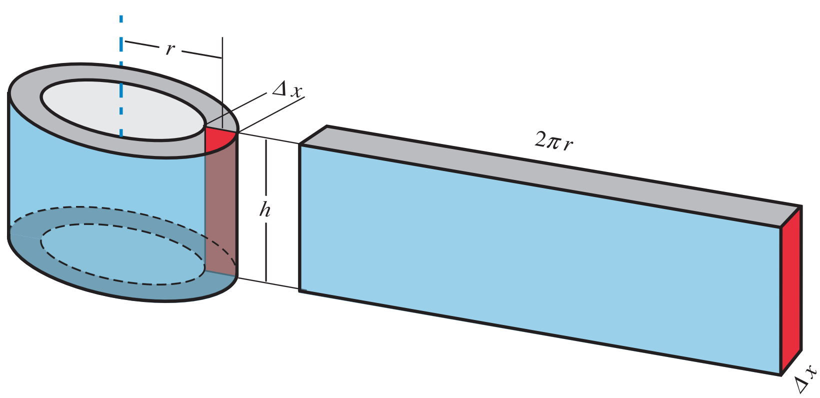


2.18 Vous devez faire installer un réservoir cylindrique de 15 m de diamètre. Une zone de sécurité d'une largeur x m doit ceinturer le réservoir tel qu'il est illustré ci-dessous.



(a) À l'aide d'une différence, déterminez un polynôme donnant l'aire de la zone de sécurité. Donnez d'abord le polynôme comme vous l'avez construit (avec la différence) et, ensuite, déterminez sa forme simplifiée en le développant.
(b) Quelle est la superficie de la zone de sécurité si sa largeur est de 3,5 m ?
(c) Les normes stipulent qu'une clôture doit être installée pour ceinturer l'extérieur de la zone de sécurité. Déterminez un polynôme donnant la longueur de la clôture nécessaire à une zone de sécurité de x m de largeur.
(d) Quelle est la longueur de la clôture si la largeur de la zone de sécurité est 3,5 m ?

2.19 Le but de cet exercice est de montrer que le volume nécessaire à la construction de la paroi latérale du tube dont il est question à l'exercice 2.3 peut aussi être obtenu en calculant le volume du prisme rectangulaire droit de longueur $2\pi r$, de hauteur h et d'épaisseur Δx, le prisme qui correspond au tube déroulé[ii].



ii. Image tirée des notes de cours de MAT-145, partie 2

Rappel. L'expression trouvée à l'exercice 2.3 pour le volume de la paroi latérale du tube :

$$V_C = \pi\left(r + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 h - \pi\left(r - \frac{\Delta x}{2}\right)^2 h$$

Le volume du prisme droit de longueur $2\pi r$, de hauteur h et d'épaisseur Δx :

$$V_P = \pi h \cdot \Delta x \cdot 2r = 2\pi r h \Delta x$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que $V_C = V_P$.

(a) Effectuez une mise en évidence des facteurs communs de l'expression V_C.
(b) Factorisez sa différence de carrés. Simplifiez chaque facteur.
(c) Écrivez la forme factorisée du volume V_C et comparez-la à la formule pour le volume du prisme V_P.

2.20 Factorisez complètement les polynômes suivants à l'aide du théorème 2.3.

(a) $x^2 + 3x + 2$
(b) $x^2 - 8x + 7$
(c) $x^2 - 2x - 4$
(d) $3x^2 + x + 1$
(e) $2x^2 + 4x - 5$

2.21 Parmi les polynômes suivants, trouvez les carrés parfaits et factorisez-les.

(a) $x^2 + 10x + 25$
(b) $x^2 + 5x + 6$
(c) $4x^2 - 12x + 9$
(d) $2x^2 + 10x - 5$

2.22 Déterminez les termes manquants afin qu'ils transforment les trinômes suivants en carrés parfaits.

(a) $x^2 + \underline{\hspace{1.5em}} + 36$
(b) $y^2 - \underline{\hspace{1.5em}} + 100$
(c) $25x^2 + 10x + \underline{\hspace{1.5em}}$
(d) $4x^2 - 12xy + \underline{\hspace{1.5em}}$

2.23 Utilisez les produits remarquables pour factoriser les polynômes suivants.

(a) $x^2 + 8x + 16$
(b) $4x^2 - 4x + 1$
(c) $16x^2 - 25y^2$
(d) $t^3 + 27$
(e) $8x^3 - 1$
(f) $27 + 64x^3$
(g) $27 - \frac{x^3}{125}$
(h) $(3x + 2)^3 + 8x^3$
(i) $3(x - 4)^3 + 81$
(j) $1 - 64x^2$
(k) $81a^2b^2 - (a + b)^2$
(l) $\frac{x^2}{36} - \frac{1}{9}$
(m) $25x^2 - 4$
(n) $3(x - 4)^2 - 27$
(o) $9x^2y^2 - 24xy + 16$
(p) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$

2.24 Factorisez complètement les polynômes suivants.

(a) $x^5 + x^2$
(b) $x^4 - 5x^2$
(c) $16x^4 - 81$
(d) $x^5 - 81x^3$
(e) $20x^2 + 60x + 45$
(f) $75x(x + 1) - 3x^3(x + 1)$
(g) $320y^4 - 80y^2$
(h) $4x^3y + 8x^2y + 4xy$
(i) $3x(3x - 1) + 9(3x - 1)$
(j) $\frac{9}{4}(3 - 2x)^2 - x^2(3 - 2x)^2$
(k) $36x^2 - 12x + 1$
(l) $49x^4 - 4x^2$
(m) $4x^2 - 10x - 6$
(n) $\frac{-1}{2}x^2 - 10x - 50$
(o) $5x^3(1 - 2x^2) - 40(1 - 2x^2)$

2.4 La division de polynômes, les fractions rationnelles

Contrairement à l'addition, la soustraction et à la multiplication de polynômes, la division de polynômes ne resulte pas généralement en un polynôme mais plutôt en une **fraction rationnelle**.

Définition 2.4 Une **fraction rationnelle** est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes et où $Q \neq 0$.

Par exemple,

$$\frac{2x-1}{4} \, , \, \frac{4}{2x-1} \, , \, \frac{x}{x^2-1} \text{ et } \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$$

sont des fractions rationnelles à une variable.

Définition 2.5 Le **domaine** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est l'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles la fraction est définie, c'est-à-dire pour lesquelles $Q \neq 0$.

Pour trouver le domaine d'une fraction rationnelle, on doit parfois utiliser la règle du produit nul.

Règle du produit nul
Le produit de deux ou de plusieurs facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.

$$a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Exemple 2.16
Quels sont les domaines des fractions rationnelles suivantes ?

(a) $\dfrac{2x-1}{4}$ (b) $\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

Solution :

(a) Puisque le dénominateur est 4, il ne s'annule jamais. Le domaine de la fraction est donc $\mathbb{R}$.

(b) On factorise le dénominateur

$$\frac{x+2}{x^2+x-2} = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)}$$

et on utilise la règle du produit nul,

$$\begin{aligned}(x+2)(x-1) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -2 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

Les valeurs -2 et 1 annulent donc le dénominateur $(x+2)(x-1)$ et le domaine de la fraction rationnelle est alors $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

2.4.1 La simplification des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est **simplifiée** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun facteur commun autre que 1 ou -1.

Rappel. Si a, b, et k sont des nombres réels ou des expressions telles que $b \neq 0$,

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \quad \text{si } k \neq 0.$$

Exemple 2.17

Simplifiez les fractions rationnelles suivantes.

(a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$ (b) $\dfrac{x^3 - x}{x - 1}$

Solution :

(a) On commence par factoriser les numérateur et dénominateur de la fraction et on simplifie leurs facteurs communs.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}, \qquad \text{si } x \neq -2$$

(b) On factorise et on simplifie.

$$\frac{x^3 - x}{x - 1} = \frac{x(x^2-1)}{x-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x(x+1) \qquad \text{si } x \neq 1$$

Exemple 2.18

Entrez l'expression $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ sur une ligne de commande d'une fenêtre de calculs de votre calculatrice.

(a) La calculatrice simplifie cette expression pour donner quoi ?

(b) Expliquez, à l'aide d'un argument algébrique, ce à quoi fait référence le triangle jaune qui apparaît à la gauche de la ligne de commande.

Solution :

(a) On entre l'expression sur une ligne de commande, on appuie sur [enter] et on obtient

$$\frac{x+3}{x-1}.$$

(b) Un avertissement est affiché lorsqu'on clique sur le triangle jaune.

Le domaine du résultat peut être plus grand que le domaine de l'entrée.

En effet, le domaine de la fraction entrée

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x-1)}$$

est $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ tandis que celle de la fraction résultante, $\frac{x+3}{x-1}$, est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La fraction résultante possède donc moins de restrictions que celle entrée.
Si on simplifie l'expression de départ à la main, plutôt qu'à la calculatrice,

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} \overset{\text{si } x\neq 2}{=} \frac{x+3}{x-1}$$

on arrive à la même expression que celle obtenue avec la calculatrice, mais la simplification qui est faite nous permet de comprendre à quoi réfère le message affiché.
Rappelons que pour pouvoir simplifier le facteur commun $x-2$, on doit supposer qu'il n'est pas 0, c'est-à-dire que $x \neq 2$. Ainsi, l'égalité

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \frac{x+3}{x-1}$$

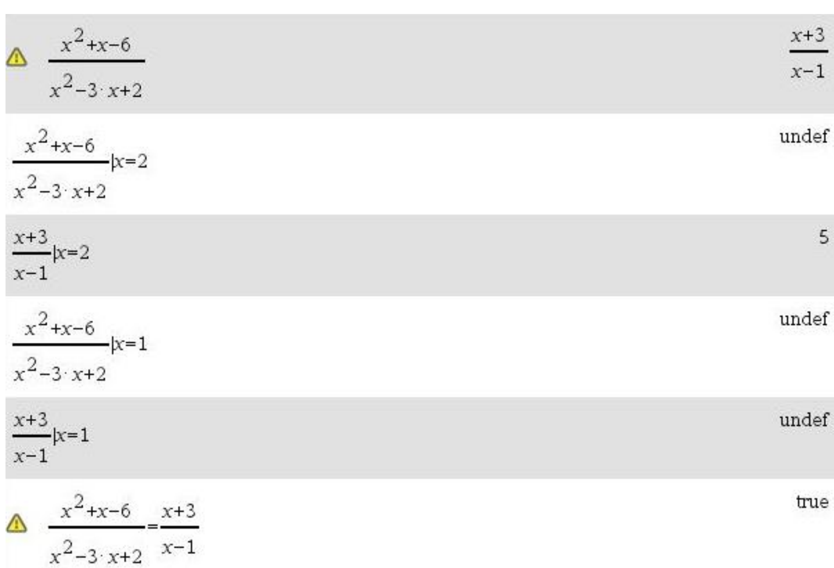
n'est vraie que si $x \neq 2$. En effet, en $x = 2$, les deux expressions ne donnent pas le même résultat,

$$\left.\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}\right|_{x=2} \notin \mathbb{R} \quad \text{tandis que} \quad \left.\frac{x+3}{x-1}\right|_{x=2} = 5$$

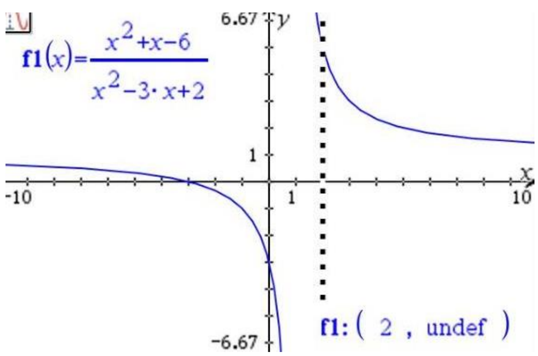
Par contre, peu importe la valeur de x autre que 2, les deux expressions auront la même valeur ou, dans le cas où $x = 1$, n'existeront pas. Quelques valeurs sont présentées dans le tableau ci-dessous.

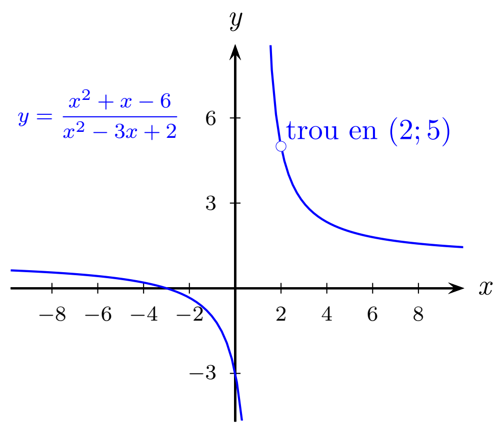
x	$\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$	$\frac{x+3}{x-1}$
-5	$1/3$	$1/3$
-3	0	0
0	-3	-3
1	non déf.	non déf.
$1{,}9$	$5{,}4444\ldots$	$5{,}4444\ldots$
2	non déf.	5
$2{,}1$	$4{,}6363\ldots$	$4{,}6363\cdots\ldots$
4.5	$2{,}1428\ldots$	$2{,}1428\ldots$

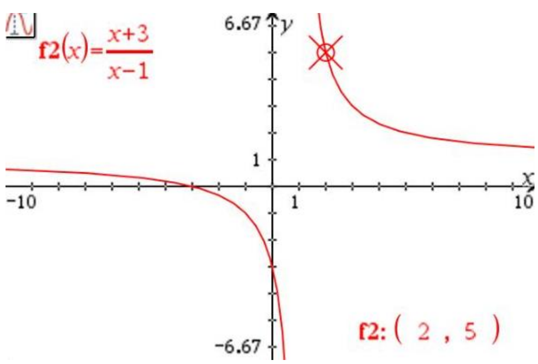
La figure ci-dessous illustre les résultats obtenus dans une fenêtre de calculs à la calculatrice.

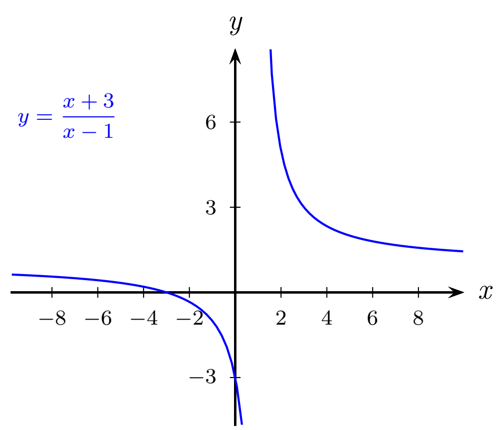


Du point de vue graphique, $\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$ et $\frac{x+3}{x-1}$ sont identiques sauf en $x = 2$ où $\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$ n'est pas définie (il y a un trou), tandis que $\left.\frac{x+3}{x-1}\right|_{x=2} = 5$ est représenté par le point $(2; 5)$. Les images de gauches ci-dessous ont été produites à l'aide de la calculatrice tandis que celles de droites sont celles qui illustrent l'interprétation qu'on doit en faire.

<table>
<tr><th>Graphiques tracés à l'aide de la TI Nspire</th><th>Interprétation</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

2.4.2 Les opérations sur les fractions rationnelles

On peut additionner, soustraire, multiplier et diviser des fractions rationnelles.

La multiplication de fractions

Rappel. Le produit de deux fractions est le produit des numérateurs divisé par le produit des dénominateurs. Ainsi, si a, b, c et d sont des nombres réels ou des expressions telles que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Exemple 2.19

Effectuez la multiplication et simplifiez. Lors des simplifications, indiquez les valeurs qui sont à exclure du domaine de la fraction résultante.

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{3x^3 - 2x^2} \cdot \frac{9x^3 - 4x}{7x + 49}$$

Solution :

On factorise et on simplifie.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + 2x - 35}{3x^3 - 2x^2} \cdot \frac{9x^3 - 4x}{7x + 49} &= \frac{(x+7)(x-5)}{x^2(3x-2)} \cdot \frac{x(3x-2)(3x+2)}{7(x+7)} && \text{on factorise complètement} \\
&= \frac{\cancel{(x+7)}(x-5)}{x^{\cancel{2}}\cancel{(3x-2)}} \cdot \frac{\cancel{x}\cancel{(3x-2)}(3x+2)}{7\cancel{(x+7)}} && \text{on simplifie} \\
&= \frac{(x-5)(3x+2)}{7x} && \text{si } x \neq 0,\ x \neq \frac{2}{3},\ x \neq -7
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{3x^3 - 2x^2} \cdot \frac{9x^3 - 4x}{7x + 49} = \frac{(x-5)(3x+2)}{7x}$$

pour $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$ et $x \neq -7$.

Le domaine de la fraction de départ est

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{x^2 + 2x - 35}{3x^3 - 2x^2} \cdot \frac{9x^3 - 4x}{7x + 49}\right) = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{2}{3}; -7\right\},$$

tandis que celui de la fraction résultante de la simplification est

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{(x-5)(3x+2)}{7x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

On doit donc exclure les valeurs $\frac{2}{3}$ et -7 du domaine de la fraction résultante pour obtenir celui de la fraction de départ.

La division de fractions

Rappel. Le quotient de deux fractions est obtenu en multipliant le numérateur par l'inverse du dénominateur. Ainsi, si a, b, c et d sont des nombres réels ou des expressions telles que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exemple 2.20

Effectuez la division et simplifiez. Lors des simplifications, indiquez les valeurs qui sont à exclure du domaine de la fraction résultante.

$$\frac{x^3+8}{x^2-4} \div \frac{x^2-2x+4}{x^2+4x-12}$$

Solution :

On factorise tous les polynômes.

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)} \div \frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x+6)}$$

On établit les restrictions.

$$\begin{aligned} (x+2)(x-2) \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\ x^2-2x+4 \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R} \\ (x-2)(x+6) \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad x \neq 2 \text{ et } x \neq -6 \end{aligned}$$

Pour diviser, on multiplie par l'inverse. On peut inverser si $x \neq 2$ et $x \neq -6$.

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)} \div \frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x+6)} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x+6)}{x^2-2x+4}$$

On simplifie les facteurs communs

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x+6)}{x^2-2x+4} = \frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x^2-2x+4)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}(x+6)}{\cancel{(x^2-2x+4)}}$$

Ainsi,

$$\frac{x^3+8}{x^2-4} \div \frac{x^2-2x+4}{x^2+4x-12} = x+6 \quad \text{si } x \neq -2,\ x \neq 2 \text{ et } x \neq -6$$

L'addition et la soustraction de fractions ayant le même dénominateur

Rappel. L'addition (ou la soustraction) de deux fractions ayant le même dénominateur est obtenue en additionnant (ou en soustrayant) les numérateurs. Le dénominateur de la fraction résultante est le dénominateur commun aux deux fractions.
Ainsi, si a, b et c sont des nombres réels ou des expressions telles que $b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Exemple 2.21

Effectuez les opérations et simplifiez.

(a) $\dfrac{x^2+x-7}{x^2-25}+\dfrac{2x-3}{x^2-25}$ (b) $\dfrac{x-4}{x+3}-\dfrac{3x+2}{x+3}$

Solution :

(a) On additionne les numérateurs et on regroupe les termes semblables.

$$\frac{x^2+x-7}{x^2-25}+\frac{2x-3}{x^2-25}=\frac{(x^2+x-7)+(2x-3)}{x^2-25}=\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}$$

On simplifie la fraction résultante.

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}=\frac{\cancel{(x+5)}(x-2)}{(x-5)\cancel{(x+5)}}=\frac{x-2}{x-5}\quad \text{si } x\neq -5$$

Ainsi, $\dfrac{x^2+x-7}{x^2-25}+\dfrac{2x-3}{x^2-25}=\dfrac{x-2}{x-5}$ si $x\neq -5$.
On remarque que 5 n'est pas dans le domaine de la fraction résultante et n'a donc pas à en être exclu.

(b) On soustrait les numérateurs,

$$\frac{x-4}{x+3}-\frac{3x+2}{x+3}=\frac{(x-4)-(3x+2)}{x+3}=\frac{-2x-6}{x+3}$$

et on simplifie

$$\frac{-2x-6}{x+3}=\frac{-2\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=-2\quad \text{si } x\neq -3.$$

Ainsi, $\dfrac{x-4}{x+3}-\dfrac{3x+2}{x+3}=-2$ si $x\neq -3$.

L'addition et la soustraction de fractions ayant des dénominateurs différents

Rappel. Si a, b, c et d sont des nombres réels ou des expressions telles que $b\neq 0$ et $d\neq 0$,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\qquad \text{et}\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Exemple 2.22

Effectuez les opérations et simplifiez.

(a) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x+3}$ (b) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x-1}{x+2}$

Solution :

(a) On additionne les fractions et on simplifie en regroupant les termes semblables du numérateur.

$$\frac{4}{x}+\frac{3}{x+3}=\frac{4(x+3)+3x}{x(x+3)}=\frac{(4x+12)+3x}{x(x+3)}=\frac{7x+12}{x(x+3)}$$

(b) On soustrait les fractions

$$\frac{x+2}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{(x+2)(x+2)-(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$$

et on simplifie.

$$\begin{aligned}\frac{(x+2)(x+2)-(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} &= \frac{(x^2+4x+4)-(x^2-1)}{(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Lorsqu'on additionne ou on soustrait des fractions dont les dénominateurs sont différents mais qui ont un ou plusieurs facteurs communs, il est plus efficace de déterminer le plus petit dénominateur commun.

Pour trouver le plus petit dénominateur commun

1. On factorise complètement le dénominateur de chacune des fractions.
2. On écrit tous les facteurs du dénominateur de la première fraction.
3. On accole à ces facteurs tous les facteurs du prochain dénominateur qui ne s'y trouvent pas déjà.
4. On continue à accoler des facteurs au dénominateur tant qu'il y a des fractions à additionner ou à soustraire.

Exemple 2.23

Déterminez le plus petit dénominateur commun et simplifiez.

(a) $\dfrac{x+3}{x^2+x-2}+\dfrac{2}{x^2-1}$

(b) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$

(c) $\dfrac{x}{x^2+x-20}+\dfrac{7}{(x-4)^2}$

Solution :

(a) On factorise les dénominateurs.

$$\frac{x+3}{x^2+x-2}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

On écrit la liste des facteurs du premier quotient

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{\qquad}{(x-1)(x+2)\qquad}$$

et on y accole les facteurs du deuxième dénominateur qui n'y sont pas déjà.

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{\qquad}{(x-1)(x+2){\color{red}(x+1)}}$$

On effectue la mise au dénominateur commun. Il s'agit de réécrire chacune des fractions pour qu'elle ait le dénominateur commun ; on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par les facteurs nécessaires à transformer son dénominateur en celui qui est commun.

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{{\color{red}(x+1)}}{{\color{red}(x+1)}}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{{\color{red}(x+2)}}{{\color{red}(x+2)}}=\frac{(x+3)(x+1)+2(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+1)}$$

On développe le numérateur et on regroupe les termes semblables.

$$\frac{(x+3)(x+1)+2(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+1)} = \frac{x^2+4x+3+2x+4}{(x-1)(x+2)(x+1)} = \frac{x^2+6x+7}{(x-1)(x+2)(x+1)}$$

Puisque le numérateur x^2+6x+7 est irréductible dans $\mathbb{Z}$, la fraction est simplifiée.

(b) On factorise les dénominateurs.

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}-\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}-\frac{x+5}{(x-3)(x+1)}$$

On détermine le plus petit dénominateur commun et on effectue la mise au dénominateur commun.

$$\frac{2}{x-3}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}+\frac{3}{x+1}\cdot\frac{(x-3)}{(x-3)}-\frac{x+5}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x+1)+3(x-3)-(x+5)}{(x-3)(x+1)}$$

On développe le numérateur et on simplifie.

$$\frac{2(x+1)+3(x-3)-(x+5)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2x+2+3x-9-x-5}{(x-3)(x+1)} = \frac{4x-12}{(x-3)(x+1)}$$

On factorise le numérateur et on simplifie les facteurs communs du numérateur et du dénominateur.

$$\frac{4x-12}{(x-3)(x+1)} = \frac{4\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+1)} = \frac{4}{x+1} \qquad \text{si } x\neq 3.$$

Ainsi,

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}-\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{4}{x+1} \qquad \text{si } x\neq 3.$$

(c) On factorise les dénominateurs.

$$\frac{x}{x^2+x-20}+\frac{7}{(x-4)^2} = \frac{x}{(x-4)(x+5)}+\frac{7}{(x-4)^2}$$

On écrit les facteurs de la première fraction.

$$\frac{x}{(x-4)(x+5)}+\frac{7}{(x-4)^2} = \frac{\qquad\qquad}{(x-4)(x+5)\qquad\qquad}$$

Comme le dénominateur de la deuxième fraction comprend deux facteurs $(x-4)$, on complète en accolant le facteur manquant.

$$\frac{x}{(x-4)(x+5)}+\frac{7}{(x-4)^2} = \frac{\qquad}{(x-4)(x+5)(x-4)} = \frac{\qquad}{(x-4)^2(x+5)}$$

On effectue la mise au dénominateur commun.

$$\frac{x}{(x-4)(x+5)}\cdot\frac{(x-4)}{(x-4)}+\frac{7}{(x-4)^2}\cdot\frac{(x+5)}{(x+5)} = \frac{x(x-4)+7(x+5)}{(x-4)^2(x+5)}$$

On développe le numérateur, on regroupe les termes semblables et on s'assure que la fraction obtenue est simplifiée.

$$\frac{x^2-4x+7x+35}{(x-4)^2(x+5)} = \frac{x^2+3x+35}{(x-4)^2(x+5)}$$

Comme le discriminant du numérateur $x^2+3x+35$ est négatif,

$$b^2-4ac\Big|_{a=1,b=3,c=35} = 9-4\cdot 35<0$$

$x^2+3x+35$ est irréductible dans $\mathbb{R}$. La fraction rationnelle est donc simplifiée.

Attention ! Un moyen rapide pour savoir si le numérateur de l'expression

$$\frac{x^2+3x+35}{(x-4)^2(x+5)}$$

se simplifie avec le dénominateur, sans avoir à le factoriser, est de l'évaluer aux zéros du dénominateur.
En effet, si $x^2+3x+35$ avait $x-4$ comme facteur, on pourrait l'écrire

$$x^2+3x+35=(x-4)Q(x)$$

et ce produit, peu importe le polynôme $Q(x)$, vaudrait zéro en $x=4$. Puisque ce n'est pas le cas,

$$x^2+3x+35\Big|_{x=4}=16+12+35=63\neq 0,$$

$x-4$ ne peut pas être un facteur de $x^2+3x+35$. De même, puisque

$$x^2+3x+35\Big|_{x=-5}=25-15+35=45\neq 0,$$

$(x+5)$ ne peut pas être un facteur de $x^2+3x+35$. On peut donc en conclure que la fraction rationnelle

$$\frac{x^2+3x+35}{(x-4)^2(x+5)}$$

ne se simplifie pas davantage, son numérateur n'ayant aucun facteur en commun avec son dénominateur.

Exercices

2.25 Quels sont les domaines des fractions rationnelles suivantes ?

(a) $\dfrac{x+5}{x^2-25}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ (c) $\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}$

2.26 Simplifiez les expressions suivantes. Indiquez quelles sont les valeurs à exclure du domaine de la fraction résultante.

(a) $\dfrac{x+5}{x^2-25}$ (b) $\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}$ (c) $\dfrac{2x^3-4x^2-6x}{x^2+x}$

2.27 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{5}{4A^2B^2}\cdot\dfrac{6A^3}{5B}$

(b) $\dfrac{5}{4(x-1)^2(x+2)^2}\cdot\dfrac{6(x-1)^3}{5(x+2)}$

(c) $\dfrac{8x-4}{4x+12}\cdot\dfrac{x^2-9}{4x^2-4x+1}$

(d) $\dfrac{x^3-27}{2x^2-4x}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

(e) $\dfrac{9t^2-16}{t+1}\div(4-3t)$

(f) $\dfrac{x^2-16}{4x^2-20x+16}\div\dfrac{x^2+3x-4}{3x^2-6x+3}$

2.28 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{21}{8} - \dfrac{5}{8}$

(b) $\dfrac{2x+1}{x-2} - \dfrac{5}{x-2}$

(c) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6} - \dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$

(d) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{3}$

(e) $\dfrac{3}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}$

(f) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{(x-1)^3}$

(g) $\dfrac{7x-3}{5} + \dfrac{9+2x}{2} - \dfrac{9-6x}{10}$

(h) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+4} + \dfrac{x+3}{x^2-4} + \dfrac{2}{2-x}$

2.29 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{1}{x+1} \div \dfrac{x}{x-2}$

(b) $\dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{x-2}{x} - \dfrac{x-2}{x}$

(c) $\dfrac{2}{x+2} \div \dfrac{3}{x^2-4} + \dfrac{x-3}{2}$

2.30 Déterminez l'expression manquante.

(a) $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{\boxed{}}{3-x} = \dfrac{5x-1}{x-3}$

(b) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{\boxed{}}{x+2} = \dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$

2.31 Sans l'aide d'une calculatrice, déterminez lequel des symboles $=$ ou $\neq$ est approprié.

(a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ ? \ \dfrac{1}{a+b}$

(b) $\dfrac{x^2-25}{x-5} \ ? \ x-5$

2.32 Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou si elles sont fausses. Si une affirmation est fausse, corrigez-la.

(a) Le plus petit dénominateur commun nécessaire pour effectuer l'addition $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3}$ est $x+3$.

(b) La fraction rationnelle $\dfrac{x^2-25}{x-5}$ n'est pas définie en $x = 5$ mais lorsque x s'approche de 5, $\dfrac{x^2-25}{x-5}$ s'approche de 10.

2.33 Les expressions suivantes sont obtenues à l'aide des formules et des règles de dérivation que vous verrez dans le cours de calcul différentiel. Simplifiez chacune des expressions suivantes et donnez la réponse sous forme d'une seule fraction simplifiée.

> **Attention !** En calcul différentiel, on cherche souvent à déterminer les points critiques d'une fonction (là où sa dérivée est zéro et là où le dénominateur de sa dérivée égal zéro). On écrit donc les dérivées obtenues sous forme de fractions simplifiées dont les numérateurs et les dénominateurs sont complètement factorisés.

(a) $\dfrac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2}$

(b) $-2(5x^2+1)^{-3}10x$

(c) $\dfrac{3(5x-1)-(3x+2)5}{(5x-1)^2}$

(d) $\dfrac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$

(e) $5 \cdot \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4 \cdot \dfrac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}$

(f) $3\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^2 \cdot \dfrac{2(3x+2)-(2x-1)\cdot 3}{(3x+2)^2}$

(g) $\dfrac{0\cdot(t^2-4)^3 - 5\cdot 3(t^2-4)^2\cdot 2t}{((t^2-4)^3)^2}$

(h) $\dfrac{3(x-1)^4 - 3x\cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8}$

Musculation algébrique

Si vous voulez pratiquer davantage la mise en évidence et la simplification de fractions rationnelles, faites les exercices suivants.

2.34 Effectuez la mise en évidence des facteurs communs pour factoriser chacun des polynômes suivants. Simplifiez chaque facteur lorsque possible.

(a) $3A^2 \cdot 2 \cdot B^4 + A^3 \cdot 4B^3 \cdot 2$

(b) $A \cdot B^2 + 2B \cdot (-2)$

(c) $6(y-3)^5 \cdot (y-2)^3 - 6(y-3)^6 \cdot 3(y-2)^2$

(d) $3(x-3)^2 \cdot 2(x+1)^5 + (x-3)^2 \cdot 5(x+1)^4$

(e) $4\left(x+\frac{5}{2}\right)^3 - 2x \cdot 3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

(f) $7(x+7)^6 \cdot (3x-2)^4 + (x+7)^7 \cdot 4(3x-2)^3$

(g) $3(x-1)^2 \cdot 2 \cdot (2x+1)^3 + (x-1)^3 \cdot 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2$

(h) $2(t+4)(3-t)^2 + (t+4)^2 \cdot 2(t-3) \cdot (-1)$

(i) $2\left(x-\frac{1}{2}\right) \cdot 4(x-4)^3 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3(x-4)^2$

(j) $5(2x-1)^4 \cdot (1-x)^4 + (2x-1)^5 \cdot 4(1-x)^3 \cdot (-1)$

2.35 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{4x^3}{3y^2} \times \dfrac{3xy}{7} \div \dfrac{2x}{7}$

(b) $\dfrac{x^2-81}{x+3} \div \dfrac{x+8}{4x+12}$

(c) $\dfrac{x-3}{x} \div \dfrac{x-3}{x+3} \times \dfrac{3x}{x^2-6x+9}$

(d) $\dfrac{25}{(x+5)^4(x-5)^2} \div \dfrac{5(x+5)}{2(x-5)^4}$

(e) $\dfrac{ab+a+b+1}{a+1} \div \dfrac{b+1}{a+1}$

(f) $\dfrac{x^2-12x+36}{x+4} \times \dfrac{x^2-16}{x-6}$

(g) $\dfrac{16x^4}{7x+42} \div \dfrac{5x^2}{x+6}$

(h) $\dfrac{y^2-4y}{y-1} \div \dfrac{4}{y^2-5y+4}$

(i) $\dfrac{x^2-18x+81}{x^2-36} \times \dfrac{(x-6)^2}{(x-9)^2}$

(j) $\dfrac{x^2-8x-15}{x^3-8x^2-15x} \times \dfrac{x^2-9}{x^2-9x+18}$

2.36 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{5}{2x+1} - \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

(b) $\dfrac{1}{x^2-17x+72} + \dfrac{1}{2(x-8)}$

(c) $\dfrac{2x+3}{x^2+2x-15} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+5}$

(d) $\dfrac{x+1}{x+8} - \dfrac{x+8}{x+1}$

(e) $\dfrac{7x+6}{(x-2)^4} - \dfrac{2x}{(x-2)^3} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$

(f) $\dfrac{-5x}{(5x-4)^5} + \dfrac{4}{(5x-4)^5}$

(g) $\dfrac{x^2}{8x^2+x} - \dfrac{2x^3}{8x+1}$

(h) $\dfrac{x+4}{3x+11} - \dfrac{3x^2-9}{5x(3x+11)}$

(i) $\dfrac{-16+36x}{9x-4} - 10x$

(j) $\dfrac{20a^5}{60a^4} - \dfrac{10a^3}{60a^4} + \dfrac{10a^2}{60a^4}$

2.37 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{(2x+6)\cdot(x-1)-x(x+6)}{(x-1)^2}$

(b) $\dfrac{2x\cdot(x^2-9)-2x\cdot(x^2-4)}{(x^2-9)^2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\right)^{-3}\cdot(-2)$

(c) $4x^3\cdot(2x-5)^2+2(2x-5)\cdot 2x^4$

(d) $\dfrac{6\cdot 6x-(6x-24)\cdot 6}{(6x)^2}$

(e) $\dfrac{(2x+3)-2\cdot(x-1)}{(2x+3)^2}$

(f) $\dfrac{2x\cdot(1+x^3)-3x^2\cdot x^2}{(1+x^3)^2}$

(g) $\dfrac{3\cdot(5x-4)-5\cdot(3x-4)}{(5x-4)^2}\cdot\left(\dfrac{3x-4}{5x-4}\right)^4\cdot 5$

(h) $-3(2x-1)^{-4}\cdot(x-4)\cdot 2+(2x-1)^{-3}$

(i) $\dfrac{2\cdot(8-x)^5-5(8-x)^4\cdot(-1)\cdot 2x}{((8-x)^5)^2}$

(j) $2x\cdot(8x^3+1)^3+3(8x^3+1)^2\cdot 24x\cdot(x^2+1)$

Chapitre 3

Les équations et les inéquations

3.1 Les équations

Définition 3.1 Une **équation** est une égalité entre deux expressions mathématiques contenant une ou plusieurs variables.

Exemple 3.1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez s'il s'agit d'une équation ou non.

(a) $3 + 2 = 5$
(b) $1 - 2x$
(c) $1 - 3x^2 = y$
(d) $3x - 1 = 5$
(e) $3(x - 1) = 3x - 3$
(f) $2x + 1 = 2x + 3$

Solution :

(a) L'égalité $3 + 2 = 5$ n'est pas une équation, car elle ne contient pas de variable. Une égalité peut être vraie, comme $3 + 2 = 5$, ou elle peut être fausse, comme $3 - 2 = 0$.

(b) L'expression $1 - 2x$ n'est pas une équation, car elle ne met pas en relation deux expressions.

(c) L'égalité $1 - 3x^2 = y$ est une équation à deux variables.

(d) L'égalité $3x - 1 = 5$ est une équation et elle n'est vraie que si x se voit attribuer la valeur 2. Elle devient alors l'égalité $3 \cdot 2 - 1 = 5$, qui est vraie. Si on substitue une autre valeur à la variable, par exemple, -1, l'équation devient l'égalité $3(-1) - 1 = 5$ qui est fausse, car $-4 \neq 5$. Dans ce cas on dira que l'**équation est conditionnelle**.

(e) L'égalité $3(x - 1) = 3x - 3$ est une équation. Elle est vraie quelle que soit la valeur que l'on attribue à sa variable x. Dans ce cas, on dira que l'équation est une **identité**.

(f) L'égalité $2x+1 = 2x+3$ est une équation même si, quelle que soit la valeur que l'on attribue à sa variable x, elle est fausse. Dans ce cas, on dira que **l'équation est contradictoire**.

Définition 3.2 Le **domaine** ou l'**ensemble de référence** d'une équation est l'ensemble de toutes les valeurs qui peuvent être attribuées à ses variables, que l'égalité obtenue soit vraie ou non.

Exemple 3.2

Déterminez l'ensemble de référence de chacune des équations à une variable suivantes.

(a) $3x - 1 = 5$ (b) $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{1}{x}$ (c) $\sqrt{x-3} = 2x - 1$

Solution :

(a) L'ensemble de référence de l'équation est $\mathbb{R}$, puisque toute valeur réelle peut être substituée à la variable pour obtenir une égalité entre deux nombres réels, que cette dernière soit vraie ou non.

(b) L'ensemble de référence de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$, puisque toute valeur réelle peut être substituée à la variable sauf les valeurs 0 et 3 qui, elles, provoqueraient des divisions par 0.

(c) L'ensemble de référence de l'équation $\sqrt{x-3} = 2x-1$ est $[3; \infty[$, puisque toute valeur située à l'extérieur de cet intervalle, si elle est substituée à la variable, impliquerait une racine paire d'un nombre négatif.

Attention ! On détermine l'ensemble de référence en excluant des réels les valeurs qui, substituées à la variable, provoquerait une division par 0 ou une racine paire d'un nombre négatif.

Définition 3.3 On appelle **solution** d'une équation à une variable tout nombre réel qui, substitué à la variable, transforme l'équation en une égalité qui soit vraie. On dira alors que la solution vérifie l'équation. L'**ensemble solution** d'une équation est l'ensemble formé de toutes les solutions de l'équation.

Exemple 3.3

Déterminez si la valeur proposée est une solution de l'équation.

(a) $3x - 1 = 5$, $x = 2$ (b) $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$ (c) $\sqrt{x-3} = 2x - 1$, $x = 0$

Solution :

(a) $x = 2$ est une solution de $3x - 1 = 5$, car $3(2) - 1 = 5$.

(b) $x = 1$ n'est pas une solution de $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{1}{x}$, car

$$\left.\frac{2}{x-3}\right|_{x=1} = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

tandis que

$$\left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(c) $x = 0$ n'est pas une solution de $\sqrt{x-3} = 2x-1$, car 0 n'est pas dans l'ensemble de référence de l'équation $\sqrt{x-3} = 2x - 1$.

$$\left.\sqrt{x-3}\right|_{x=0} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}.$$

Définition 3.4 On dit que deux équations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble solution. **Résoudre** une équation consiste à trouver toutes les solutions de cette équation.

Définition 3.5 Une équation est une **identité** si son ensemble solution est égal à son ensemble de référence. Elle est **conditionnelle** si son ensemble solution est un sous-ensemble strict (sans être égal à) de son ensemble de référence et elle est **contradictoire** si elle n'a aucune solution.

C'est à l'aide des propriétés des équations suivantes qu'on résout les équations.

La résolution d'une équation
Pour résoudre une équation, il suffit de la transformer en une équation équivalente plus simple, de façon à pouvoir isoler l'inconnue. Pour la transformer, on utilise les propriétés suivantes. Dans ce qui suit, on suppose que A, B et c sont des expressions à valeurs réelles.
On obtient une équation équivalente lorsqu'on

1. additionne le même terme aux deux membres d'une équation,
$$A = B \Longleftrightarrow A + c = B + c$$
2. soustrait le même terme aux deux membres d'une équation,
$$A = B \Longleftrightarrow A - c = B - c$$
3. multiplie les deux membres d'une équation par un facteur différent de zéro,
$$A = B \Longleftrightarrow cA = cB \quad (\text{si } c \neq 0)$$
4. divise les deux membres d'une équation par un facteur différent de zéro,
$$A = B \Longleftrightarrow \frac{A}{c} = \frac{B}{c} \quad (\text{si } c \neq 0).$$

Exemple 3.4

On utilise les propriétés 1 et 2 pour éliminer un **terme**. Par exemple, avec la propriété 1 où $c = 4$,
$$\begin{aligned} x - 4 = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad x - 4 + 4 = 3 + 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 7 \end{aligned}$$
et, la propriété 2 où $c = x$,
$$\begin{aligned} 2x = 10 + x \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x - x = 10 + x - x \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 10. \end{aligned}$$
On utilise les propriétés 3 et 4 pour éliminer un **facteur**. Par exemple, avec la propriété 3 où $c = 5$,
$$\begin{aligned} \tfrac{x}{5} = 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5 \cdot \tfrac{x}{5} = 5 \cdot 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 30 \end{aligned}$$
et, avec la propriété 4 où $c = 2$,
$$\begin{aligned} 2x = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{2x}{2} = \tfrac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dans cette section, on s'intéressera particulièrement aux équations linéaires et aux équations qui se transforment en des équations linéaires.

Définition 3.6 Une **équation linéaire** en la variable x est une équation pouvant s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0$$

où a et b sont des nombres réels et où $a \neq 0$. Autrement dit, une équation linéaire est une équation polynomiale de degré 1.

Exemple 3.5

Résolvez l'équation linéaire $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{3x-5}{12} + \dfrac{1}{4}$.

Solution :

$$\begin{array}{ccll}
\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} & = & \dfrac{3x-5}{12} + \dfrac{1}{4} & \\
\dfrac{3(x+1) - 2(x-2)}{6} & = & \dfrac{(3x-5) + 3 \cdot 1}{12} & \text{on met au dénominateur commun chaque membre de l'équation} \\
\dfrac{3x+3-2x+4}{6} & = & \dfrac{3x-2}{12} & \text{on développe les numérateurs pour les réduire} \\
\dfrac{x+7}{6} & = & \dfrac{3x-2}{12} & \text{on réduit les numérateurs en regroupant les termes semblables} \\
12 \cdot \dfrac{x+7}{6} & = & 12 \cdot \dfrac{3x-2}{12} & \text{on multiplie chaque membre par 12} \\
2(x+7) & = & 3x-2 & \text{on simplifie les facteurs communs} \\
2x+14 & = & 3x-2 & \text{on développe le membre de gauche} \\
2x+16 & = & 3x & \text{on additionne 2 à chaque membre} \\
16 & = & x & \text{on soustrait } 2x \text{ à chaque membre et la réponse est maintenant évidente !}
\end{array}$$

La solution de l'équation est donc $x = 16$.

Validation. La valeur $x = 16$ est bien une solution de l'équation car, si on substitue la valeur 16 à x dans l'équation, on constate que les deux membres de l'équation sont égaux.

$$\begin{array}{rcl}
\left.\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3}\right|_{x=16} & \stackrel{?}{=} & \left.\frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}\right|_{x=16} \\
\frac{17}{2} - \frac{14}{3} & \stackrel{?}{=} & \frac{3 \cdot 16 - 5}{12} + \frac{1}{4} \\
\frac{23}{6} & \stackrel{?}{=} & \frac{43}{12} + \frac{1}{4} \\
\frac{23}{6} & \stackrel{?}{=} & \frac{46}{12}
\end{array}$$

Puisque la dernière égalité est vraie, 16 est bien une solution de l'équation.

Exemple 3.6

Faites tracer le graphe de chacun des membres de l'équation de l'exemple 3.5,

$$y = \frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4},$$

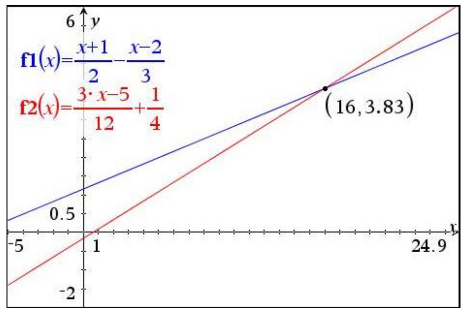
dans une même fenêtre graphique de votre calculatrice et donnez une interprétation de la solution de l'équation

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}.$$

Solution :
On fait tracer les graphes correspondant à

$$y = \frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} \quad \text{et à} \quad y = \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}$$

dans une même fenêtre de la calculatrice et on constate que les deux courbes s'intersectent au point de coordonnées (16; 3,83).



La solution de l'équation, $x = 16$, correspond à l'abscisse de ce point d'intersection.
Pour comprendre pourquoi il en est ainsi, on doit se rappeler que résoudre l'équation

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}$$

signifie chercher les valeurs de x qui font en sorte que les deux membres de l'équation,

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4},$$

sont égaux. Autrement dit, chercher la valeur x où les ordonnées, y, coïncident. C'est bien le cas en $x = 16$ car si on substitue la valeur 16 à x dans l'équation, on constate que les deux membres de l'équation sont égaux

$$\left.\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3}\right|_{x=16} = \frac{17}{2} - \frac{14}{3} = \frac{23}{6} \approx 3{,}83$$

et

$$\left.\frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}\right|_{x=16} = \frac{43}{12} + \frac{1}{4} = \frac{23}{6} \approx 3{,}83.$$

Il s'agit donc d'une façon graphique de vérifier une solution.

Parfois une équation non linéaire se transforme en une ou plusieurs équations linéaires. Dans le cas d'équations rationnelles, il faudra s'assurer que les solutions trouvées sont bien dans l'ensemble de référence (le domaine) de l'équation de départ.

Exemple 3.7
Résolvez les équations rationnelles suivantes.

(a) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2-4x} = \dfrac{5}{x-4}$

(b) $\dfrac{16}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{6}{x+3}$

Solution :

(a) Le domaine de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2-4x} & = & \frac{5}{x-4} & \\
\frac{3}{x} + \frac{2}{x(x-4)} & = & \frac{5}{x-4} & \text{on factorise les dénominateurs} \\
\frac{3(x-4)}{x(x-4)} + \frac{2}{x(x-4)} & = & \frac{5x}{x(x-4)} & \text{on met au dénominateur commun} \\
\frac{3(x-4)+2}{x(x-4)} & = & \frac{5x}{x(x-4)} & \text{on additionne les fractions} \\
\cancel{x(x-4)} \cdot \frac{3(x-4)+2}{\cancel{x(x-4)}} & = & \cancel{x(x-4)} \cdot \frac{5x}{\cancel{x(x-4)}} & \text{on multiplie chaque membre de l'équation} \\
 & & & \text{par } x(x-4) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } x \neq 4 \\
3(x-4)+2 & = & 5x & \text{on simplifie les facteurs communs} \\
3x-10 & = & 5x & \text{on réduit} \\
-10 & = & 2x & \text{on soustrait } 3x \text{ à chaque membre} \\
-5 & = & x & \text{on divise chaque membre par 2}
\end{array}$$

La valeur trouvée appartient au domaine de l'équation. La solution de l'équation est donc $x = -5$.

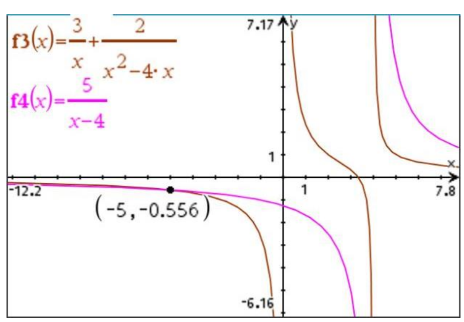
Validation. On vérifie la réponse en la substituant dans l'équation de départ.

$$\begin{array}{rcl}
\left.\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2-4x}\right|_{x=-5} & \stackrel{?}{=} & \left.\frac{5}{x-4}\right|_{x=-5} \\
\frac{3}{-5} + \frac{2}{45} & \stackrel{?}{=} & \frac{5}{-9} \\
-\frac{25}{45} & \stackrel{?}{=} & -\frac{5}{9} \\
-\frac{5}{9} & = & -\frac{5}{9}
\end{array}$$

Puisque l'équation est vraie, $x = -5$ est bien une solution. Elle correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes d'équations

$$y = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2-4x} \text{ et } y = \frac{5}{x-4}.$$

C'est donc en cette valeur que les deux membres de l'équation (les ordonnées) sont égaux.

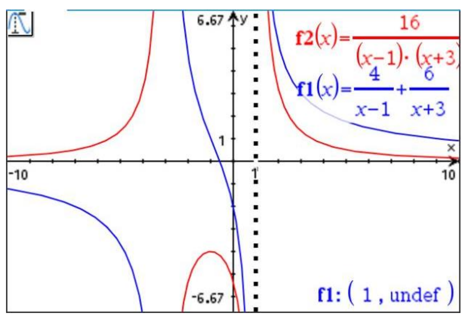


(b) Le domaine de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

$\frac{4}{x-1} + \frac{6}{x+3} = \frac{16}{(x-1)(x+3)}$	
$\frac{4(x+3)+6(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{16}{(x-1)(x+3)}$	on met au dénominateur commun le membre de gauche
$4(x+3)+6(x-1) = 16$	on multiplie chaque membre de l'équation par $(x-1)(x+3)$, pour $x \neq 1$ et $x \neq -3$, et on simplifie les facteurs communs
$4x+12+6x-6 = 16$	on développe
$10x+6 = 16$	on réduit en regroupant les termes semblables
$10x = 10$	on soustrait 6 à chaque membre de l'équation
$x = 1$	on divise chaque membre par 10

Attention ! La valeur x trouvée ne fait pas partie du domaine de l'équation. L'équation ne possède donc aucune solution.

Puisque l'équation ne possède aucune solution, les courbes n'auront aucune intersection. *Validation.* On fait tracer les graphes dans une même fenêtre de la calculatrice pour vérifier que la valeur $x = 1$ n'est effectivement pas une solution.



La résolution d'une équation polynomiale par factorisation

1. Si nécessaire, réécrivez l'équation sous la forme $p(x) = 0$.
2. Factorisez le polynôme $p(x)$.
3. Utilisez la règle du produit nul, fixant chacun des facteurs à zéro.
4. Résolvez les équations linéaires de l'étape 3.
5. Vérifiez vos solutions algébriquement ou validez graphiquement.

Exemple 3.8

Résolvez les équations suivantes par factorisation.

(a) $x^2 = 7x - 6$

(b) $3x^2 + 9 = 12x - x^2$

(c) $x^3 + 3x^2 = 10x$

(d) $2(x+1)(2x-3)^2+(x+1)^2 \cdot 2 \cdot (2x-3) \cdot 2 = 0$

Solution :

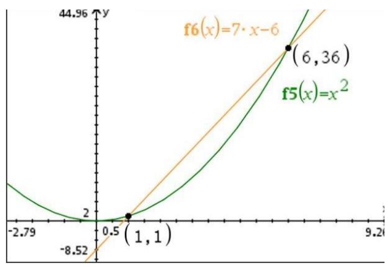
(a) On écrit d'abord l'équation sous la forme $p(x) = 0$, $x^2 = 7x - 6 \Longleftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$.

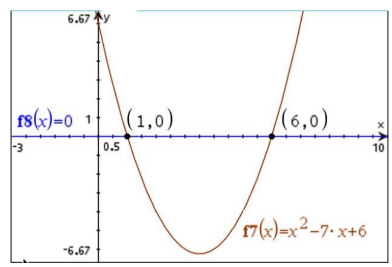
$$\begin{array}{rcll} x^2 - 7x + 6 & = & 0 & \\ (x-1)(x-6) & = & 0 & \text{on factorise le polynôme} \\ x - 1 = 0 & \text{ou} & x - 6 = 0 & \text{on utilise la règle du produit nul} \\ x = 1 & \text{ou} & x = 6 & \text{on résout les équations linéaires} \end{array}$$

Validation. On substitue les valeurs dans l'équation de départ et on vérifie que toutes les équations sont vraies.

$$\begin{array}{rclcrcl} 1^2 & \stackrel{?}{=} & 7(1) - 6 & \Longleftrightarrow & 1 & = & 1 \\ 6^2 & \stackrel{?}{=} & 7(6) - 6 & \Longleftrightarrow & 36 & = & 36 \end{array}$$

En faisant tracer les graphes correspondant à $y = x^2$ et $y = 7x - 6$, on constate que les valeurs trouvées sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.





Par ailleurs, on remarque que les abscisses des points d'intersection des courbes $y = x^2$ et $y = 7x - 6$ sont identiques aux zéros de la courbe $y = x^2 - 7x - 6$.

(b) $3x^2 + 9 = 12x - x^2 \Longleftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\begin{array}{rcll} 4x^2 - 12x + 9 & = & 0 & \\ (2x-3)^2 & = & 0 & \text{on factorise le polynôme} \\ 2x - 3 & = & 0 & \text{on utilise la règle du produit nul} \\ x & = & \frac{3}{2} & \text{on résout l'équation linéaire} \end{array}$$

Validation. En substituant la valeur dans l'équation de départ, on vérifie que l'égalité est vraie.

$$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \stackrel{?}{=} 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{63}{4} = \frac{63}{4}$$

On peut faire tracer les courbes $y = 3x^2 + 9$ et $y = 12x - x^2$ pour vérifier que la solution trouvée correspond bien à l'abscisse du point d'intersection de ces courbes. *Faites-le.*

(c) $x^3 + 3x^2 = 10x \Longleftrightarrow x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

$$\begin{array}{rcll} x^3 + 3x^2 - 10x & = & 0 & \\ x(x^2 + 3x - 10) & = & 0 & \text{on met en évidence } x \\ x(x-2)(x+5) & = & 0 & \text{on factorise complètement le polynôme} \\ \multicolumn{3}{c}{x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0} & \text{on utilise la règle du produit nul} \\ \multicolumn{3}{c}{x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -5} & \text{on résout les équations linéaires} \end{array}$$

Validation. On constate que toutes les égalités sont respectées lorsqu'on substitue les valeurs trouvées dans l'équation de départ.

$$\begin{array}{rcllrcl} 0^3+3\cdot 0^2 & \stackrel{?}{=} & 10\cdot 0 & \iff & 0 & = & 0 \\ 2^3+3\cdot 2^2 & \stackrel{?}{=} & 10\cdot 2 & \iff & 20 & = & 20 \\ (-5)^3+3\cdot(-5)^2 & \stackrel{?}{=} & 10(-5) & \iff & -50 & = & -50 \end{array}$$

On peut aussi valider graphiquement. *Faites-le.*

(d) Il est intéressant de mentionner que $p(x) = 2(x+1)(2x-3)^2 + (x+1)^2 \cdot 2 \cdot (2x-3) \cdot 2$ est la dérivée de la fonction $f(x) = (x+1)^2(2x-3)^2$. Trouver les zéros de la dérivée d'une fonction s'avère très utile, car cela permet de déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction f atteint un minimum ou un maximum.

$$\begin{array}{rcll} 2(x+1)(2x-3)^2+(x+1)^2\cdot 2\cdot(2x-3)\cdot 2 & = & 0 & \\ 2\cdot(x+1)(2x-3)\left[2x-3+(x+1)\cdot 2\right] & = & 0 & \text{on met en évidence } 2\cdot(x+1)(2x-3) \\ 2\cdot(x+1)(2x-3)[2x-3+2x+2] & = & 0 & \text{on développe} \\ 2\cdot(x+1)(2x-3)(4x-1) & = & 0 & \text{on regroupe les termes semblables} \\ x+1=0 \text{ ou } 2x-3=0 \text{ ou } 4x-1=0 & & & \text{on utilise la règle du produit nul} \\ x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{1}{4} & & & \text{on résout les équations linéaires} \end{array}$$

Validation. Faites-la.

Exemple 3.9

Résolvez chacune des équations suivantes à l'aide du solveur de votre calculatrice. Pour chacune, donnez la réponse de la calculatrice suivie de l'ensemble solution de l'équation. Donnez aussi une interprétation graphique des éléments de l'ensemble solution.

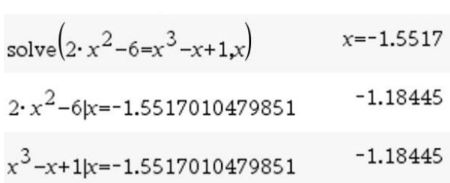
(a) $2x^2 - 6 = x^3 - x + 1$

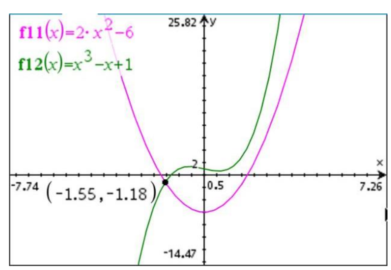
(b) $3(x-5) + 3x = 6x - 3$

(c) $3x^2 - 1 = \dfrac{3x^3 + 6x^2 - x - 2}{x+2}$

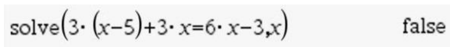
Solution :

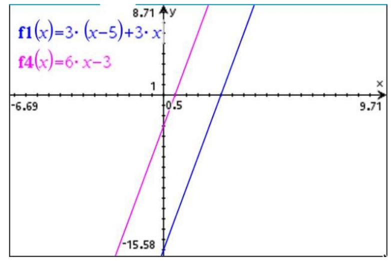
(a) La réponse de la calculatrice est $x = -1.5517$. Puisque cette valeur appartient à l'ensemble de référence de l'équation ($\mathbb{R}$), l'ensemble solution est $\{-1{,}5517\}$. La solution correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes $y = 2x^2 - 6$ et $y = x^3 - x + 1$. On remarque que c'est en cette valeur que les deux membres de l'équation (les ordonnées y) sont égaux.





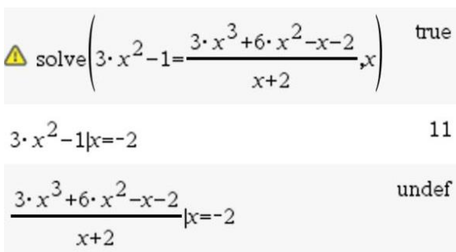
(b) La calculatrice répond `false`. L'équation est contradictoire, elle n'a aucune solution. Les courbes $y = 3(x-5) + 3x$ et $y = 6x - 3$ ne se croisent pas, elles sont parallèles.

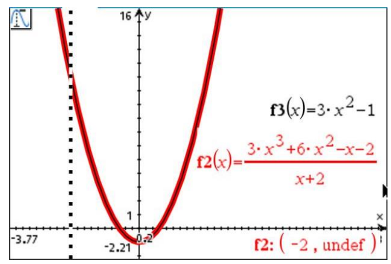




(c) La réponse de la calculatrice est `true`. Cette équation est donc une identité. Toutes les valeurs de son ensemble de référence sont des solutions de l'équation. Ainsi, $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est l'ensemble solution et les deux courbes sont superposées.

Attention ! $y = \frac{3x^3+6x^2-x-2}{x+2}$ n'est pas définie en $x = -2$ tandis que $y = 3x^2 - 1$ l'est et vaut 11. La courbe $y = \frac{3x^3+6x^2-x-2}{x+2}$ a donc un trou en $(-2; 11)$.





Il est souvent utile de résoudre une équation pour une variable.

Exemple 3.10

Résolvez chacune des équations suivantes pour la variable indiquée.

(a) $PV = nRT$, pour T

(b) $I = \dfrac{nE}{R+nr}$, pour r

(c) $y = \dfrac{5x+2}{1-3x}$, pour x

(d) $2xy + x^2y' = y^2 + 2yy'$, pour y'

Solution :

(a) On utilise les propriétés des équations pour isoler T.

$$\begin{array}{rcll} PV & = & nRT & \\ \dfrac{PV}{nR} & = & \dfrac{nRT}{nR} & \text{on divise chaque membre de l'équation par } nR \\ \dfrac{PV}{nR} & = & T & \text{on simplifie les facteurs communs} \end{array}$$

Ainsi $T = \dfrac{PV}{nR}$.

(b) L'équation est définie pour $R + nr \neq 0$, ce qui implique que $r \neq -\frac{R}{n}$. Sous cette restriction, on transforme l'équation rationnelle en une équation linéaire. On isole ensuite r.

I	$=$	$\dfrac{nE}{R+nr}$	
$(R+nr)\cdot I$	$=$	$(R+nr)\cdot\dfrac{nE}{R+nr}$	on multiplie chaque membre de l'équation par $(R+nr)$
$(R+nr)\cdot I$	$=$	nE	on simplifie les facteurs $(R+nr)$ dans le membre de droite
$RI+nrI$	$=$	nE	on développe
nrI	$=$	$nE-RI$	on soustrait RI à chaque membre de l'équation
$\dfrac{nrI}{nI}$	$=$	$\dfrac{(nE-RI)}{nI}$	on divise par nI chaque membre de l'équation
r	$=$	$\dfrac{nE-RI}{nI}$	on simplifie les facteurs communs

(c) L'équation est définie pour $1-3x\neq 0$, c'est-à-dire pour $x\neq\frac{1}{3}$. Sous cette restriction, on transforme d'abord l'équation rationnelle en une équation linéaire. On rassemble ensuite les termes contenant x d'un côté de l'égalité et ceux n'en contenant pas, de l'autre, puis on isole x.

y	$=$	$\dfrac{5x+2}{1-3x}$	
$(1-3x)\cdot y$	$=$	$(1-3x)\cdot\dfrac{5x+2}{1-3x}$	on multiplie chaque membre de l'équation par $(1-3x)$
$(1-3x)\cdot y$	$=$	$5x+2$	on simplifie les facteurs $(1-3x)$ dans le membre de droite
$y-3xy$	$=$	$5x+2$	on développe
$-3xy-5x$	$=$	$2-y$	on soustrait $5x$ et y à chaque membre de l'équation
$x\cdot(-3y-5)$	$=$	$2-y$	on met x en évidence
x	$=$	$\dfrac{2-y}{-3y-5}$	on divise chaque membre de l'équation par $(-3y-5)$ et on simplifie
x	$=$	$\dfrac{-(-2+y)}{-(3y+5)}$	on met -1 en évidence au numérateur et dénominateur
x	$=$	$\dfrac{y-2}{3y+5}$	on simplifie les facteurs -1

(d) Il faut rassembler les termes contenant y' d'un côté de l'égalité et ceux n'en contenant pas, de l'autre, puis isoler y'.

$2xy+x^2y'$	$=$	y^2+2yy'	
$x^2y'-2yy'$	$=$	y^2-2xy	on additionne $-2xy$ et $-2yy'$ à chaque membre de l'équation
$(x^2-2y)\cdot y'$	$=$	y^2-2xy	on met y' en évidence
y'	$=$	$\dfrac{y^2-2xy}{x^2-2y}$	on divise chaque membre de l'équation par (x^2-2y) et on simplifie

Attention ! On peut résoudre une *équation* comme $5(x-3) = 2x$ pour une variable

$$5(x-3) = 2x \iff 5x - 15 = 2x \iff 3x = 15 \iff x = 5$$

mais on ne peut pas résoudre une *expression* comme $5(x-3)$ pour une variable.
Argument erroné :

Simplifiez $5(x-3)$.

$$\begin{aligned} 5(x-3) &= 0 \\ 5x - 15 &= 0 \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Argument correct :

Simplifiez $5(x-3)$.

$$5(x-3) = 5x - 15$$

Bref, on **résout des équations** et on **simplifie des expressions**.

Exercices

3.1 Sans résoudre l'équation, dites si la valeur proposée en est une solution.

(a) $\dfrac{3x-1}{2} = 5x - \dfrac{1}{2}$, $x = 0$ (b) $x^3 = 2x^2$, $x = -2$ (c) $\sqrt{x-3} = 5x$, $x = 2$

3.2 Résolvez chacune des équations suivantes et préciser s'il s'agit d'une identité, d'une équation conditionnelle ou d'une équation contradictoire.

(a) $7 = x$
(b) $5x - 1 = 3$
(c) $(x+1)^2 = x^2 + 1$
(d) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
(e) $3(x-1) = 3x - 3$
(f) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 10$

Utilisez ensuite le solveur de votre calculatrice pour résoudre les équations. Que répond la calculatrice lorsqu'il s'agit d'une identité ? Que répond-elle lorsqu'il s'agit d'une équation contradictoire ?

3.3 Tracez le graphe de chacun des membres de l'équation dans une même fenêtre graphique afin de déterminer s'il s'agit d'une équation conditionnelle, une identité ou d'une équation contradictoire.

(a) $\frac{3+x}{3} = x$
(b) $5(x+1) = 5x + 5$
(c) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
(d) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 15$

3.4 Résolvez chacune des équations suivantes. Vérifiez votre réponse en substituant la valeur obtenue dans l'équation de départ et, ensuite, à l'aide du solveur de votre calculatrice. Finalement, faites tracer le graphe de chacun des membres de l'équation dans une même fenêtre de votre calculatrice et donnez une interprétation graphique de la solution obtenue.

(a) $4 - 2x = 1$ (b) $2(x-3) - 17 = 13 - 3(x+2)$

(c) $25 - [2 + 5y - 3(y+2)] = -3(2y+5) - (5(y-1) - 3y + 3)$

(d) $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{x}{5} - \dfrac{39}{5}$

(e) $\dfrac{3x}{5} - x = \dfrac{x}{10} - \dfrac{5}{2}$

(f) $\dfrac{x+1}{3} = 5 - \dfrac{x+2}{7}$

(g) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{2x}$

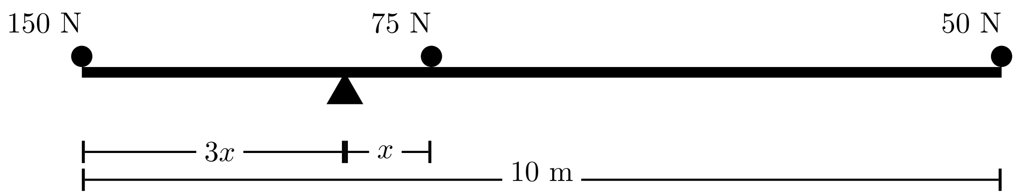
(h) $\dfrac{3}{x+3} = \dfrac{5}{2x+6} + \dfrac{1}{x-2}$

(i) $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{7}{(x+5)\,(x+2)}$

3.5 Résolvez l'équation

$$150(3x) = 75x + 50(10 - 3x)$$

pour trouver les distances x, $3x$ et $10 - 3x$ qui font en sorte que les poids sont en équilibre sur la barre horizontale illustrée à la figure ci-dessous.



3.6 Résolvez chacune des équations polynomiales suivantes par factorisation, en utilisant la règle du produit nul. Faites tracer le graphe de chacun des membres de l'équation dans une même fenêtre graphique de votre calculatrice pour valider vos réponses.

(a) $3x^4 = 27x^2$

(b) $x^3 - 9x = 0$

(c) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0$

(d) $3t^4 = 24t$

(e) $y^2 + 12y + 15 = y^2 + 2y - 10$

(f) $(x+1)(x-2) = 3x - 2$

3.7 Résolvez chacune des équations suivantes à l'aide du solveur de votre calculatrice. Pour chacune, donnez la réponse de la calculatrice suivi de l'ensemble solution de l'équation. Donnez aussi une interprétation graphique des éléments de l'ensemble solution.

(a) $2x - 5 = x^3 - 2x + 1$

(b) $2x^2 + 1 = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x - 2}$

(c) $5x^2 = 5(x-1)^2 + 10x$

3.8 Résolvez l'équation pour la variable indiquée.

(a) $S = \dfrac{C}{1-r}$ pour C

(b) $A = \dfrac{1}{2}h(B+b)$ pour h

(c) $V = C - \dfrac{C-S}{L}N$ pour L

(d) $y = \dfrac{2x-1}{4+3x}$ pour x

(e) $I = \dfrac{nE}{R+nr}$ pour R

(f) $2xy^3 + x^2 3yy' = 4$ pour y'

(g) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 4y' - 1$ pour y'

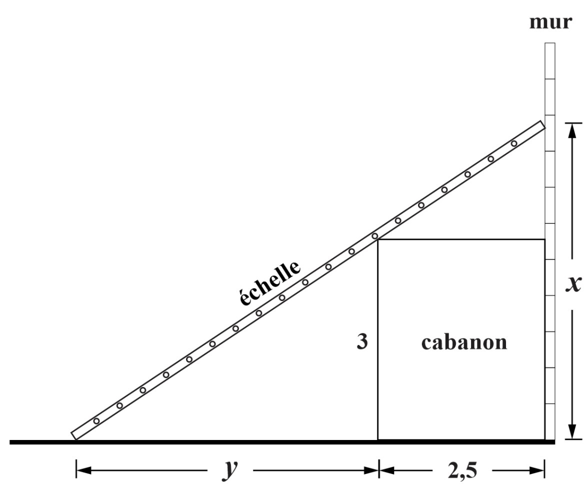
3.9 La moitié de la somme de deux nombres est 35. Écrivez leur produit P en fonction d'un seul des deux nombres.

3.10 Il a fallu A cm^2 d'aluminium pour fabriquer une boîte de conserve cylindrique fermée à ses deux extrémités. Si le rayon de la boîte de conserve est de r cm, quelle est sa hauteur en fonction de A et de r ?

3.11 Le volume d'une boîte à base carrée, sans couvercle, est de 25 600 cm^3. Écrivez l'aire A de cette boîte en fonction uniquement de la mesure c du côté de sa base.

3.12 Un cabanon de 2,5 m de largeur et de 3 m de hauteur est attenant à une maison. On veut y appuyer une échelle pour atteindre le mur de la maison. Le haut de l'échelle touche le mur de la maison à une hauteur x du sol et le pied de l'échelle est posé à une distance y du cabanon. Exprimez la longueur L de l'échelle uniquement en fonction de x.

Rappel. Des triangles semblables ont des côtés correspondants proportionnels.



3.2 Les problèmes narratifs

Le tableau suivant résume la démarche à suivre pour poser en équations les problèmes narratifs abordés dans ce cours. Il sera aussi utile dans les sections subséquentes pour les inéquations et les systèmes d'équations.

La meilleure façon d'apprendre à résoudre des problèmes narratifs est de lire des exemples et d'en faire beaucoup !

TABLEAU 3.1 – Marche à suivre pour aborder un problème narratif

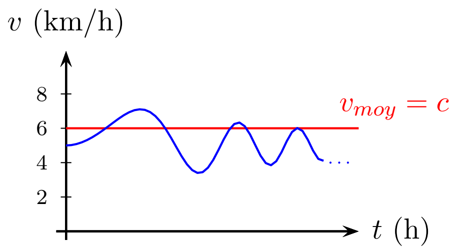
Étape	Quoi faire
1. Lire l'énoncé	• Encadrer la ou les questions. • Surligner les mots clés et les indicateurs de relations.
2. Débroussailler	Relire et synthétiser schématiquement (à l'aide d'un croquis, d'un diagramme, etc.). • Qu'est-ce qu'on a ? (incluant les contraintes) • Qu'est-ce qu'on veut ? Faire ressortir une relation (début de la construction de l'équation).
3. Traduire en langage mathématique	Définir clairement ses variables et poser une équation qui décrit la relation. Il y a peut-être une formule connue utile. Utiliser les contraintes du problème pour réduire le nombre de variables de la relation et obtenir, si possible, une relation à une seule variable. Vérifier que les unités sont compatibles.
4. Résoudre	Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système d'équations.
5. Compléter les informations	Calculer les informations manquantes (habituellement, ceci se fait à l'aide des contraintes).
6. Valider	Valider la réponse à la lumière des informations de l'énoncé. Est-ce que les valeurs trouvées ont du sens dans le contexte ? Sont-elles plausibles ?
7. Relire l'énoncé et répondre à la ou les questions	

Exemple 3.11

Un skieur de fond passe par un certain endroit en filant à une vitesse constante de 5 km/h. Une dameuse, qui trace les pistes, passe par le même endroit 40 minutes plus tard et suit les traces du skieur. Quelle est la vitesse de la dameuse si elle rattrape le skieur en 35 minutes ?

Commentaires au sujet des hypothèses de modélisation.

Dans les problèmes narratifs de ce type, plusieurs hypothèses sont faites afin de simplifier le problème. On veut s'initier à la mise en équation et résoudre des problèmes à l'aide des outils qui sont à notre portée. On suppose donc ici, par exemple, que le skieur file à vitesse constante. On peut s'imaginer qu'elle correspond à la vitesse moyenne du skieur sur son parcours. On fait de même pour la vitesse de la dameuse.



Solution :

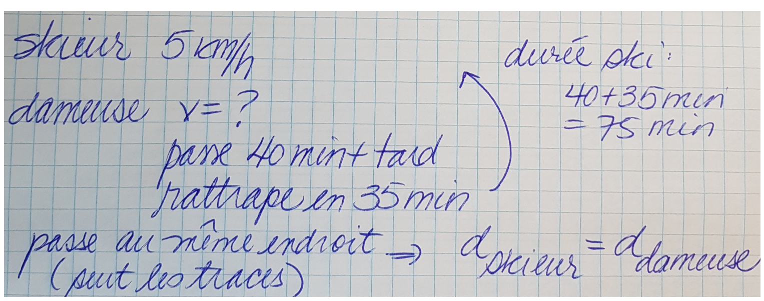
Étape 1. Lire l'énoncé

On lit l'énoncé, on surligne les indicateurs de relations et on encadre la question. On prête une attention particulière aux mots qui suggèrent une égalité.

> Un skieur de fond passe par un certain endroit filant à une vitesse constante de 5 km/h. Une dameuse, qui trace les pistes, passe par le même endroit 40 minutes plus tard et suit les traces du skieur. Quelle est la vitesse de la dameuse si elle rattrape le skieur en 35 minutes ?

Étape 2. Débroussailler

On relit la question et on synthétise les informations. À cette étape, on utilise un langage hybride français-mathématiques.



La relation est obtenue du fait que les distances parcourues par le skieur et la dameuse sont égales.

$$d_{skieur} = d_{dameuse}$$

Étape 3. Traduire en langage mathématique

On formalise les informations qui ont été colligées à l'étape 2 en définissant d'abord le rôle de nos variables.

— d représente la distance parcourue
— v représente la vitesse
— t représente le temps de parcours

La relation qui existe entre la vitesse v (moyenne) d'un objet qui parcourt une distance d en un temps t est $v = \frac{d}{t}$. On en déduit, en résolvant cette équation pour d, que $d = v \cdot t$.

On code les informations colligées à l'étape 2 à l'aide des variables qu'on a définies et la formule pour la distance ci-dessus. On utilise une notation qui aidera à suivre notre pensée. On en profite pour s'assurer de la cohérence des unités.

$$\begin{aligned} d_{skieur} &= v_{skieur} \cdot t_{skieur} \\ &= (5 \text{ km/h}) \cdot (75 \text{ min}) \\ &= (5 \text{ km/h}) \cdot (\tfrac{75}{60} \text{ h}) \\ &= \tfrac{75}{12} \text{ km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{dameuse} &= v_{dameuse} \cdot t_{parcours} \\ &= (v \text{ km/h}) \cdot (35 \text{ min}) \\ &= (v \text{ km/h}) \cdot (\tfrac{35}{60} \text{ h}) \\ &= \tfrac{7v}{12} \text{ km} \end{aligned}$$

Si v désigne la vitesse de la dameuse, puisque $d_{skieur} = d_{dameuse}$, on doit résoudre l'équation suivante pour v.

$$\frac{75}{12} = \frac{7v}{12}$$

Étape 4. Résoudre

$$\frac{75}{12} = \frac{7v}{12} \iff v = \frac{12}{7} \cdot \frac{75}{12} = \frac{75}{7} \approx 10{,}7 \text{ km/h}$$

Étape 5. Compléter les informations

Aucune autre information n'est demandée.

Étape 6. Valider

On peut vérifier par calcul que $v = \frac{75}{7}$ est bien solution de l'équation $\frac{7v}{12} = \frac{75}{12}$:

$$\left.\frac{7v}{12}\right|_{v=\frac{75}{7}} = \frac{75}{12}$$

et une vitesse de $v = \frac{75}{7} \approx 10{,}7$ km/h ne semble pas excessive dans le contexte. Plus la dameuse travaille lentement, mieux les pistes seront tracées !

Étape 7. Relire l'énoncé et répondre à la ou les questions

$$\boxed{\text{La vitesse de la dameuse est donc d'environ 11 km/h.}}$$

Exemple 3.12

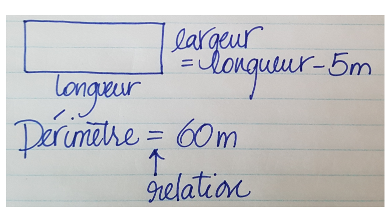
Trouvez les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est de 60 m et dont la longueur mesure 5 mètres de moins que sa largeur.

Solution :

Étape 1. Lire l'énoncé

> Trouvez $\boxed{\text{l'aire d'un rectangle}}$ dont le périmètre est de 60 m et dont la longueur mesure 5 mètres de moins que sa largeur.

Étape 2. Débroussailler



Étape 3. Traduire en langage mathématique
On pose $x =$ la largeur du rectangle (en m) et $y =$ sa longueur (en m).
La relation est donc $60 = 2x + 2y$ sachant qu'il y a comme contrainte $y = x - 5$.
Par substitution, la relation devient $60 = 2x + 2(x - 5)$
Étape 4. Résoudre

$$\begin{aligned} 60 = 2x + 2(x-5) &\iff 60 = 2x + 2x - 10 \\ &\iff 70 = 4x \\ &\iff x = \tfrac{70}{4} = \tfrac{35}{2} = 17{,}5 \end{aligned}$$

Étape 5. Compléter les informations
Pour avoir les dimensions du rectangle, on calcule la longueur du rectangle à l'aide de la contrainte $y = x - 5|_{x=17{,}5} = 12{,}5$ m.
Ainsi, $x = 17{,}5$ m et $y = 12{,}5$ m.
Étape 6. Valider
La contrainte $y = x - 5$ est bien satisfaite puisque $17{,}5 - 5 = 12{,}5$ et le périmètre est bien 60 m puisque $2 \cdot 17{,}5 + 2 \cdot 12{,}5 = 60$.
Étape 7. Relire l'énoncé et répondre à la question

$$\boxed{\text{Les dimensions du rectangle sont 17,5 m par 12,5 m.}}$$

Exemple 3.13
Un chimiste doit mélanger une solution acide à 15 % avec une solution acide à 42 % afin d'obtenir 10 litres d'une solution à 33 %. Quels volumes de chacune des solutions doit-il mélanger afin d'obtenir la solution voulue ?

Solution :
Étape 1.

Un chimiste doit mélanger une solution acide à 15 % avec une solution acide à 42 % afin d'obtenir 10 litres d'une solution à 33 %. Combien de litres de chacune des solutions doit-il mélanger afin d'obtenir la solution voulue ?

Étape 2. La relation est obtenue du fait que la combinaison des deux solutions doit donner 10 L d'une solution à 33 %. Ainsi,

volume total (L)	10 L	=	volume de la sol. à 15%	+	volume de la sol. à 42%
quantité d'acide (L)	$0{,}33 \cdot 10$	=	0,15·vol. de la sol. à 15%	+	0,42·vol. de la sol. à 42%

Étape 3. On formalise les informations colligées à l'étape 2 en définissant nos variables.
— x (en litres) représente le volume de la solution à 15 % utilisé dans le mélange.
— y (en litres) représente le volume de la solution à 42 % utilisé dans le mélange.

volume total (L)	10	=	x	+	y	contrainte
quantité d'acide (L)	$0{,}33 \cdot 10$	=	$0{,}15x$	+	$0{,}42y$	équation

L'équation à résoudre est donc $3{,}3 = 0{,}15x + 0{,}42y$ sachant que $x + y = 10$.
On réduit le nombre de variables de l'équation en résolvant la contrainte pour y

$$y = 10 - x$$

et on substitue dans l'équation

$$3{,}3 = 0{,}15x + 0{,}42(10 - x)$$

Étape 4. On résout l'équation.

$$\begin{aligned} 3{,}3 = 0{,}15x + 0{,}42(10 - x) &\iff 330 = 15x + 42(10 - x) \\ &\iff 330 = 15x + 420 - 42x \\ &\iff 0 = 90 - 27x \\ &\iff 27x = 90 \\ &\iff x = \frac{10}{3} = 3{,}\overline{3} \end{aligned}$$

Étape 5. On complète les informations.
Puisque $x = \frac{10}{3}$, on calcule $y = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3} = 6{,}\overline{6}$.
Étape 6. On valide.
A-t-on bien 10 L de solution ? Oui, car $x + y = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} = \frac{30}{3} = 10$.
A-t-on bien la concentration voulue ? Oui, car $0{,}15 \cdot \frac{10}{3} + 0{,}42 \cdot \frac{20}{3} = 0{,}5 + 2{,}8 = 3{,}3$.
Étape 7. On relit la question et on y répond.

$$\boxed{\text{Il doit donc mélanger } 3{,}\overline{3} \text{ L de la solution à } 15\% \text{ et } 6{,}\overline{6} \text{ L de la solution à } 42\%}$$

Exemple 3.14

Une pompe prend 3 heures de moins qu'une autre pour remplir un réservoir. Utilisées ensemble, les deux pompes peuvent remplir le réservoir en 2 heures. Combien de temps faut-il à chaque pompe pour remplir le réservoir, si elle est utilisée seule ?

Solution :

Étape 1.

> Une pompe prend 3 heures de moins qu'une autre pour remplir un réservoir. Utilisées ensemble, les deux pompes peuvent remplir le réservoir en 2 heures. $\boxed{\text{Combien de temps faut-il à chaque pompe pour remplir le réservoir}}$, si elle est utilisée seule ?

Étape 2. Dans ce genre de problème, où plusieurs acteurs contribuent à l'achèvement d'une tâche en un certain temps, un bonne stratégie est de déterminer la portion du travail qui sera accomplie par chacun en une heure.

	Pompe 1	Pompe 2	Pompes ensembles
Temps pour remplir le réservoir	t_{pompe_1} h	$t_{pompe_1} + 3$ h	2 h
Fraction du réservoir remplie en 1 h	$\frac{1}{t_{pompe_1}}$	$\frac{1}{t_{pompe_1}+3}$	$\frac{1}{2}$

En une heure :

Fraction remplie par pompe 1 + Fraction remplie par pompe 2 = Fraction remplie par les deux pompes.

Étape 3. On définit la variable et on écrit l'équation.
On pose t le temps pris par la pompe 1 pour remplir seule le réservoir (en h).

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+3} = \frac{1}{2}$$

Étape 4 On résout l'équation.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} + \frac{1}{t+3} = \frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{t+3+t}{t(t+3)} = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2t+3}{t(t+3)} = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2(2t+3) = t(t+3) \\
&\Longleftrightarrow \quad 4t+6 = t^2+3t \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = t^2+3t-4t-6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = t^2-t-6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = (t+2)(t-3) \\
&\Longleftrightarrow \quad (t+2) = 0 \quad \text{ou} \quad (t-3) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad t = -2 \text{ (à rejeter)} \quad \text{ou} \quad t = 3
\end{aligned}$$

Étape 5. On complète les informations.
Si $t = 3$, alors $t + 3 = 6$.
Étape 6. On valide.
On peut vérifier que les deux pompes remplissent la moitié du réservoir en une heure.

$$\left.\frac{1}{t} + \frac{1}{t+3}\right|_{t=3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Étape 7. On lit la question et on y répond.

$$\boxed{\text{Il faut 3 h à la première pompe pour remplir seule le réservoir et 6 h à l'autre.}}$$

Exercices

3.13 En 1970, l'URSS entreprit de creuser un puits dans la croûte terrestre de la péninsule de Kola. En 24 ans de forage, le puits a été creusé à plus de 12 km de profondeur.

Les ingénieurs qui dirigeaient le projet ont constaté qu'à partir d'une profondeur de 3 km, la température T dans le puits semblait augmenter d'environ 0,8 °C à tous les 100 mètres.

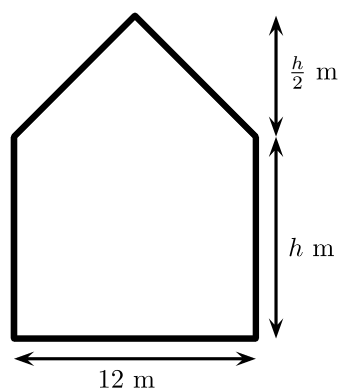
(a) Si la température à 3 km de profondeur est de 30 °C et x est la profondeur en km, donnez l'équation de la température T en fonction de x pour une profondeur de plus de 3 km.

(b) À l'aide de l'équation obtenue en (a), estimez la profondeur à laquelle la température atteindrait 40 °C.

(c) La température observée à 12 km de profondeur a surpris les experts puisqu'elle était de 180 °C. Que prédisait l'équation trouvée en (a) ?

3.14 Une chimiste doit préparer une solution d'alcool à 20% en diluant 300 mL d'une solution à 30%. Quel volume d'eau doit-elle ajouter ?

3.15 Un réservoir est formé d'un cylindre droit de 12 mètres de diamètre surmonté d'un toit en forme de cône. Une coupe latérale est illustrée à la figure ci-dessous. La hauteur du toit est la moitié de la hauteur du cylindre et le volume total du réservoir est 1000 m^3. Quelle est la hauteur de la partie cylindrique du réservoir ?



3.16 À 16 h, deux cyclistes se dirigent l'un vers l'autre à partir de deux endroits distants de 50 km. Si leurs vitesses moyennes respectives sont 18 km/h et 22 km/h, à quelle heure se rencontreront-ils ?

3.17 Un bateau parcourt une certaine distance en 25 minutes à contre-courant. Sa vitesse propre, c'est-à-dire sans l'effet du courant, est de 30 km/h. Le trajet de retour lui prend 18 minutes. Quelle est la vitesse du courant ?

3.18 Lorsque sa fille Mathilde l'a nargué (elle l'a traité de vieux) parce qu'il en avait trois fois l'âge, Gérard a réagi en répondant : « Ah, mais dans 12 ans je n'aurai que deux fois ton âge. »

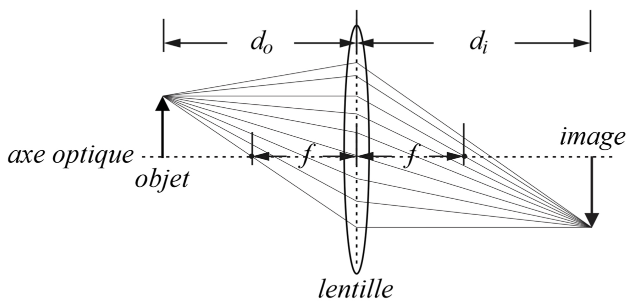
Quel âge a-t-il lorsqu'il lui répond ainsi ? Quel âge a Matilde à ce moment là ?

3.19 Durant une période de promotion, une entreprise a trouvé que son site Internet était visité autant de fois le premier jour que pendant les deuxième et troisième journées réunies. La première journée, le site a été visité 4 fois plus que pendant la troisième journée. La deuxième journée, il a été visité 4000 fois de plus que la troisième journée. Déterminez combien de fois le site a été visité le premier jour, le deuxième jour et le troisième jour.

3.20 Un tremblement de terre émet des ondes primaires d'une vitesse de 8 km/s et des ondes secondaires d'une vitesse de 5 km/s. À quelle distance de l'épicentre se trouve la station sismique si l'onde secondaire arrive à la station sismique 2 minutes après la primaire ?

3.21 Jean pellette l'entrée chez sa mère en 2 heures tandis que Carmen, la mère de Jean, y met 3 heures. En travaillant ensemble, combien de temps mettraient-ils pour pelleter l'entrée de Carmen ?

3.22 Lorsque les rayons issus d'un point d'un objet traversent une lentille convergente, ils sont déviés par celle-ci et convergent vers un point image.



La relation entre la distance du point de l'objet à la lentille (d_o), la distance du point image à la lentille (d_i) et la distance focale (f) est donnée par l'équation suivante.

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

(a) Considérant une lentille dont la distance focale est de 2 cm, résolvez l'équation pour d_i.

(b) Pour cette longueur focale, à quelle distance de la lentille se formera l'image d'un point situé à 4 m ?

3.23 Un ébéniste fabrique les armoires d'une cuisine en 10 jours. Avec l'aide de son employé, le même travail prend 6 jours. Combien de temps l'employé prendrait-il s'il fabriquait les armoires seul ?

3.24 Un photocopieur de nouvelle génération imprime deux fois plus vite qu'un autre plus ancien. Ensemble, les deux photocopieurs prennent 10 minutes à produire un certain nombre de copies. Combien de temps faudrait-il à chaque machine pour faire le même travail seule ?

3.25 Des amis décident de louer un chalet et de se séparer également les 1 200 \$ que coûte la location. La veille du départ, deux d'entre eux doivent se désister. Sans la contribution de ces derniers, les autres calculent qu'il leur en coûtera 50 \$ de plus par personne. Combien sont-ils à payer pour le chalet et quel montant doivent-ils défrayer chacun ?

3.3 Les inéquations linéaires

Définition 3.7 Une **inéquation** est une inégalité entre deux expressions mathématiques contenant une ou plusieurs variables.

Exemple 3.15

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez s'il s'agit d'une inéquation ou non.

(a) $4x+7 \leq 15$

(b) $8 > 3x-1$

(c) $7 < 1+2$

(d) $2 \leq 3x-1 \leq 8$

Solution :

(a) L'inégalité $4x+7 \leq 15$ est une inéquation.
Elle est vraie lorsque $4x-7$ a une valeur inférieure ou égale à 15, ce qui est le cas lorsqu'on attribue à la variable n'importe quelle valeur réelle inférieure ou égale à 2.

(b) L'inégalité $8 > 3x-1$ est une inéquation.
Elle est vraie lorsque 8 est strictement supérieur à la valeur de $3x-1$, ce qui est le cas lorsque la variable prend n'importe quelle valeur réelle strictement inférieure à 3.

(c) L'inégalité $7 < 1+2$ n'est pas une inéquation, car elle ne contient pas de variable. De plus, cette inégalité est fausse.

(d) L'inéquation composée $2 \leq 3x-1 \leq 8$ consiste en une combinaison des inéquations $2 \leq 3x-1$ et $3x-1 \leq 8$. Elle est vraie lorsque l'on attribue à la variable une valeur pour laquelle les deux inégalités sont vraies.

Définition 3.8 Le **domaine** ou l'**ensemble de référence** d'une inéquation est l'ensemble de toutes les valeurs qui peuvent être attribuées à ses variables, que l'inégalité obtenue soit vraie ou non.

Exemple 3.16

Déterminez l'ensemble de référence de chacune des inéquations suivantes.

(a) $6x-5 \leq 7x-10$

(b) $\dfrac{1}{x} \geq 2$

(c) $\sqrt{x-1} < 3$

Solution :

(a) L'ensemble de référence d'une inéquation linéaire est toujours $\mathbb{R}$, puisque chaque membre de l'inéquation est un polynôme de degré 1 qui est défini pour toute valeur réelle qu'on substitue à la variable. L'inégalité obtenue peut être vraie ou non.

(b) L'inéquation $\frac{1}{x} \geq 2$ n'est pas linéaire. Son ensemble de référence est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, puisque toute valeur réelle peut être substituée à la variable sauf la valeur 0 qui, elle, provoquerait une division par 0.

(c) Encore une fois, ce n'est pas une inéquation linaire. L'ensemble de référence est $[1;\infty[$, puisque toute valeur située à l'extérieur de cet intervalle, si elle est substituée à la variable, impliquerait une racine paire d'un nombre négatif.

Définition 3.9 On appelle **solution** d'une inéquation à une variable tout nombre réel qui, substitué à la variable, transforme l'inéquation en une inégalité qui soit vraie. On dira alors que la solution vérifie l'inéquation. L'**ensemble solution** d'une inéquation est l'ensemble formé de toutes les solutions de l'inéquation. Cet ensemble est habituellement décrit par un intervalle.

Exemple 3.17

Déterminez si la valeur proposée est une solution de l'inéquation.

(a) $2x - 2 \leq 5x + 1$, $x = 3$

(b) $2x > 10$, $x = 5$

(c) $\sqrt{x+3} \geq 2$, $x = -4$

(d) $\sqrt{2x+3} < -2$, $x = 0$

Solution :

(a) $x = 3$ est une solution de l'inéquation, car $2x - 2|_{x=3} = 4$ et $5x - 2|_{x=3} = 13$ et 4 est inférieur ou égal à 13.

(b) $x = 5$ n'est pas une solution de l'inéquation, car $2(5) = 10$ et cette valeur n'est pas strictement supérieure à 10.

(c) $x = -4$ n'est pas une solution de $\sqrt{x+3} \geq 2$, car cette valeur n'appartient pas à l'ensemble de référence de l'inéquation. En effet, $\sqrt{x+3}|_{x=-4} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

(d) $x = 0$ appartient à l'ensemble de référence de l'inéquation, mais n'en est pas une solution, car $\sqrt{2(0)+3} = \sqrt{3}$ et cette valeur n'est pas inférieure à -2.
En fait, l'ensemble solution de $\sqrt{2x+3} < -2$ est vide, parce qu'une racine paire n'étant jamais inférieure à un nombre négatif, l'inégalité est fausse pour toute valeur réelle qui pourrait être substituée à la variable.

Définition 3.10 On dit que deux inéquations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble solution. **Résoudre** une inéquation consiste à trouver toutes les solutions de cette inéquation.

La résolution d'une inéquation
Pour résoudre une inéquation, il suffit de la transformer en une inéquation équivalente plus simple, de façon à pouvoir isoler l'inconnue. Pour la transformer, on utilise les propriétés suivantes. Dans ce qui suit, on suppose que A, B et c sont des expressions à valeurs réelles.
On obtient une inéquation équivalente lorsqu'on

1. additionne le même terme aux deux membres d'une inéquation,
$$A < B \Longleftrightarrow A + c < B + c$$
2. soustrait le même terme aux deux membres d'une inéquation,
$$A < B \Longleftrightarrow A - c < B - c$$
3. multiplie les deux membres d'une inéquation par un facteur strictement positif,
$$A < B \Longleftrightarrow cA < cB \quad (\text{si } c > 0)$$
4. divise les deux membres d'une inéquation par un facteur strictement positif,
$$A < B \Longleftrightarrow \frac{A}{c} < \frac{B}{c} \quad (\text{si } c > 0)$$
5. multiplie les deux membres d'une inéquation par un facteur strictement négatif et on change le sens du symbole d'inégalité,
$$A < B \Longleftrightarrow cA > cB \quad (\text{si } c < 0)$$
6. divise les deux membres d'une inéquation par un facteur strictement négatif et on change le sens du symbole d'inégalité,
$$A < B \Longleftrightarrow \frac{A}{c} > \frac{B}{c} \quad (\text{si } c < 0)$$

Ces propriétés sont aussi valides si on change le symbole $<$ pour $\leq$, $>$ ou $\geq$.

Exemple 3.18

Résolvez les inéquations. Vérifiez graphiquement la validité de l'ensemble solution trouvé en faisant tracer les membres de l'inéquation dans une même fenêtre graphique.

(a) $\dfrac{2x-2}{3} + \dfrac{11}{6} > \dfrac{3x-1}{2}$.

(b) $-4 \leq \dfrac{3x+8}{2} < 7$

Solution :

(a) On commence par une mise au dénominateur commun.

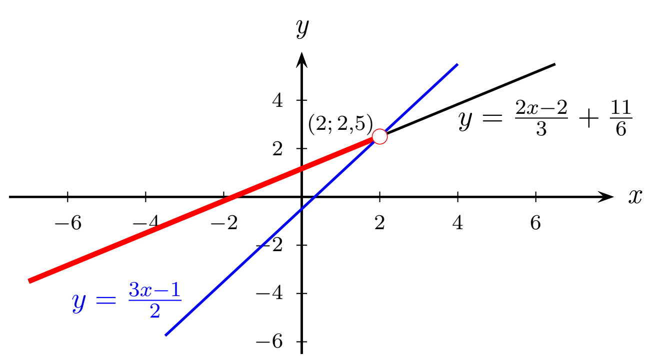
$$\begin{array}{rcll}
\frac{2x-2}{3}+\frac{11}{6} & > & \frac{3x-1}{2} & \\
\frac{2\cdot(2x-2)+11}{6} & > & \frac{3x-1}{2} & \text{on met au dénominateur commun le membre de gauche de l'inéquation} \\
\frac{4x+7}{6} & > & \frac{3x-1}{2} & \text{on développe et on réduit} \\
6\cdot\frac{4x+7}{6} & > & 6\cdot\frac{3x-1}{2} & \text{on multiplie chaque membre par 6} \\
4x+7 & > & 9x-3 & \text{on simplifie} \\
-5x & > & -10 & \text{on soustrait 7 et } 9x \text{ à chaque membre} \\
\frac{-5x}{-5} & < & \frac{-10}{-5} & \text{on divise par } -5 \text{ chaque membre, ce qui inverse le sens de l'inégalité} \\
x & < & 2 & \text{on simplifie}
\end{array}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est $]-\infty;2[$.

Validation. Lorsqu'on trace les droites

$$y=\frac{2x-2}{3}+\frac{11}{6} \text{ et } y=\frac{3x-1}{2}$$

dans un même graphique, on constate que la première droite est au-dessus de la deuxième pour $x\in]-\infty;2[$. Pour tous les x dans cet intervalle, la valeur de $\frac{2x-2}{3}+\frac{11}{6}$ est donc strictement supérieure à celle de $\frac{3x-1}{2}$. Les termes sont égaux au point d'intersection, $(2;2{,}5)$, mais son abscisse ne fait pas partie de l'ensemble solution.

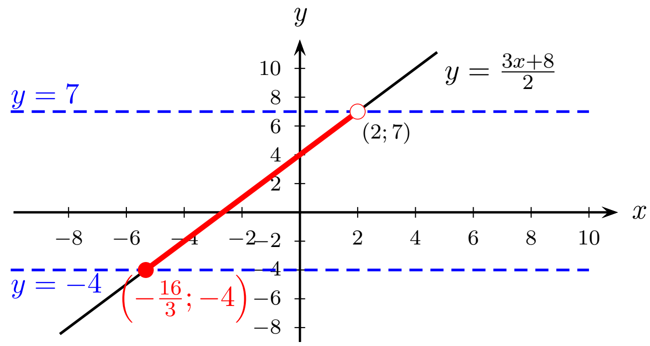


(b) On résout cette inéquation composée en appliquant à ses trois membres les opérations qui permettent d'isoler la variable dans le membre du centre.

$$\begin{array}{rcccll}
-4 & \leq & \frac{3x+8}{2} & < & 7 & \\
2(-4) & \leq & 2\cdot\frac{3x+8}{2} & < & 2(7) & \text{on multiplie chaque membre de l'inéquation par 2} \\
-8 & \leq & 3x+8 & < & 14 & \text{on simplifie} \\
-8-8 & \leq & 3x+8-8 & < & 14-8 & \text{on soustrait 8 à chaque membre} \\
-16 & \leq & 3x & < & 6 & \text{on réduit} \\
\frac{-16}{3} & \leq & \frac{3x}{3} & < & \frac{6}{3} & \text{on divise par 3 chaque membre} \\
-\frac{16}{3} & \leq & x & < & 2 & \text{on simplifie}
\end{array}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est $\left[-\frac{16}{3};2\right[$.

Validation. En traçant les droites dans un même graphique, on constate que la droite $y = \frac{3x+8}{2}$ est au-dessus de la droite $y = -4$ et sous la droite $y = 7$ pour $x \in \left[-\frac{16}{3}; 2\right[$. Pour tous les x dans cet intervalle, la valeur de $y = \frac{3x+8}{2}$ est effectivement supérieure ou égale à -4 et strictement inférieure à 7. Il y a égalité aux points d'intersection, mais seule l'abscisse du point $\left(-\frac{16}{3}; -4\right)$ fait partie de l'ensemble solution.



On utilise les grandes lignes de résolution décrites au tableau 3.1 pour aborder les problèmes narratifs menant à des inéquations.

Exemple 3.19

Comme vous êtes amateur de plein air, vous visitez régulièrement les parcs de la SÉPAQ (Société des établissements de plein air du Québec). Le règlement de la SÉPAQ oblige tous les visiteurs à payer un accès journalier aux parcs pour chaque nuitée de camping.

Comme chaque année, vous vous questionnez à savoir s'il est plus avantageux d'acheter la carte annuelle[i], qui donne accès à tous les parcs (77,75 \$), ou de payer l'accès journalier à 8,60 \$/jour. Avec la carte annuelle, vous bénéficiez d'un rabais de 15 % sur le prix régulier de 36,25 \$/nuitée de camping.

À partir de combien de nuitées de camping, est-il plus avantageux de payer une carte d'accès annuelle ?

Solution :

Étape 1. Lire l'énoncé

> À partir de combien de nuitées de camping, est-il plus avantageux de payer une carte d'accès annuelle ?

Étape 2. Débroussailler

Résumé des différents tarifs :
- carte annuelle : 77,75 \$
- carte d'accès journalier : 8,60 \$/jour (payable pour chaque nuitée de camping)
- site de camping, régulier : 36,25 \$/nuitée
- site camping, prix réduit : $36{,}25 - 0{,}15 \cdot 36{,}25 = 0{,}85 \cdot 36{,}25 = 30{,}8125$ \$/nuitée

On veut savoir à partir de combien de nuitées de camping

$$\text{coûts de camping avec carte annuelle} < \text{coûts sans carte annuelle.}$$

Étape 3. Traduire en langage mathématique

i. Les tarifs sont de 2019.

On doit comparer les coûts sans connaître le nombre de nuitées de camping. On pose donc

$$x = \text{le nombre de nuitées de camping}$$

et on calcule les coûts associés

— avec la carte annuelle :

$$\begin{aligned} 77{,}75 + 0{,}85 \cdot 36{,}25x &= 77{,}75 + 30{,}8125x \\ & \quad \$ + \frac{\$}{\text{jour}} \cdot \text{jours} \\ & \quad \$ + \$ = \$ \end{aligned}$$

— sans la carte annuelle :

$$\begin{aligned} 36{,}25x + 8{,}60x &= 44{,}85x \\ & \quad \frac{\$}{\text{jour}} \cdot \text{jours} \\ & \quad \$ \end{aligned}$$

Étape 4. Résoudre

On résout l'inéquation $77{,}75 + 30{,}8125x < 44{,}85x$ pour x.

$$77{,}75 + 30{,}8125x < 44{,}85x \iff x > 5{,}54$$

Étape 5. Compléter les informations

Aucune autre information n'est demandée.

Étape 6. Valider

Ce résultat est plausible dans le contexte, car si on campe 6 nuits, les coûts associés seraient :

— avec la carte d'accès annuel : $77{,}75 + 30{,}8125x|_{x=6} \approx 262{,}53$ \$

— sans la carte d'accès annuel : $44{,}85x|_{x=6} = 269{,}10$ \$

Il est effectivement plus avantageux de prendre une carte d'accès annuelle si on campe 6 nuits ou plus.

Étape7. Relire l'énoncé et répondre à la ou les questions

À partir de 6 nuitées de camping, il est plus avantageux de se procurer une carte annuelle.

Exemple 3.20

Comme vous visitez les parcs de la SÉPAQ tous les ans, vous aimeriez trouver une formule qui permettrait de connaître, selon les tarifs en vigueur une année, à partir de combien de nuitées de camping, il est plus avantageux d'acheter la carte annuelle à a \$ que de payer l'accès journalier à j \$/jour.

Sachant qu'avec la carte annuelle, vous bénéficiez d'un rabais de r % sur le prix régulier de c \$/nuitée de camping, trouvez une formule, en a, j, r et c qui permet de déterminer rapidement à partir de combien de nuitées de camping, il est plus avantageux de payer une carte d'accès annuelle.

Solution :

Résumé des différents tarifs :

— carte annuelle : a \$

— carte d'accès journalier : j \$/jour (payable pour chaque nuitée de camping)

— site de camping, régulier : c \$/nuitée

— site camping, prix réduit : $c - r \cdot c = (1 - r) \cdot c$ \$/nuitée

On veut savoir à partir de combien de nuitées de camping

$$\text{coûts de camping avec carte annuelle} < \text{coûts sans carte annuelle.}$$

Comme à l'exemple 3.19, on doit comparer les coûts sans connaître le nombre de nuitées de camping. On pose donc

$$x = \text{le nombre de nuitées de camping}$$

et on calcule les coûts associés.
— avec la carte annuelle : $a + (1-r) \cdot c \cdot x$
— sans la carte annuelle : $cx + jx = (c+j)x$
On résout l'inéquation suivante pour x.

$$a + (1-r) \cdot c \cdot x < (c+j)x$$

$$\begin{aligned}
a + (1-r) \cdot c \cdot x < (c+j)x \quad &\iff \quad a + cx - rcx < cx + jx && \text{on développe} \\
&\iff \quad a < jx + rcx && \text{on soustrait } cx \text{ et on additionne } rcx \\
&\iff \quad a < x(j + rc) && \text{on met } x \text{ en évidence} \\
&\iff \quad \tfrac{a}{j+rc} < x && \text{on divise par } j + rc
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque le nombre de nuitée de camping prévu est plus grand que

$$\frac{a}{j+rc},$$

il est plus avantageux d'acheter la carte annuelle.

Attention ! Dans l'inéquation $a + (1-r) \cdot c \cdot x < (c+j)x$, les lettres a, j, c et r sont des **paramètres** qui caractérisent respectivement le tarif de la carte annuelle, le tarif journalier, le nombre de nuitées de camping et le rabais pour une nuitée de camping lorsqu'on détient une carte annuelle. Elles sont considérées comme des constantes dans le cadre d'une année.

Validation. On vérifie que cette formule généralise bien le résultat obtenu à l'exemple 3.19.

$$\left.\frac{a}{j+rc}\right|_{a=77{,}75, j=8{,}60, c=36{,}25, r=0{,}15} \approx 5{,}54.$$

Exercices

3.26 Représentez les ensembles suivants sur la droite réelle.

(a) $\{-1\,;3\}$ (b) $[-1\,;3]$ (c) $\{2{,}3\,;5\}$ (d) $]2{,}3\,;5]$

3.27 Sans résoudre l'inéquation, vérifiez si 0 en est une solution. Résolvez ensuite l'inéquation et représentez l'ensemble solution sur la droite réelle. Votre solution est-elle cohérente avec votre conclusion concernant la valeur 0 ?

(a) $3 - 5x < 2x - 3$

(b) $\dfrac{3x}{10} + 1 \geq \dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{10}$

(c) $\dfrac{x-4}{12} \geq \dfrac{x-2}{9} + \dfrac{5}{18}$

(d) $\dfrac{4x-3}{6} + 2 \geq \dfrac{2x-1}{12}$

3.28 Résolvez chacune des inéquations suivantes. Vérifiez graphiquement chacune de vos réponses en faisant tracer les deux membres de l'inéquation dans une même fenêtre graphique.

(a) $3x + 5 > 2$

(b) $5x - 4 \leq 2x + 1$

(c) $3 - 2(5x + 1) < 3 - 2x$

(d) $\dfrac{5x+2}{4} - 1 \geq 3 - \dfrac{x}{2}$

(e) $3(2x + 1) - 5x > x + 1$

(f) $\dfrac{2x+3}{4} - \dfrac{1-x}{3} \leq \dfrac{x-1}{2}$

(g) $2(4 - 3x) - 5(x + 1) < 5 - 3(2x - 1)$

(h) $4x - 2(3x + 1) \geq 1 - 2x$

3.29 Résolvez chacune des inéquations suivantes en isolant la variable au centre. Vérifiez graphiquement votre réponse en faisant tracer les trois membres de l'inéquation dans une même fenêtre graphique.

(a) $-1 \leq 3x + 2 < 4$ (b) $-5 < \frac{2x+1}{2} < 1$ (c) $-3 < \frac{5-2x}{3} \leq 2$

3.30 Selon l'Organisation mondiale de la santé, l'indice de masse corporelle [ii] (IMC) est un moyen simple de mesurer l'obésité dans la population. Il correspond au poids de la personne (en kilogrammes) divisé par le carré de sa taille (en mètres).

Une personne dont l'IMC est situé entre 18,5 et 25 est considérée comme ayant un poids santé, tandis qu'une personne dont l'IMC est égal ou supérieur à 25 est considérée comme étant en surpoids. Lorsque l'IMC d'une personne est égal ou supérieur à 30, elle est généralement considérée comme obèse.

(a) Si un homme mesure 1,83 m et pèse 125 kg, est-il obèse ?

(b) Quel poids peut avoir une personne de 1,69 m pour qu'on la considère comme ayant un poids santé ?

(c) Quelle est la formule pour calculer l'IMC pour un poids donné en livres et une taille donnée en pouces ?

(d) À partir de quel poids, en livres, une personne mesurant 5 pieds 11 pouces est-elle considérée obèse ?

ii. https://www.who.int/topics/obesity/fr/

3.31 Quoi choisir ?

(a) En 2019, prendre le métro de Montréal coûtait 3,50 \$ pour un passage unique. On pouvait aussi acheter un titre *Week-end illimité* à 14 \$. Combien de fois devait-on prendre le métro en payant 3,50 \$ par passage pour qu'il soit avantageux d'acheter un titre *Week-end illimité* ?

(b) Si une année, prendre le métro de Montréal coûte p \$ pour un passage unique et a \$ pour le titre *Week-end illimité*, combien de fois doit-on prendre le métro, en payant selon le nombre de passages, pour qu'il soit plus avantageux d'acheter un titre *Week-end illimité* ?

3.32 On peut louer une voiture pour 50 \$/jour plus 16 ¢/km (forfait A) ou pour 25,65 \$/jour plus 41 ¢/km (forfait B). Combien de kilomètres doit-on parcourir dans la journée pour que le forfait A soit plus économique que le forfait B ?

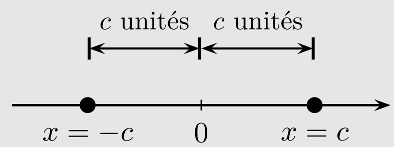
3.4 Les équations et les inéquations ayant des valeurs absolues

Les équivalences suivantes servent à résoudre des équations et inéquations comprenant des valeurs absolues.

La résolution d'une équation ou d'une inéquation comportant une valeur absolue
Soit $c > 0$ et x un nombre réel quelconque.

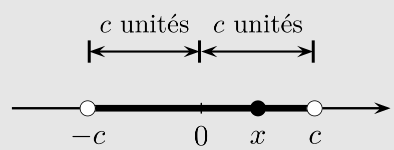
1. $|x| = c \iff x = -c$ ou $x = c$

   Interprétation
   Le nombre x est à une distance c de l'origine, $|x| = |x - 0| = c$. Seuls les nombres $x = -c$ et $x = c$ sont des solutions de cette équation.

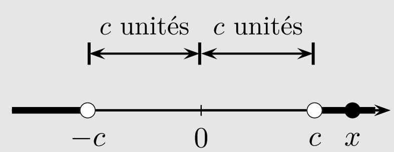
2. $|x| < c \iff -c < x < c$

   Interprétation
   Le nombre x est à une distance inférieure à c de l'origine, $|x| = |x - 0| < c$. Ainsi, tout nombre x appartenant à l'intervalle $]-c; c[$ est solution de cette inéquation.

3. $|x| > c \iff x < -c$ ou $x > c$

   Interprétation
   Le nombre x est à une distance supérieure à c de l'origine, $|x| = |x - 0| > c$. Ainsi, tout nombre x appartenant à l'union d'intervalles $]-\infty; -c[\cup]c; \infty[$ est solution de cette inéquation.

Exemple 3.21

Résolvez chacune des équations et inéquations suivantes.

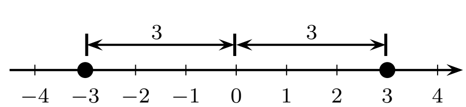
(a) $|x| = 3$
(b) $|x| \leq 5$
(c) $|x - 2| = 1$
(d) $|x + 1| < 3$
(e) $|3x - 4| \geq 2$

Solution :

(a) Selon la propriété 1, l'équation $|x| = 3$ est équivalente à la paire d'équations

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

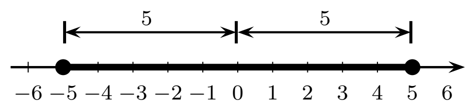
L'ensemble solution est donc $\{-3; 3\}$.
Validation. Il s'agit bien des nombres qui sont à une distance de 3 de l'origine.



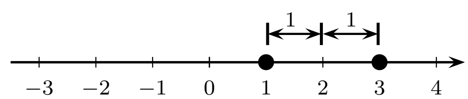
(b) Par la combinaison des propriétés 1 et 2, l'inéquation $|x| \leq 5$ est équivalente à

$$-5 \leq x \leq 5.$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $[-5; 5]$, qui comprend tous les nombres dont la distance à l'origine est inférieure ou égale à 5.



(c) L'interprétation de l'équation indique que les nombres cherchés sont situés à une distance de 1 du nombre 2.



Ces solutions s'obtiennent en utilisant la propriété 1 pour résoudre algébriquement l'équation, où $|x-2| = 1$ est équivalent à

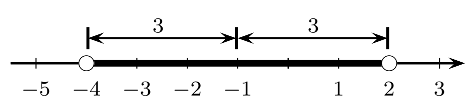
$$\begin{array}{rrcrcrcl} & x-2 & = & -1 & \text{ou} & x-2 & = & 1 \\ \Longleftrightarrow & x & = & 1 & \text{ou} & x & = & 3 \end{array}$$

L'ensemble solution est donc $\{1; 3\}$.

(d) L'inéquation $|x+1| < 3$ peut être écrite sous la forme $|x-(-1)| < 3$. L'ensemble solution est composé de tous les nombres dont la distance à -1 est inférieure à 3. Selon les propriétés 1 et 2,

$$\begin{array}{rrcccc} & -3 & < & x+1 & < & 3 \\ \Longleftrightarrow & -4 & < & x & < & 2 \end{array}$$

L'ensemble solution est donc $]-4; 2[$.



(e) Selon les propriétés 1 et 3, l'inéquation $|3x-4| \geq 2$ est équivalente à

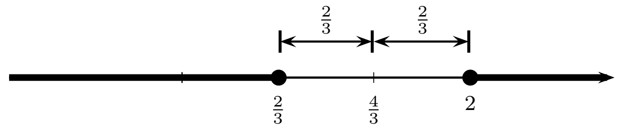
$$\begin{array}{rrcrcrcl} & 3x-4 & \leq & -2 & \text{ou} & 3x-4 & \geq & 2 \\ \Longleftrightarrow & 3x & \leq & 2 & \text{ou} & 3x & \geq & 6 \\ \Longleftrightarrow & x & \leq & \frac{2}{3} & \text{ou} & x & \geq & 2 \end{array}$$

L'ensemble solution est donc donné par $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left[2\ ; \infty\right[$.

Pour comprendre l'interprétation géométrique de l'inéquation de départ, il faut d'abord la transformer.

$$\begin{array}{rcl} |3x-4| \geq 2 & \Longleftrightarrow & \left|3\left(x-\frac{4}{3}\right)\right| \geq 2 \\ & \Longleftrightarrow & |3| \cdot \left|x-\frac{4}{3}\right| \geq 2 \\ & \Longleftrightarrow & \left|x-\frac{4}{3}\right| \geq \frac{2}{3} \end{array}$$

On constate que l'ensemble solution de l'équation de départ se compose bel et bien de tous les nombres dont la distance au nombre $\frac{4}{3}$ est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.



Exemple 3.22

Les spécifications d'une machine de remplissage de bouteilles garantissent d'y verser un volume de liquide avec une précision de ±0,25 % du volume visé. Une entreprise utilise cette machine pour remplir des bouteilles de 500 mL. Afin de détecter tout malfonctionnement de la machine lors d'un remplissage, on teste quelques bouteilles pour s'assurer que le volume de liquide qui y a été versé est dans la marge d'erreur spécifiée par le fabriquant.

Écrivez et résolvez une équation ou une inéquation, contenant une valeur absolue, qui permette de déterminer les volumes qui se trouvent au-delà de la marge d'erreur.

Solution :

Soit V le volume mesuré dans une bouteille. On cherche tout volume dont l'écart à 500 mL dépasse la marge d'erreur spécifiée par le fabriquant, c'est-à-dire V tel que

$$\begin{aligned} \frac{|V-500|}{500} &> 0{,}0025 \\ |V-500| &> 1{,}25 \end{aligned}$$

La propriété 3 permet de résoudre cette inéquation.

$$\begin{array}{lrcl@{\quad}c@{\quad}rcl} & V-500 & < & -1{,}25 & \text{ou} & V-500 & > & 1{,}25 \\ \Longleftrightarrow & V & < & 498{,}75 & \text{ou} & V & > & 501{,}25 \end{array}$$

Par conséquent, si le volume mesuré dans une bouteille est inférieur à 498,75 mL ou supérieur à 501,25 mL, la marge d'erreur spécifiée pour la machine est dépassée, ce qui pourrait indiquer un problème au remplissage.

Exercices

3.33 Traduisez les équations et inéquations suivantes en équations ou inéquations équivalentes qui ne contiennent plus de valeurs absolues. Dans chaque cas, donnez l'ensemble solution. Illustrez celui-ci sur la droite réelle.

(a) $|x| = 8$
(b) $|x-7| < 4$
(c) $|7-x| < 4$
(d) $\left|x - \frac{1}{10}\right| \geq 1$
(e) $\left|\frac{1}{2}x\right| \leq 6$
(f) $|2x-3| = 5$
(g) $|4x+12| > 8$

3.34 Traduisez les équations et les inéquations suivantes en équations ou inéquations équivalentes qui ne contiennent plus de valeurs absolues. Résolvez les équations ou inéquations obtenues. Vérifiez chacune de vos réponses en faisant tracer les deux membres de chaque équation ou inéquation de départ dans une même fenêtre graphique.

(a) $|x| \leq 2$
(b) $|3x| = 5$
(c) $|x+3| > 9$
(d) $|7x-2| < 21$
(e) $\left|4 - \frac{2x}{3}\right| = 8$
(f) $\left|\frac{x+1}{5}\right| < 1$
(g) $|x-1| + 6 > 13$

3.35 Pour chaque énoncé ci-dessous, formulez une seule équation ou inéquation contenant une valeur absolue qui décrit la situation.

(a) La moyenne de votre groupe à un examen est de 71 %. Votre ami vous dit que son écart à la moyenne est de 7. Utilisez x pour représenter la note de votre ami.

(b) La moyenne d'un groupe à un examen est de 68 % avec un écart-type de 8,5 %. Soit x une des notes dont l'écart à la moyenne est d'au plus un écart-type.

(c) Un épicier lance un concours pour l'Halloween. Les clients qui peuvent estimer le poids d'une citrouille en vitrine à 50 g près gagnent leur commande d'épicerie. Le poids réel de la citrouille est de 6237 g. Représentez par x une estimation non gagnante.

(d) Pour faire un bon espresso, certains experts recommandent que la température de l'eau soit entre 88°C et 92°C lors de l'extraction du café. Utilisez T pour représenter une température de l'eau permettant d'extraire un bon espresso.

3.36 Une masse suspendue à un ressort oscille verticalement autour de sa position d'équilibre située à 3 m du sol. L'écart maximal à sa position d'équilibre est de 1,5 m. Écrivez et résolvez une équation ou une inéquation contenant une valeur absolue pour trouver la hauteur maximale et la hauteur minimale pouvant être atteintes par la masse.

3.37 On pèse des cristaux de permanganate de potassium sur une balance précise au millième de gramme. La mesure obtenue est de 0,871 g. Étant donné la précision de la balance, dans quel intervalle se situe la masse réelle de cristaux ? Écrivez et résolvez une équation ou une inéquation qui vous permette de répondre à cette question.

3.38 Pour attirer de nouveaux candidats, une entreprise offre une prime de 1 000 \$ pour la première année de travail de tout nouvel ingénieur junior qu'elle embauche. Néamoins, afin de rester compétitive, elle désire s'assurer que les salaires qu'elle offre la première année, incluant la prime, ne s'éloignent pas de plus de 3 000 \$ du salaire moyen pour un ingénieur junior dans son secteur d'activités. Si ce salaire annuel moyen est de 59 051 \$, quelle fourchette de salaire horaire, pour une semaine de 40 heures, l'entreprise peut-elle offrir aux candidats qu'elle désire embaucher ?

3.39 Une usine découpe des tiges de métal de 25 cm. Pour être conforme, la longueur des tiges coupées ne peut s'écarter de plus d'un demi-millimètre de cette mesure. Écrivez et résolvez une équation ou une inéquation, contenant une valeur absolue, qui permette de trouver les longueurs des tiges qui seront rejetées.

3.5 Les équations quadratiques

Définition 3.11 Une **équation quadratique** en la variable x est une équation pouvant s'écrire sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels et où $a \neq 0$. Autrement dit, une équation quadratique est une équation polynomiale de degré 2 en x.

Exemple 3.23

Déterminez lesquelles des équations suivantes sont quadratiques.

(a) $4x^2 - 3x = 2 - 3x^2 + 2x$ (b) $2x^2 = 3 + 2(x^2 + x + 1)$ (c) $y^2 + 3 = y$

Solution :

(a) L'équation $4x^2 - 3x = 2 - 3x^2 + 2x$ est quadratique, car elle est équivalente à $7x^2 - 5x - 2 = 0$.

(b) $2x^2 = 3 + 2(x^2 + x + 1)$ n'est pas une équation quadratique, car elle est équivalente à $5 + 2x = 0$ qui est linéaire.

(c) L'équation $y^2 + 3 = y$ est quadratique en la variable y, car elle est équivalente à $y^2 - y + 3 = 0$.

On sait résoudre une équation quadratique de type $u^2 = d$ par factorisation, en utilisant la différence de carrés.

$$u^2 = d \iff u^2 - d = 0 \iff (u - \sqrt{d})(u + \sqrt{d}) = 0 \iff u = \sqrt{d} \text{ ou } u = -\sqrt{d}$$

La méthode qui en découle permet de résoudre $u^2 = d$ directement.

La résolution d'une équation quadratique par l'application d'une racine carrée
Si u est une expression et d est une nombre réel positif, $u^2 = d$ possède les deux solutions

$$u = \sqrt{d} \quad \text{ou} \quad u = -\sqrt{d}.$$

Puisque les solutions ne diffèrent que par leur signe, on utilise l'abréviation $u = \pm\sqrt{d}$.

Exemple 3.24

Résolvez les équations suivantes par l'application d'une racine carrée.

(a) $4x^2 = 100$ (b) $(2x - 1)^2 = 9$ (c) $10 - (5x + 2)^2 = 0$

Solution :

(a) On commence par isoler la composante variable pour obtenir une forme $u^2 = d$.

$$\begin{array}{rcll} 4x^2 & = & 100 & \\ x^2 & = & 25 & \text{on divise chaque membre de l'équation par 4} \\ x & = & \pm\sqrt{25} & \text{on applique la racine carrée} \\ x = -5 & \text{ou} & x = 5 & \end{array}$$

Attention ! Le résultat découle aussi de l'identité $\sqrt{u^2} = |u|$ faisant intervenir la valeur absolue. En effet,

$$\begin{array}{rcll} x^2 & = & 25 & \\ \sqrt{x^2} & = & \sqrt{25} & \text{on applique la racine carrée à chaque membre} \\ |x| & = & 5 & \text{propriété de la racine carrée} \\ x=-5 & \text{ou} & x=5 & \text{définition de la valeur absolue} \end{array}$$

(b) Le carré parfait étant isolé, on applique la racine carrée.

$$\begin{array}{rcll} (2x-1)^2 & = & 9 & \text{ici, } u = 2x-1 \\ 2x-1 & = & \pm 3 & \text{on applique la racine carrée} \\ 2x-1=-3 & \text{ou} & 2x-1=3 & \text{on transforme en deux équations linéaires} \\ x=-1 & \text{ou} & x=2 & \text{on résout les équations linéaires} \end{array}$$

(c) On isole d'abord le carré parfait.

$$\begin{array}{rcll} 10-(5x+2)^2 & = & 0 & \\ (5x+2)^2 & = & 10 & \text{on isole le carré parfait, } u = 5x+2 \\ 5x+2 & = & \pm\sqrt{10} & \text{on applique la racine carrée} \\ 5x+2=-\sqrt{10} & \text{ou} & 5x+2=\sqrt{10} & \text{on transforme en deux équations linéaires} \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{5} & \text{ou} & x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{5} & \text{on résout les équations linéaires} \end{array}$$

Comment peut-on résoudre une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ si elle n'est pas de la forme $u^2 = d$ ou si son membre de gauche ne peut pas être factorisé ? On pourra trouver les solutions par l'application d'une racine carrée sur une forme équivalente $a(x + h)^2 + k = 0$, dite canonique.

La **complétion de carré** est le procédé algébrique qui consiste à transformer le polynôme $ax^2 + bx + c$ sous la **forme canonique** $a(x + h)^2 + k$. Ce procédé est basée sur l'identité suivante.

La complétion de carré

Si $x^2 + bx$ est un binôme, en y additionnant le carré de la moitié du coefficient de x, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, on obtient un carré parfait. C'est-à-dire,

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Exemple 3.25

Complétez le carré des expressions quadratiques suivantes.

(a) $x^2 + 16x - 4$ (b) $3x^2 - 6x + 15$ (c) $-2x^2 + 20x - 23$

Solution :

(a) Puisque $b = 16$, on commence en écrivant le carré parfait $(x + 8)^2$. On ajuste ensuite.

$$\begin{array}{rcll} x^2+16x-4 & = & \underbrace{(x+8)^2}_{x^2+16x+64} -64-4 & \text{on complète le carré} \\ & = & (x+8)^2-68 & \text{on réduit} \end{array}$$

Validation. On vérifie en développant.

$$(x+8)^2-68=\underbrace{x^2+16x+64}_{(x+8)^2}-68=x^2+16x-4$$

(b) On s'assure que le coefficient de x^2 soit 1 avant de procéder à la complétion de carré.

$$\begin{array}{rcll} 3x^2-6x+15 & = & 3\left[x^2-2x\right]+15 & \text{on met en évidence 3}\\ & = & 3\left[(x-1)^2-1\right]+15 & \text{on complète le carré}\\ & = & 3(x-1)^2-3+15 & \text{on distribue 3}\\ & = & 3(x-1)^2+12 & \text{on réduit} \end{array}$$

(c) On peut aussi mettre un négatif en évidence.

$$\begin{array}{rcll} -2x^2+20x-23 & = & -2\left[x^2-10x\right]-23 & \text{on met en évidence } -2\\ & = & -2\left[(x-5)^2-25\right]-23 & \text{on complète le carré}\\ & = & -2(x-5)^2+50-23 & \text{on distribue } -2\\ & = & -2(x-5)^2+27 & \text{on réduit} \end{array}$$

La complétion de carré donne lieu à la formule quadratique suivante.

Théorème 3.1 Les solutions de l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, sont données par la formule quadratique

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

▷ **Démonstration** Sans perte de généralité[iii], on suppose que $a>0$.

$$\begin{array}{rcll} ax^2+bx+c=0 & \iff & x^2+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}=0 & \text{on divise par } a\\ & \iff & x^2+\dfrac{bx}{a}=-\dfrac{c}{a} & \text{on soustrait le terme constant}\\ & \iff & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a} & \text{on complète le carré}\\ & \iff & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 & \text{on additionne } \left(\frac{b}{2a}\right)^2\\ & \iff & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\dfrac{b^2}{4a^2} & \text{on utilise une propriété des exposants}\\ & \iff & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{4a}{4a}+\dfrac{b^2}{4a^2} & \text{on met au dénominateur commun}\\ & \iff & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} & \text{on utilise une propriété des fractions}\\ & \iff & x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} & \text{on extrait la racine carrée}\\ & \iff & x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{on simplifie le dénominateur}\\ & \iff & x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{on résout pour } x\\ & \iff & x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{on utilise une propriété des fractions} \end{array}$$

iii. Si $a\neq 0$, on peut toujours réécrire l'équation de telle sorte que a soit plus grand que 0. En effet, il suffit d'utiliser les propriétés des équations pour ramener tous les termes du même côté de l'égalité.

◁

La quantité $b^2 - 4ac$ sous le radical de la formule quadratique est appelé le **discriminant**. Il permet de déterminer combien de solutions réelles possède une équation quadratique. Un résumé est présenté au tableau 3.2 à la page 144.

Exemple 3.26

Résolvez les équations quadratiques suivantes. Pour chacune de ces équations, donnez une interprétation graphique de ses solutions.

(a) $x^2 + 11x + 30 = 0$

(b) $x^2 - 5x + 25 = 0$

(c) $4x^2 = 4x - 1$

(d) $2x^2 + 13x = 5 - 4x^2$

Solution :

(a) Dans le cas de $x^2 + 11x + 30$, $a = 1$, $b = 11$ et $c = 30$. Comme

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=1,b=11,c=30} = 11^2 - 4(1)(30) = 121 - 120 = 1 > 0$$

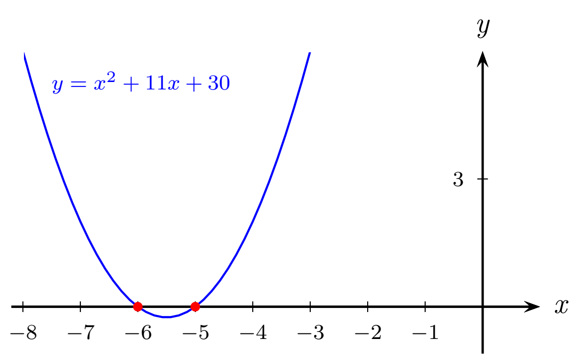
Il y aura deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

et

$$x_2 = \frac{-11 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-12}{2} = -6$$

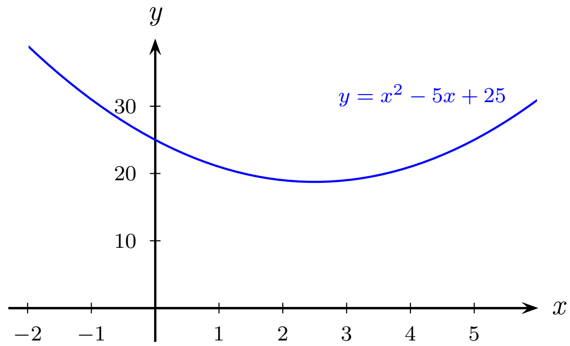
Graphiquement, les valeurs trouvées correspondent aux zéros de la fonction quadratique $x^2 + 11x + 30$.



(b) Dans $x^2 - 5x + 25$, $a = 1$, $b = -5$ et $c = 25$. Comme le discriminant est négatif,

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=1,b=-5,c=25} = (-5)^2 - 4(1)(25) = 25 - 100 = -75 < 0$$

il n'y a aucune solution réelle à l'équation $x^2 - 5x + 25 = 0$. Le graphe de la fonction $x^2 - 5x + 25$ n'intersecte pas l'axe des x.



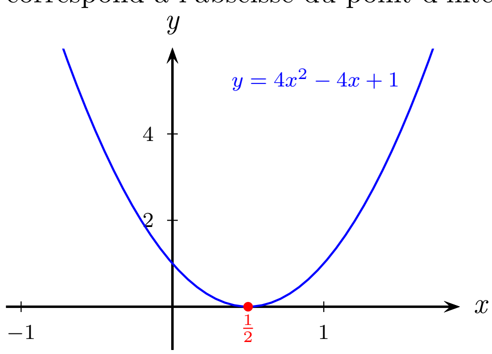
(c) L'équation $4x^2 = 4x - 1$ est équivalente à $4x^2 - 4x + 1 = 0$ où $a = 4$, $b = -4$ et $c = 1$. Comme

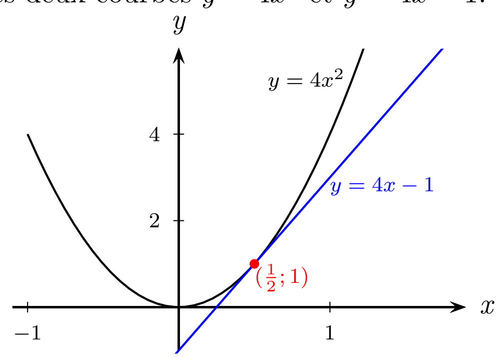
$$b^2 - 4ac\Big|_{a=4,b=-4,c=1} = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$$

il n'y a qu'une seule solution.

$$x = \frac{-(-4) + 0}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Il y a bien un seul zéro ($x = \frac{1}{2}$) sur le graphe de la quadratique $4x^2 - 4x + 1$ et cette solution correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux courbes $y = 4x^2$ et $y = 4x - 1$.





(d) $2x^2 + 13x = 5 - 4x^2$ est une équation équivalente à $6x^2 + 13x - 5 = 0$ et, dans ce cas, $a = 6$, $b = 13$ et $c = -5$. Comme

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=6,b=13,c=-5} = 13^2 - 4(6)(-5) = 289 > 0$$

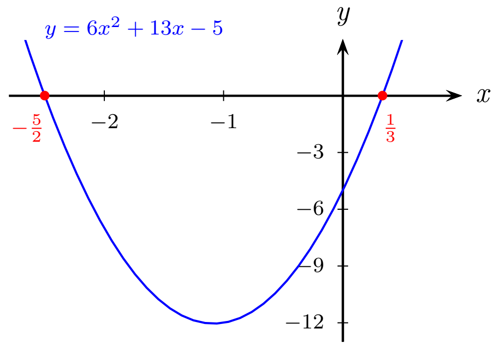
l'équation $2x^2 + 13x = 5 - 4x^2$ aura les deux solutions suivantes.

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2(6)} = \frac{-13 + 17}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

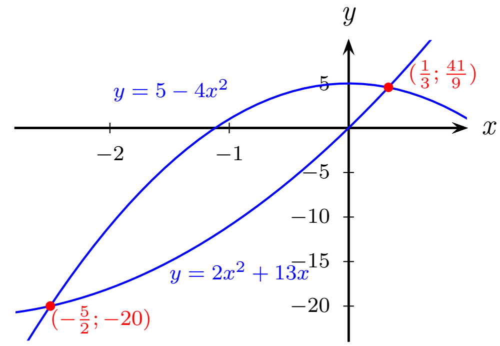
et

$$x_2 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2(6)} = \frac{-13 - 17}{12} = \frac{-30}{12} = -\frac{5}{2}$$

Les courbes $2x^2 + 13x$ et $y = 5 - 4x^2$ ont bien deux intersections.

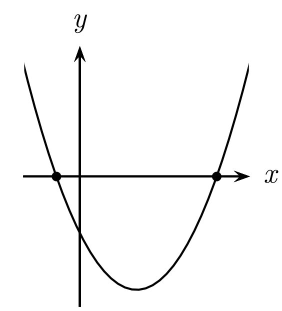
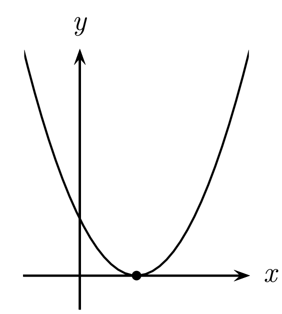
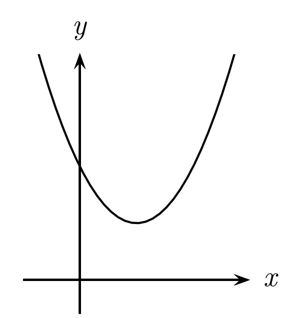


$y = 6x^2 + 13x - 5$
y
x
$-\frac{5}{2}$
-2
-1
$\frac{1}{3}$
-3
-6
-9
-12



y
x
$y = 5 - 4x^2$
$(\frac{1}{3}; \frac{41}{9})$
5
-2
-1
-5
-10
-15
-20
$y = 2x^2 + 13x$
$(-\frac{5}{2}; -20)$

TABLEAU 3.2 – Discriminant d'une équation quadratique

Discriminant	Type de solutions	Graphe de $y = ax^2 + bx + c$, pour $a > 0$
$b^2 - 4ac > 0$	Deux solutions réelles distinctes	Deux intersections avec l'axe des x 
$b^2 - 4ac = 0$	Une solution réelle	Une intersection avec l'axe des x 
$b^2 - 4ac < 0$	Aucune solution réelle	Aucune intersection avec l'axe des x 

Exercices

Dans chacun des exercices suivants, où il est question de résoudre des équations, vous pouvez vérifier vos réponses en substituant d'abord les valeurs obtenues dans l'équation de départ. Vous pouvez aussi faire tracer le graphe de chacun des membres de l'équation dans une même fenêtre de votre calculatrice pour vérifier graphiquement l'ensemble solution.

3.40 Résolvez les équations suivantes par l'application d'une racine carrée.

(a) $x^2 = 36$
(b) $5x^2 = 100$
(c) $(x-5)^2 = 49$
(d) $(2x-1)^2 = 16$
(e) $3(x-1)^2 = 48$
(f) $5(2x+3)^2 = 250$

3.41 Complétez le carré des expressions quadratiques suivantes.

(a) $x^2 + 10x + 34$
(b) $x^2 + 12x$
(c) $-x^2 + 4x + 3$
(d) $y^2 - 5y + 3$
(e) $2x^2 - 4x + 5$
(f) $-3x^2 + 6x + 7$

3.42 Calculez le discriminant de chacune des équations quadratiques suivantes pour en déterminer le nombre de solutions réelles. Vérifiez que l'information est exacte en résolvant les équations par les méthodes de votre choix (par factorisation ou par l'application d'une racine carrée ou par l'utilisation de la formule quadratique).

(a) $x^2 + 5x + 6 = 0$
(b) $x^2 + 3x + 7 = 0$
(c) $3x^2 = 6x$
(d) $(2x+1)^2 + 3 = 0$
(e) $9x^2 + 25 = 30x$
(f) $(x-5)^2 = 7$

3.43 Résolvez les équations quadratiques suivantes par factorisation et ensuite à l'aide de la formule quadratique. Quelle méthode semble la plus appropriée ?

(a) $4x^2 - 2x = 0$
(b) $x^2 + x - 6 = 0$
(c) $x(x+2) = 5x + 10$
(d) $(x-2)^2 - 9 = 0$

3.44 La somme des n premiers nombres entiers positifs consécutifs est donnée par l'expression

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

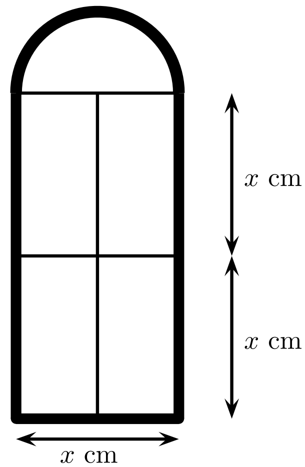
Par exemple, $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{10(11)}{2} = 55$. Déterminez la valeur n si cette somme est 1485.

3.45 Un objet est lancé verticalement vers le haut. La hauteur h (en mètres) de l'objet mesurée à partir du sol, t secondes après avoir été lancé, peut être modélisée par $h = -4{,}9t^2 + 30t + 2$. Combien de temps, à partir du moment où il a été lancé, faudra-t-il pour que l'objet frappe le sol ?

3.46 La surface d'un cercle doublerait si on augmentait son rayon de 3 cm, quel est le rayon du cercle ?

3.47 Un tapis recouvre les deux tiers de la surface d'une pièce mesurant 25 m par 30 m. Si, tout autour, le tapis laisse découverte une bande de parquet de largeur constante, quelles sont les dimensions du tapis ?

3.48 Une fenêtre est formée d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle telle qu'illustrée à la figure ci-dessous. Si la surface de la partie vitrée de la fenêtre mesure 4500 cm^2, quelle est la surface de chacun des plus petits rectangles qui la composent ?



3.49 Une automobiliste a parcouru 400 km. Si elle avait roulé en moyenne à 5 km/h de plus, elle aurait mis 30 minutes de moins pour arriver à destination. Quelle était sa vitesse moyenne ?

3.50 Un radiateur portatif prend 40 minutes de plus que la plinthe électrique d'une pièce pour en élever la température de 10°C. Lorsqu'on utilise les deux appareils de chauffage ensemble, il faut 50 minutes pour produire cette hausse de température. Combien de temps faudrait-il pour élever la température de cette pièce de 10°C, en chauffant seulement avec la plinthe électrique ?

Musculation algébrique

Si vous voulez pratiquer davantage la résolution d'équations, faites les exercices suivants.

3.51 Résolvez les équations suivantes.

(a) $\dfrac{2x}{7} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2+x}{7}$

(b) $\dfrac{5}{t-4} - \dfrac{2}{t} = \dfrac{-2}{t(t-4)}$

(c) $2(3x-1) + 5(x-1) = 4 - 2\left[(x-4) - 2(7x-4)\right]$

(d) $\dfrac{-2}{(t-1)(2t-3)} = \dfrac{3}{t-1} + \dfrac{1}{2t-3}$

(e) $\dfrac{3x-4}{3} + 6 = \dfrac{2x-7}{12}$

(f) $-4\left(\dfrac{1}{3}(t-2)\right) + 5t = \dfrac{4}{3}t - 2$

(g) $\dfrac{-5}{4}x + \dfrac{x}{8} = \dfrac{-3x}{2} - \dfrac{9}{8}$

(h) $\dfrac{5}{(2x-5)(x+1)} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{2x-5}$

(i) $\dfrac{-x}{2-x} + \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{x-1}{2-x}$

(j) $2(6y-5) + 3(3y-4) = 5(4(y+1) - 8)$

3.52 Résolvez les équations suivantes par factorisation.

(a) $49x^4 = 81x^2$

(b) $(2t-1)^2 - 25 = 0$

(c) $3(x^2-1) - 3(x+1)^2 = 0$

(d) $\frac{-1}{2}(x+10)^2 = \frac{-1}{2}$

(e) $4y^4 - y^3 = 0$

(f) $2t^3 = 200t$

(g) $12x^3 = 8x^2 + 4x$

(h) $(t+2)(-2t^3 + 2t) = 0$

(i) $4(y-3) - 2(y-3)^2 = 0$

(j) $2(7y-1) = y^2(7y-1)$

3.53 Résolvez les équations quadratiques suivantes.

(a) $4x^2 - 6x + 3 = 3(x^2+10) - 10(x+3)$

(b) $-4t^3 - (-t^2 + 10t - 2) = -4t(t^2+3)$

(c) $-3(4-x^2) + 2 = -\frac{5}{2}(2-x) + 2(x^2+2)$

(d) $2t^2 - 8 - 4(1+2t) = 1 - (2t-1)^2$

(e) $x(x-1) + x^2 - 6x + 5 = 3(x-2) - 1$

(f) $\dfrac{7x}{2} - \dfrac{x^2-1}{3} = \dfrac{x-1}{2} + 2x^2 + 6x + \dfrac{3}{2}$

(g) $4x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} = 0$

(h) $\frac{4}{3}t^2 - 2t - 1 = 0$

(i) $3x(x-3) = x^2 - 5x + 1$

(j) $x^2 + 4x - 3 = 3\left(-\frac{4}{3}x + 2\right)$

Chapitre 4

Les équations à 2 variables et les graphiques

4.1 Le plan cartésien

Rappelons que le plan cartésien est un système de coordonnées rectangulaires qui est formé par deux droites réelles perpendiculaires, une horizontale et l'autre verticale, qui se coupent à leur origine. Ces droites sont appelées les **axes de coordonnées** du système et divise le plan en quatre quadrants. On désigne le plan cartésien par

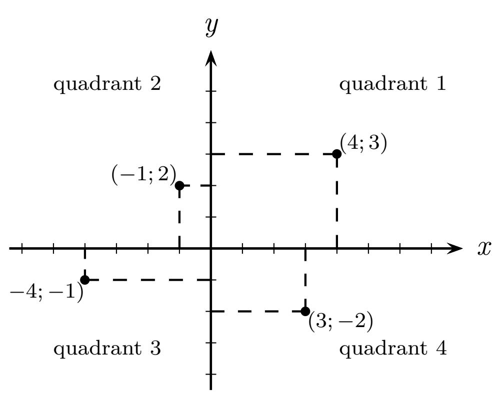
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}.$$

En mathématiques, l'axe horizontal est souvent désigné comme l'axe des x et l'axe vertical comme l'axe des y mais on peut très bien remplacer les variables x et y par une autre paire de variables qui refléteront davantage les contextes étudiés.

À chaque point du plan, on associe ses **coordonnées**, c'est-à-dire une paire ordonnée $(a; b)$ déterminée en abaissant à partir du point une perpendiculaire à l'axe des x et une autre qui soit perpendiculaire à l'axe des y. La coordonnée a est dite l'**abscisse** du point et la coordonnée b est dite l'**ordonnée** du point.

Exemple 4.1
Situez les points $(4; 3)$, $(-1; 2)$, $(-4; -1)$ et $(3; -2)$ dans le plan cartésien.

Solution :
Pour simplifier, on réfère souvent au « point de coordonnées $(a; b)$ » simplement par « point $(a; b)$ ».

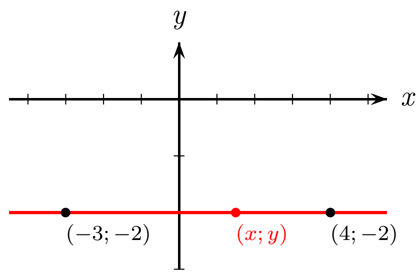


Exemple 4.2

Décrivez tous les points pour lesquels $(-3; -2)$, $(4; -2)$ et $(x; y)$ sont sur une même droite.

Solution :

Se donner une représentation graphique de la situation permet de constater que la caractéristique commune à tous les points $(x; y)$ de cette droite est d'avoir une ordonnée de -2.



On en conclut que les points $(x; y)$ cherchés doivent satisfaire la contrainte (l'équation) $y = -2$.

Exemple 4.3

Pour chacune des questions suivantes, donnez une description sommaire des points ainsi que leur représentation graphique dans le plan cartésien.

(a) Où sont situés tous les points d'ordonnée 2 ?

(b) Où sont situés tous les points $(x; y)$ pour lesquels $x = -2$?

(c) Quelle est l'ordonnée de tous les points situés sur l'axe horizontal ?

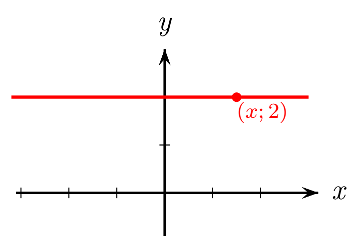
(d) Où sont situés tous les points dont l'ordonnée égale 2 fois l'abscisse ?

(e) Où sont situés tous les points $(x; y)$ pour lesquels $y < 0$?

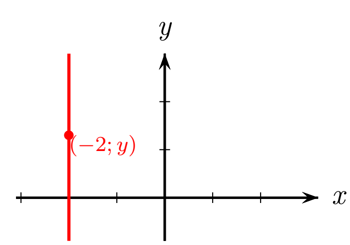
(f) Où sont situés tous les points $(x; y)$ pour lesquels $x \geq -2$?

Solution :

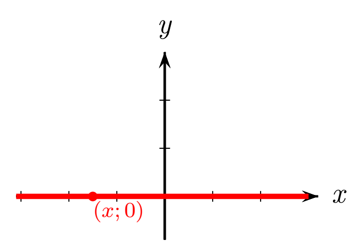
(a) Un point $(x; y)$ a une ordonnée de 2 si $y = 2$. Les points sont tous sur la droite horizontale à hauteur 2.



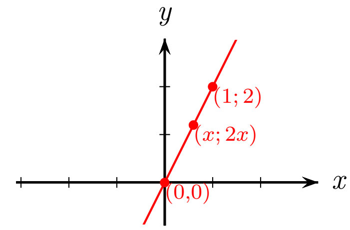
(b) Si la contrainte $x = -2$ est satisfaite, alors tous les points cherchés sont sur la droite verticale située 2 unités à gauche de l'axe des y.



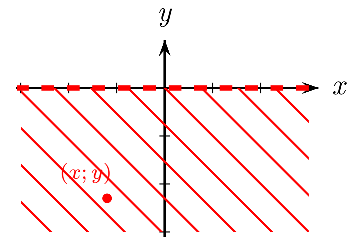
(c) Un point sera sur l'axe horizontal si son ordonnée est 0, il doit donc satisfaire la contrainte (l'équation) $y = 0$.



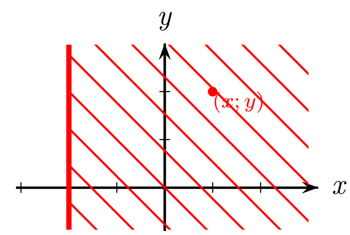
(d) Un point $(x; y)$ d'ordonnée égale à 2 fois son abscisse satisfait la contrainte (l'équation) $y = 2x$.



(e) $y < 0$ signifie que l'ordonnée est inférieure à 0. Les points de coordonnées $(x; y)$ cherchés sont sous l'axe des x.



(f) $x \geq -2$ signifie que l'abscisse des points $(x; y)$ est supérieure ou égale à -2.



Exercices

4.1 Situez les points $(3; -2)$, $(-4{,}5; 3{,}2)$, $(5; 2{,}5)$, $(0; 1)$ et $(-3; -2{,}5)$ dans le plan cartésien.

4.2 Quelle est l'abscisse de tous les points situés sur l'axe vertical ?

4.3 Décrivez tous les points pour lesquels $(3; -1)$, $(3; 0)$ et $(x; y)$ sont sur une même droite.

4.4 Pour chacune des questions suivantes, donnez une description sommaire des points ainsi que leur représentation graphique dans le plan cartésien.

(a) Où sont situés tous les points d'abscisse 1 ?
(b) Où sont situés tous les points d'ordonnée -1 ?
(c) Où sont situés tous les points $(x; y)$ pour lesquels $y = 3$?
(d) Où sont situés tous les points dont l'abscisse égale l'ordonnée ?
(e) Où sont situés tous les points $(x; y)$ pour lesquels $x \geq -1$?
(f) Où sont situés tous les points $(x; y)$ pour lesquels $y < 2$?

4.2 La représentation graphique d'une équation

Une **relation** entre deux quantités peut souvent s'exprimer à l'aide d'une **équation à deux variables**. Par exemple, $y+4=x^2$ et $x^3y+6=2y^2$ sont des équations à deux variables qui décrivent deux relations différentes entre x et y.

Une **solution** d'une équation à deux variables est un couple ordonné de nombres réels dont les valeurs, lorsque substituées aux variables, transforment l'équation en une égalité qui soit vraie. On dira alors que le couple **satisfait l'équation**.

Exemple 4.4

Montrez que $(-2;0)$ et $(3;5)$ sont des solutions de l'équation $y+4=x^2$ tandis que $(1;2)$ ne l'est pas.

Solution :

$(-2;0)$ est bien une solution de l'équation $y+4=x^2$, car

$$\begin{array}{ccll} y+4 & = & x^2 & \\ (0)+4 & \stackrel{?}{=} & (-2)^2 & \\ 4 & = & 4 & \text{est vraie.} \end{array}$$

De la même façon, $(3;5)$ est une solution de l'équation $y+4=x^2$, car

$$\begin{array}{ccll} y+4 & = & x^2 & \\ (5)+4 & \stackrel{?}{=} & (3)^2 & \\ 9 & = & 9 & \text{est vraie.} \end{array}$$

$(1;2)$ n'est pas une solution de l'équation $y+4=x^2$, car

$$\begin{array}{ccll} y+4 & = & x^2 & \\ (2)+4 & \stackrel{?}{=} & (1)^2 & \\ 6 & = & 1 & \text{est fausse,} \end{array}$$

le couple $(1;2)$ ne satisfait pas l'équation.

L'**ensemble solution** d'une équation est l'ensemble de toutes ses solutions. Le **graphique d'une équation** est la représentation graphique des points de son ensemble solution.

Exemple 4.5

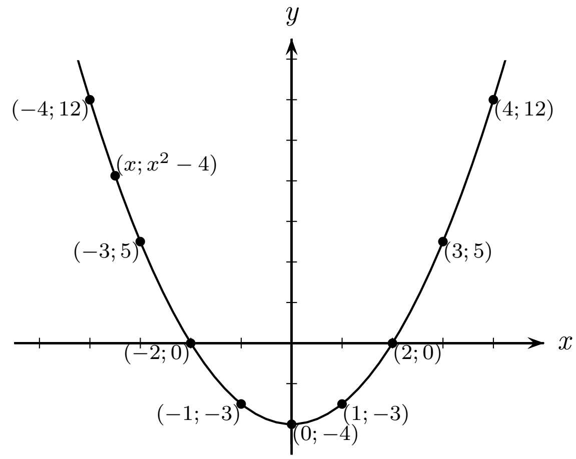
Tracez le graphique de $y+4=x^2$.

Solution :

En résolvant l'équation $y+4=x^2$ pour y, on peut facilement générer des solutions. En effet, il suffit de donner une valeur à x et de calculer la valeur y correspondante. On place ensuite les couples solutions trouvés dans le plan cartésien et on relie les points par une courbe lisse.

$$y + 4 = x^2 \iff y = x^2 - 4.$$

x	y	$(x; y)$
-4	12	$(-4; 12)$
-3	5	$(-3; 5)$
-2	0	$(-2; 0)$
-1	-3	$(-1; -3)$
0	-4	$(0; -4)$
1	-3	$(1; -3)$
2	0	$(2; 0)$
3	5	$(3; 5)$
4	12	$(4; 12)$



Exemple 4.6

Montrez que $(1; 2)$ et $(\sqrt[3]{4}; -1)$ sont des solutions de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$ tandis que $(-3; -2)$ ne l'est pas.

Solution :

$(1; 2)$ est bien une solution de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$, car

$$\begin{array}{rcll} x^3y+6 & = & 2y^2 & \\ (1)^3(2)+6 & \stackrel{?}{=} & 2(2)^2 & \\ 8 & = & 8 & \text{est vraie.} \end{array}$$

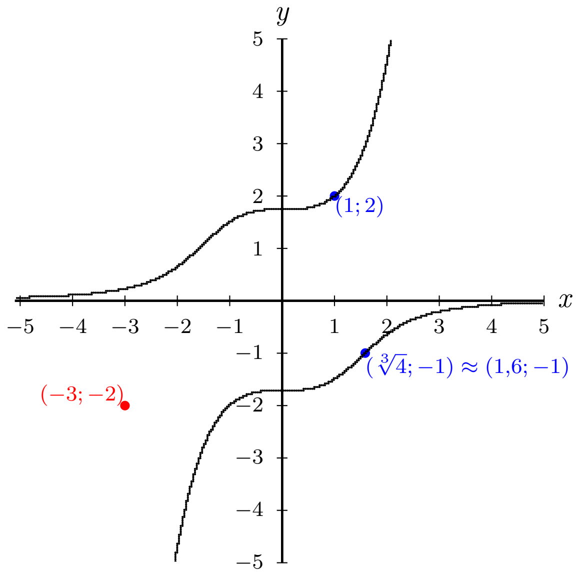
De la même façon, $(\sqrt[3]{4}; -1)$ est une solution de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$, car

$$\begin{array}{rcll} x^3y+6 & = & 2y^2 & \\ (\sqrt[3]{4})^3(-1)+6 & \stackrel{?}{=} & 2(-1)^2 & \\ 4(-1)+6 & \stackrel{?}{=} & 2 & \\ 2 & = & 2 & \text{est vraie.} \end{array}$$

Par contre, $(-3; -2)$ n'est pas une solution de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$, car

$$\begin{array}{rcll} x^3y+6 & = & 2y^2 & \\ (-3)^3(-2)+6 & \stackrel{?}{=} & 2(-2)^2 & \\ 60 & = & 8 & \text{est fausse.} \end{array}$$

La courbe présentée à la figure ci-dessous correspond à l'ensemble solution de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$. Elle est affichée dans une fenêtre où $x \in [-5; 5]$ et $y \in [-5; 5]$ et a été produite à l'aide d'un très grand nombre de points générés par ordinateur. On y voit que les solutions $(1; 2)$ et $(\sqrt[3]{4}; -1)$ correspondent à des points de la courbe tandis que le point $(-3; -2)$ n'étant pas une solution de l'équation, n'est pas sur la courbe.



Si on veut générer des solutions à la main, on peut mettre à profit le principe utilisé à l'exemple 4.5.

Des solutions de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$ sont construites en donnant d'abord des valeurs à x et en déterminant ensuite les valeurs y correspondantes. Contrairement à l'équation $y + 4 = x^2$, où pour chaque valeur de x fixée correspondait un unique y, lorsqu'on fixe la valeur de x dans l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$, on trouve plus d'une valeur pour y. Par exemple, si on pose $x = -2$, l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$ devient $-8y + 6 = 2y^2$ et cette dernière, qui est une équation quadratique, a deux solutions.

$$-8y + 6 = 2y^2 \iff y = -2 \pm \sqrt{7}$$

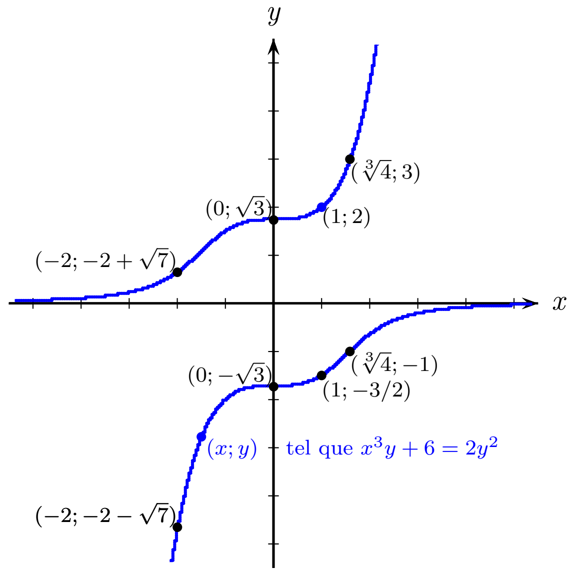
Puisque les solutions de cette équation quadratique en y sont $y = -2 \pm \sqrt{7}$, on trouve deux solutions $(-2; -2 + \sqrt{7})$ et $(-2; -2 - \sqrt{7})$ à l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$. En effet,

$$\begin{array}{ccll}
x^3y + 6 & = & 2y^2 & \\
(-2)^3(-2 + \sqrt{7}) + 6 & \stackrel{?}{=} & 2(-2 + \sqrt{7})^2 & \\
-8(-2 + \sqrt{7}) + 6 & \stackrel{?}{=} & 2(4 - 4\sqrt{7} + 7) & \\
22 - 8\sqrt{7} & = & 22 - 8\sqrt{7} & \text{est vraie.}
\end{array}$$

$(-2; -2 + \sqrt{7})$ est bien une solution de l'équation $x^3y + 6 = 2y^2$. De la même façon, on peut vérifier (*faites-le*) que $(-2; -2 - \sqrt{7})$ est aussi une solution de $x^3y + 6 = 2y^2$.

En générant de cette façon un grand nombre de solutions et en plaçant les points obtenus dans le plan cartésien, on produit une image graphique de l'équation.

x	éqn à résoudre	y	solutions
1	$y + 6 = 2y^2$	$-3/2$	$(1; -3/2)$
		2	$(1; 2)$
$\sqrt[3]{4}$	$4y + 6 = 2y^2$	-1	$(\sqrt[3]{4}; -1) \approx (1{,}6; -1)$
		3	$(\sqrt[3]{4}; 3) \approx (1{,}6; 3)$
-2	$-8y + 6 = 2y^2$	$-2 + \sqrt{7}$	$(-2; -2 + \sqrt{7}) \approx (-2; 0{,}65)$
		$-2 - \sqrt{7}$	$(-2; -2 - \sqrt{7}) \approx (-2; -4{,}65)$
0	$6 = 2y^2$	$\sqrt{3}$	$(0; \sqrt{3}) \approx (0; 1{,}7)$
		$-\sqrt{3}$	$(0; -\sqrt{3}) \approx (0; -1{,}7)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



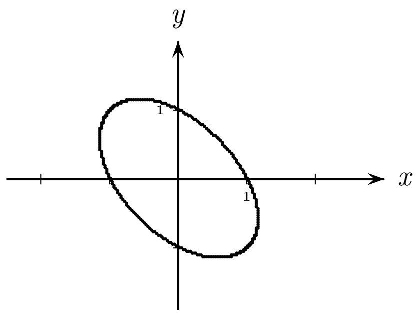
En résumé, un point $(x; y)$ est sur le graphique d'une équation si ses coordonnées satisfont l'équation et tout point dont les coordonnées satisfont l'équation est sur le graphique. Cette équivalence permet d'imager des formules algébriques à l'aide de graphiques et inversement, d'analyser les formes géométriques algébriquement.

Exercices

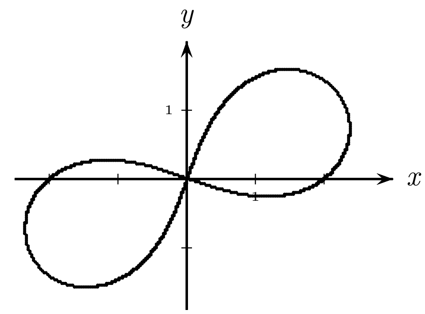
4.5 Sans résoudre l'équation $x^2 + y^2 = 20 + 2x + 4y$, déterminez lesquels parmi les couples $(4; 6)$, $(-3; 5)$ et $(-2; 2)$ en sont des solutions.

4.6 Déterminez s'il est plausible que les couples proposés soient des solutions de l'équation dont le graphique est donné.

(a) $(0; 0)$, $(0; -1)$ et $(-1; 0)$



(b) $(0; 0)$, $(1; 1)$ et $(-0{,}5; -1)$



4.7 Tracez le graphe correspondant à chacune des équations suivantes en trouvant une dizaine de points de son ensemble solution et en reliant les points par une courbe lisse.

(a) $y = x^2 + 3$
(b) $x = y^2 + 1$
(c) $2x - y = 3$
(d) $y = 3$
(e) $x = -2$
(f) $x^2 + y^2 = 25$

4.8 Tracez, à l'aide de votre calculatrice, le graphe de l'équation $y = \sqrt{12 + x}$ dans chacune des fenêtres suggérées et dites laquelle de ces fenêtres représentent le mieux la relation.

> **Rappel.** On considère un graphique comme satisfaisant lorsqu'il illustre clairement les caractéristiques principales d'une relation. Dans ce cas, il s'agit du domaine, de l'image, du zéro et de l'ordonnée à l'origine.

(a) $x \in [-10; 10]$ et $y \in [-6{,}67; 6{,}67]$ avec les graduations aux unités.
(b) $x \in [-100; 100]$ et $y \in [-100; 100]$ avec les graduations aux multiples de 10 unités.
(c) $x \in [-20; 30]$ et $y \in [-5; 10]$ avec les graduations aux multiples de 5 unités.

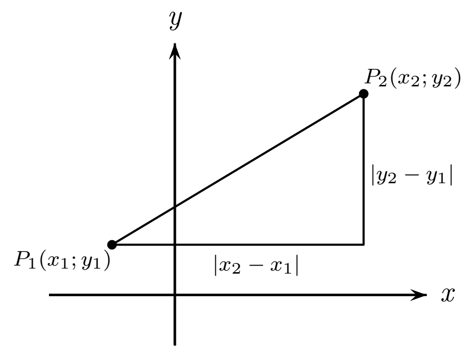
4.3 La distance entre deux points

Théorème 4.1 Soient $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$, deux points du plan cartésien (on suppose que les unités sont identiques en abscisse et en ordonnée). La distance entre les points P_1 et P_2 est donnée par la formule

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

▷ **Démonstration** À l'aide du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}(d(P_1,P_2))^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\end{aligned}$$



et, sachant que la distance $d(P_1,P_2)$ est une valeur positive ou nulle,

$$\begin{aligned}(d(P_1,P_2))^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &\Updownarrow \\ d(P_1,P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.\end{aligned}$$

◁

Exemple 4.7

Si les coordonnées sont données en mètres, quelle est la distance entre les points $(6; -3)$ et $(-5; -8)$?

Solution :

On pose $P_1(x_1; y_1) = (6; -3)$ et $P_2(x_2; y_2) = (-5, -8)$ et on calcule

$$d = \sqrt{[(-5) - 6]^2 + [(-8) - (-3)]^2} = \sqrt{(-11)^2 + (-5)^2} = \sqrt{146} \approx 12{,}08 \text{ m}.$$

On aurait pu poser $P_1(x_1; y_1) = (-5, -8)$ et $P_2(x_2; y_2) = (6; -3)$, et on aurait trouvé (*faites-le*) exactement la même distance.

Attention ! La distance ne dépend pas de la façon dont on désigne les points.

Exemple 4.8

Jean se situe 2 km au nord et 3 km à l'ouest d'une antenne de télécommunication. À quelle distance se situe Jean de l'antenne ?

Solution :

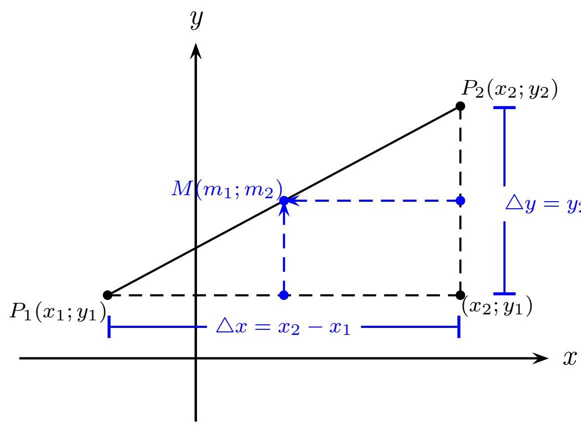
Pour les besoins de la modélisation, on suppose que l'antenne est située en $(0; 0)$, que l'axe vertical pointe vers le nord et que l'axe horizontal pointe vers l'est. Les coordonnées de Jean sont alors $(-3; 2)$ et sa distance à l'antenne, qui est à l'origine, est

$$d = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3{,}6 \text{ km}$$

Théorème 4.2 Le **point milieu** du segment de droite liant les points $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$ est le point M situé à égale distance des points P_1 et P_2. Ses coordonées sont

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

▷ **Démonstration**



Comme le point $M(m_1; m_2)$ est situé à égale distance des points P_1 et P_2,

$$\begin{aligned} m_1 &= x_1 + \tfrac{1}{2}\triangle x = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1 = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 = \frac{x_1+x_2}{2} \\ m_2 &= y_1 + \tfrac{1}{2}\triangle y = y_1 + \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_1 = \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 = \frac{y_1+y_2}{2}. \end{aligned}$$

Le point milieu du segment de droite reliant $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$ est donc le point de coordonnées

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

◁

Exemple 4.9

Trouvez les coordonnées du point milieu du segment de droite liant les points $(-6; -3)$ et $(5, -8)$.

Solution :

En posant $P_1 = (-6; -3)$ et $P_2 = (5; -8)$, on trouve

$$M = \left(\frac{(-6)+5}{2}; \frac{(-3)+(-8)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{2}\right)$$

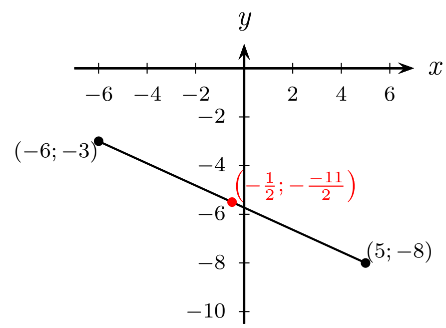
Validation. On peut vérifier que $d(P_1,M) = d(M,P_2)$:

$$d(P_1,M) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - (-6)\right)^2 + \left(-\frac{11}{2} - (-3)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{2}$$

et

$$d(M,P_2) = \sqrt{\left(5 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left((-8) - \left(-\frac{11}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{2}$$

Le point $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{2}\right)$ sépare donc le segment liant $(-6;-3)$ à $(5;-8)$ en deux segments de même longueur.
En principe, on devrait aussi vérifier que les trois points sont bien sur une même droite. Les droites seront vues plus en détail à la section 4.5.

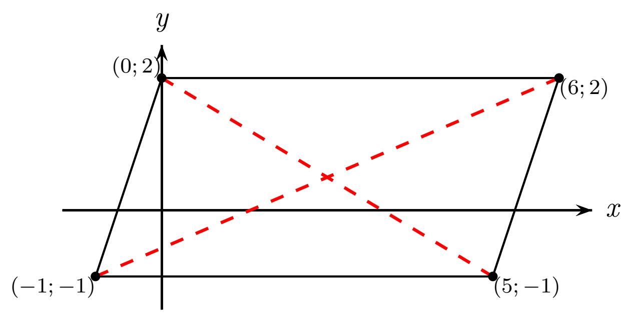


Exemple 4.10

Montrez que les diagonales du parallélogramme de sommets $(0;2)$, $(6;2)$, $(-1;-1)$ et $(5;-1)$ se coupent en leur milieu.

Solution :

Afin de se situer, on place d'abord les sommets dans le plan.



Le point milieu du segment reliant les points $(-1;-1)$ et $(6;2)$ est

$$M_1 = \left(\frac{(-1)+6}{2}; \frac{(-1)+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

et le point milieu de celui reliant les points $(0;2)$ et $(5;-1)$ est

$$M_2 = \left(\frac{0+5}{2}; \frac{2+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Comme les points milieu sont identiques, les diagonales se coupent en leur milieu.

Exercices

4.9 Trois des sommets d'un rectangle sont $(4;2)$, $(-3;-1)$ et $(4;-1)$.

(a) Trouvez les coordonnées du quatrième sommet.

(b) Si on suppose que les coordonnées sont données en mètres, quelle est la longueur d'une diagonale du rectangle ?

4.10 Les trois sommets d'un triangle sont $A(0;0)$, $B(3;4)$ et $C(9;0)$.

(a) Si on suppose que les coordonnées sont données en centimètres, quel est le périmètre du triangle ?

(b) Déterminez les coordonnées du point d'intersection de la perpendiculaire au segment reliant A et C qui passe par B.

(c) Si on suppose que les coordonnées sont données en centimètres, quelle est l'aire du triangle de sommets A, B et C ?

> **Rappel.** L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h est $\frac{b \cdot h}{2}$.

4.11 Utilisez le théorème de Pythagore pour déterminer si les points $(0;0)$, $(9;0)$ et $(3;4)$ forment un triangle rectangle.

4.12 Déterminez les coordonnées du centre du cercle dont le segment reliant les points $A(-1;2)$ et $B(3{,}8)$ forme un diamètre.

4.13 Trouvez la valeur y telle que le point $(-1;y)$ est situé à 7 unités de $(4;-6)$.

4.14 Partant d'une même intersection, deux cyclistes empruntent des directions perpendiculaires l'une de l'autre. Le cycliste le plus lent roule à une vitesse moyenne de 12 km/h. Le cycliste le plus rapide roule à une vitesse moyenne de 20 km/h. S'ils quittent l'intersection à 10 h, quelle heure sera-t-il lorsqu'ils seront séparés par une distance de 40 km à vol d'oiseau ?

4.4 Les cercles

La formule de distance entre deux points, en plus de son application directe, s'avère très utile pour trouver une équation à partir d'une figure géométrique telle qu'un cercle.

Définition 4.1 Le **cercle** est le lieu géométrique de tous les points situés à égale distance d'un point nommé centre. Cette distance est appelé le **rayon** du cercle.

Rappel. En mathématiques, un **lieu géométrique** est un ensemble de points satisfaisant certaines conditions, dans ce cas, il s'agit des points du cercle.

Exemple 4.11

À l'aide de la formule de distance entre deux points, déterminez l'équation du cercle centré en $(1;3)$ qui est de rayon 2. Donnez une réponse sans radicaux.

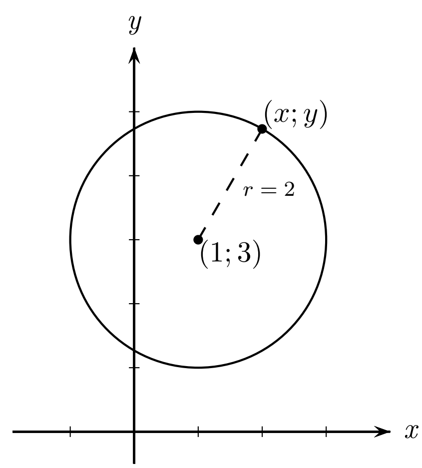
Solution :

Pour que $(x;y)$ soit un point du cercle, sa distance du point $(1;3)$ doit être 2, c'est-à-dire

$$2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

En élevant au carré les deux côtés de l'égalité, on obtient l'équation cherchée.

$$4 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$



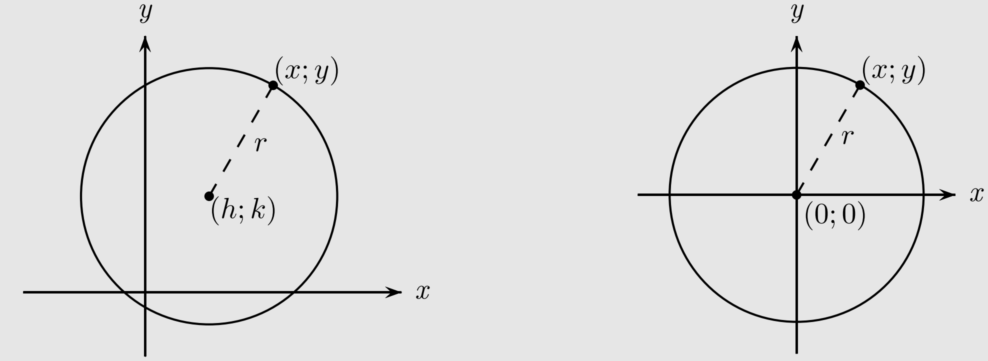
Lorsqu'on dit que $4 = (x-1)^2 + (y-3)^2$ est l'équation d'un cercle de rayon 2 centré en $(1;3)$, on dit deux choses :

1. Si un point est sur le cercle, alors ses coordonnées $(x;y)$ en satisfont l'équation.
2. Si $(x;y)$ satisfait l'équation, alors $(x;y)$ est un point du cercle.

Théorème 4.3 L'**équation canonique d'un cercle** centré en $(h;k)$ de rayon r est

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En particulier, si le cercle est centré à l'origine, son équation est $x^2 + y^2 = r^2$.



$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $\qquad$ $x^2+y^2=r^2$

Rappel. Le périmètre d'un cercle est appelé sa circonférence et la mesure de la surface du cercle est son aire. Les formules de circonférence et d'aire d'un cercle de rayon r sont les suivantes.

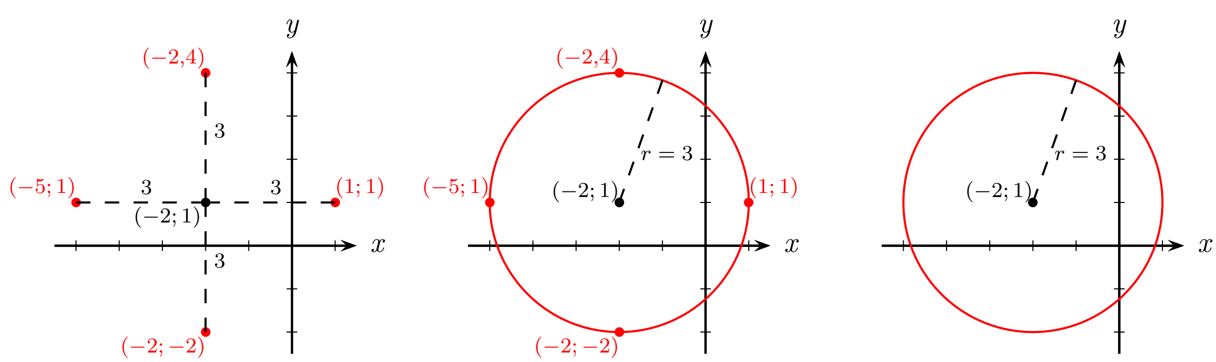
Circonférence d'un cercle de rayon r	$C = 2\pi r$
Aire d'un cercle de rayon r	$A = \pi r^2$

Exemple 4.12

Tracez le cercle centré en $(-2;1)$ qui est de rayon 3 et déterminez son équation canonique, sa circonférence et son aire.

Solution :

Pour tracer le cercle, on place d'abord le centre $(-2;1)$. Puisque le rayon est 3, on repère, par exemple, quatre points du cercle en se déplaçant du centre de 3 unités vers la droite, 3 vers la gauche, 3 vers le haut et 3 vers le bas. On trace ensuite un cercle passant par ces quatre points.



On remplace les valeurs $h=-2$, $k=1$ et $r=3$ dans la forme canonique et on simplifie

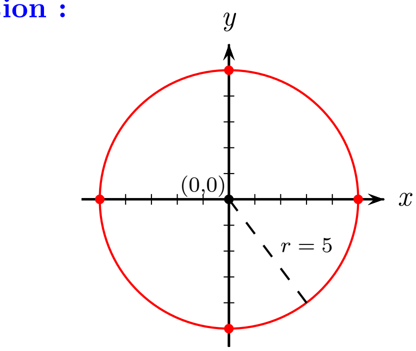
$$(x-(-2))^2+(y-1)^2=3^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

Sa circonférence est $2\pi r|_{r=3} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 18{,}85$ et son aire est $\pi r^2|_{r=3} = \pi(3)^2 = 9\pi \approx 28{,}27$.

Exemple 4.13

Tracez le graphique du cercle centré à l'origine qui est de rayon 5 et déterminez son équation.

Solution :



On remplace les valeurs $h = 0$, $k = 0$ et $r = 5$ dans la forme canonique et on simplifie.

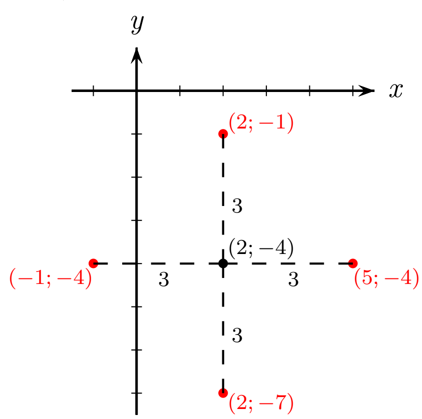
$$\begin{aligned} (x-0)^2 + (y-0)^2 &= 5^2 \\ &\Updownarrow \\ x^2 + y^2 &= 25. \end{aligned}$$

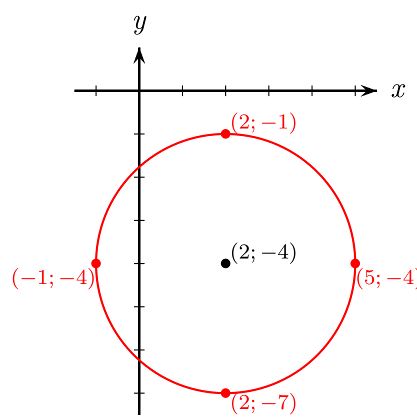
Exemple 4.14

Trouvez le centre et le rayon du cercle d'équation $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$. Tracez son graphique.

Solution :

Si $x - 2 = x - h$, on en déduit que $h = 2$ et si $y - k = y + 4$ alors $k = -4$ car $y + 4 = y - (-4)$. On cherche une valeur positive pour le rayon et puisque $9 = 3^2$, on en conclut que $r = 3$. Le centre est donc $(2; -4)$ et le rayon est 3.





Si on effectue les opérations de mise au carré et qu'on simplifie, on obtient une nouvelle forme pour l'équation du cercle de l'exemple 4.14.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+4)^2 &= 9 && \text{forme canonique} \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 &= 9 && \text{mise au carré de } x-2 \text{ et de } y+4 \\ x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20 &= 9 && \text{regroupement des termes constants} \\ x^2 - 4x + y^2 + 8y + 11 &= 0 && \text{soustraction de 9 des deux côtés} \end{aligned}$$

Cette réécriture suggère qu'une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

peut être représentée par un cercle. Ainsi, pour pouvoir tracer un graphique plus facilement à partir d'une équation du type $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, on peut en trouver la forme canonique équivalente afin de repérer les paramètres (centre et rayon) du cercle.

Exemple 4.15

Trouvez le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2-6x+y^2-25=0$.

Solution :

Pour trouver la forme canonique du cercle, on doit compléter les carrés.

$$\begin{aligned} x^2-6x+y^2-25=0 &\iff x^2-6x+y^2=25 \\ &\iff [x^2-6x]+[y^2]=25 \\ &\iff [(x-3)^2-9]+[(y-0)^2]=25 \\ &\iff (x-3)^2-9+(y-0)^2=25 \\ &\iff (x-3)^2+(y-0)^2=25+9 \\ &\iff (x-3)^2+(y-0)^2=34 \end{aligned}$$

Puisque la dernière équation correspond à la forme canonique d'un cercle, le centre du cercle est $(3;0)$ et son rayon est $\sqrt{34}$.

En géométrie, un cercle est dit **inscrit** à un polygone s'il est tangent à tous les côtés du polygone. Un cercle est dit **circonscrit** à un polygone s'il passe par tous les sommets du polygone. Ce polygone est alors dit inscrit dans le cercle.

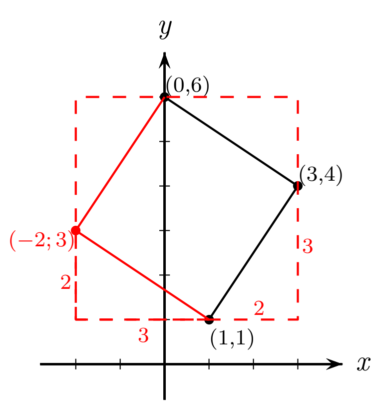
Exemple 4.16

Les points $(0;6)$, $(3;4)$ et $(1;1)$ sont trois des sommets d'un carré.

(a) Déterminez les coordonnées du quatrième sommet.
(b) Trouvez l'équation du cercle inscrit au carré.
(c) Trouvez l'équation du cercle circonscrit au carré.
(d) Si les coordonnées sont données en mètres, déterminez l'aire de chacune des figures.

Solution :

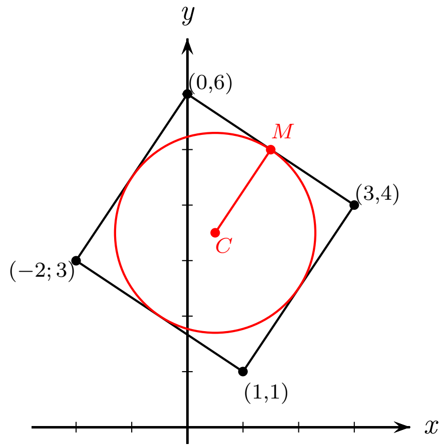
(a) On situe les trois points dans le plan cartésien, on trace des parallèles et on utilise des symétries pour trouver que le quatrième sommet est de coordonnées $(-2;3)$.



(b) Le centre du cercle inscrit correspond au point milieu d'une ou l'autre des diagonales du carré. Si on utilise les sommets $(0;6)$ et $(1;1)$, on trouve

$$C = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{6+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Le rayon du cercle inscrit sera la plus petite distance entre le centre C et un côté du carré.



On utilise les sommets $(0;6)$ et $(3{,}4)$ pour trouver le centre du segment,

$$M = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; 5\right).$$

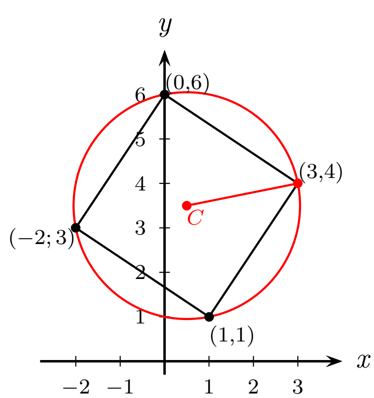
Le rayon cherché est

$$d(C,M) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 5\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

et l'équation du cercle est alors

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

(c) Le centre du cercle est toujours le point milieu d'une diagonale du carré, C, mais le rayon est, cette-fois, obtenu en calculant la distance de C à un des sommets du carré.



On utilise le sommet $(3;4)$ pour trouver le rayon

$$d(C,(3;4)) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

L'équation du cercle est alors

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$$

(d) Le rayon du cercle inscrit est $\frac{\sqrt{13}}{2}$, son aire est donc $\frac{13\pi}{4} \approx 10{,}21$ m^2.

Le rayon du cercle circonscrit est $\sqrt{\frac{13}{2}}$, son aire est donc $\frac{13\pi}{2} \approx 20{,}42$ m^2.

Le côté du carré mesure

$$d((0;6),(3;4)) = \sqrt{(0-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{13}.$$

L'aire du carré est donc 13 m^2.

Ces mesures, $10{,}21 < 13 < 20{,}42$, sont cohérentes avec l'imbrication des figures.

Exercices

4.15 Déterminez l'équation canonique du cercle de centre et de rayon donnés.

(a) Centre : $(0; 0)$, $r = 7$
(b) Centre : $(2; 3)$, $r = 4$
(c) Centre : $(-1; 2)$, $r = \sqrt{2}$
(d) Centre : $(-3; -1)$, $r = 10$
(e) Centre : $(-2; 0)$, $r = 3$
(f) Centre : $(0; -1)$, $r = \sqrt{5}$

4.16 Déterminez le centre et le rayon du cercle d'équation donnée.

(a) $x^2 + y^2 = 36$
(b) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 121$
(c) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$
(d) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
(e) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
(f) $(x + 2)^2 + y^2 = 10$
(g) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$
(h) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$
(i) $x^2 + 8x + y^2 + 10y + 15 = 0$

4.17 À l'aide de la commande pour compléter un carré de votre calculatrice, déterminez le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 - 3{,}2x = 5{,}1y - y^2 + 4{,}5$.

4.18 Un cercle de rayon 8 est centré en $(-3; 4)$. Trouvez les abscisses des deux points du cercle dont l'ordonnée est

(a) 8
(b) 5,3
(c) -2

4.19 Déterminez l'équation du cercle dont le segment joignant les points $A(-1; 2)$ et $B(3; 8)$ forme un diamètre.

4.20 Déterminez l'équation du cercle centré en $(3; 4)$ qui est tangent à l'axe des x. Quelle est sa circonférence ? Son aire ?

> **Rappel.** Une droite est tangente à un cercle lorsqu'elle intersecte le cercle en un seul point. Une tangente est toujours perpendiculaire au rayon du cercle au point de tangence.

4.21 Les points $(2; 3)$, $(6; 3)$ et $(6; -1)$ sont trois des sommets d'un carré.

(a) Déterminez les coordonnées du quatrième sommet.
(b) Trouvez l'équation du cercle inscrit au carré.

> **Rappel.** Un cercle est dit inscrit à un polygone s'il est tangent à tous les côtés de ce polygone.

(c) Trouvez l'équation du cercle circonscrit au carré.

> **Rappel.** Un cercle est dit circonscrit à un polygone s'il passe par tous les sommets du polygone.

4.22 Les points $(-2; 3)$, $(7; 3)$ et $(7; 1)$ sont trois des sommets d'un rectangle.

(a) Déterminez les coordonnées du quatrième sommet.
(b) Trouvez l'équation du cercle circonscrit au rectangle.

4.5 Les droites

Théorème 4.4 Toute droite tracée dans un système de coordonnées rectangulaires possède une représentation générale comme équation linéaire à deux variables de la forme

$$Ax + By = C$$

où x et y sont des variables et où A, B et C sont des nombres réels tels que A et B ne sont pas simultanément nuls.

Pour tracer une droite, on détermine les coordonnées de deux points qui satisfont l'équation de la droite. On utilise souvent les points d'intersection avec les axes car ils sont faciles à trouver. Il peut être utile, à des fins de validation, de trouver un troisième point de la droite. Si les trois points calculés ne sont pas alignés sur une même droite, une erreur s'est probablement glissée dans les calculs.

Exemple 4.17

Tracez la droite d'équation $4x - 3y = 12$.

Solution :

On trouve les intersections avec les axes et on trace une ligne passant par ces points. Si on veut, on détermine un troisième point qui satisfait l'équation et on vérifie qu'il est situé sur la même droite.

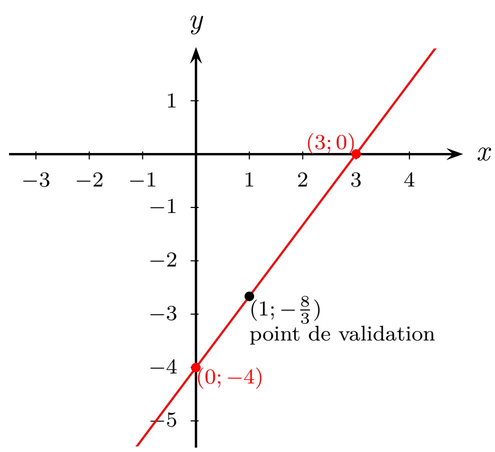
Pour obtenir l'intersection avec l'axe des x, on pose $y = 0$,

$$4x - 3(0) = 12 \iff x = 3.$$

Pour obtenir intersection avec l'axe des y, on pose $x = 0$,

$$4(0) - 3y = 12 \iff y = -4.$$

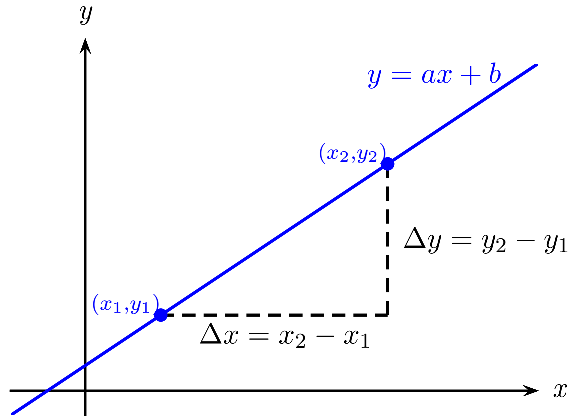
Validation. Un troisième point est obtenu en posant, par exemple, $x = 1$ et en trouvant l'ordonnée correspondante $4(1) - 3y = 12 \iff y = -\frac{8}{3}$. On vérifie que $(1; -\frac{8}{3})$ est bien sur la droite tracée.



Définition 4.2 Si $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ sont deux points d'une même droite tels que $x_1 \neq x_2$, la **pente** de la droite est donnée par

$$a = \frac{\text{variation en } y}{\text{variation en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pente[i] fournit une mesure de l'inclinaison de la droite.



Exemple 4.18

Tracez la droite passant par les deux points donnés et calculez sa pente.

(a) $(-1; 2)$ et $(4; 7)$

(b) $(-3; 1)$ et $(2; -2)$

(c) $(-1; 3)$ et $(4; 3)$

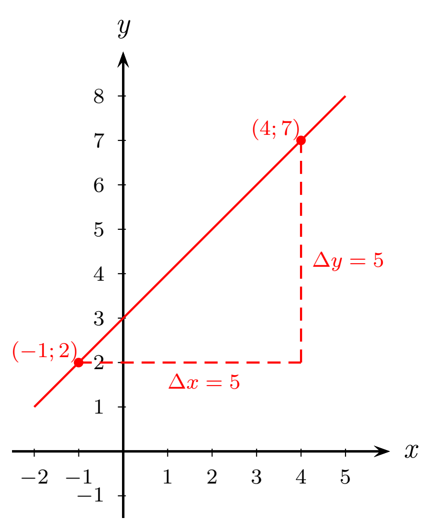
(d) $(1; -1)$ et $(1; 3)$

Solution :

(a) Si on pose $(x_1; y_1) = (-1; 2)$ et $(x_2; y_2) = (4; 7)$, on trouve la pente

$$a = \frac{7-2}{4-(-1)} = \frac{5}{5} = 1.$$

La pente de la droite est 1, indiquant que pour toute augmentation de 1 unité en x, il y a une augmentation de 1 unité en y. La pente est donc le taux (un rapport) de variation de y par rapport à x. Ici, la pente est positive et la droite est croissante.



i. Dans plusieurs ouvrages, on utilise la lettre m pour désigner la pente d'une droite. Nous avons plutôt choisi d'utiliser la lettre a comme il est d'usage dans les écoles secondaires du Québec.

Il faut noter qu'on aurait pu choisir de poser $(x_1; y_1) = (4; 7)$ et $(x_2; y_2) = (-1; 2)$. Le calcul de la pente donne la même valeur.

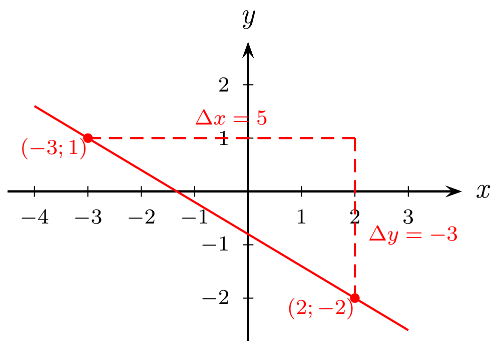
$$a = \frac{2-7}{(-1)-4} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Peu importe lequel des points est désigné par $(x_1; y_1)$ et lequel est désigné par $(x_2; y_2)$, on trouvera toujours la même valeur pour la pente. Il faut toutefois faire attention de ne pas soustraire selon un ordre au numérateur et utiliser un ordre différent au dénominateur.

$$\xcancel{\frac{7-2}{(-1)-4} = \frac{5}{-5}} = -1.$$

(b) On pose $(x_1; y_1) = (-3; 1)$ et $(x_2; y_2) = (2; -2)$ et on trouve la pente

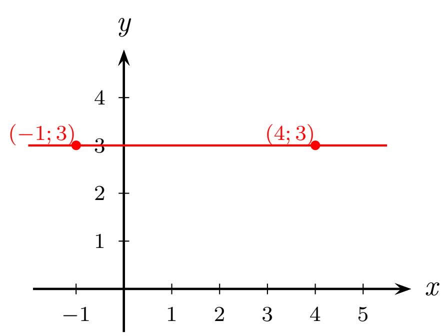
$$a = \frac{-2-1}{2-(-3)} = \frac{-3}{5} = -0{,}6.$$



La pente de la droite est $-0{,}6$, indiquant que pour toute augmentation de 1 unité en x, il y a une diminution de 0,6 unité en y. La pente est négative et la droite est décroissante.

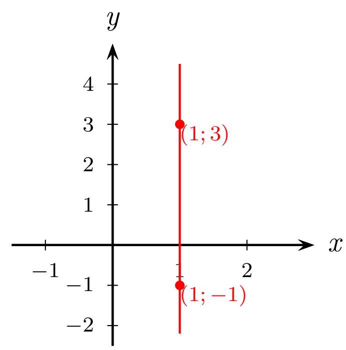
(c) On pose $(x_1; y_1) = (-1; 3)$ et $(x_2; y_2) = (4; 3)$ et on trouve la pente

$$a = \frac{3-3}{4-(-1)} = \frac{0}{5} = 0.$$



La pente de la droite est 0, indiquant que quelle que soit l'augmentation en x, il n'y a aucun changement en y. La pente est nulle et la droite est horizontale.

(d) La droite est verticale.



La pente de la droite passant par les points $(1;-1)$ et $(1;3)$ n'est pas définie car les abscisses sont identiques : $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$. La définition 4.2 ne peut être utilisée que si $x_1 \neq x_2$. Si on pose tout de même $(x_1;y_1) = (1;-1)$ et $(x_2;y_2) = (1;3)$ et qu'on tente de calculer la pente à l'aide de la formule de la définition 4.2, il y aura une division par zéro.

$$a = \frac{3-(-1)}{1-1} = \frac{4}{0} \notin \mathbb{R}.$$

La pente d'une droite verticale n'est pas définie et, selon le contexte, on dira que sa pente est *indéfinie* ou *indéterminée*.

L'exemple précédent illustre qu'une droite de pente positive est croissante tandis qu'une droite de pente négative est décroissante. Une droite de pente nulle est horizontale et la pente d'une droite verticale est indéfinie. Un résumé sur l'interprétation de la pente est présenté au tableau 4.2 (p. 175).

Forme pente-ordonnée
La forme pente-ordonnée de l'équation de la droite de pente a et d'ordonnée à l'orgine b est

$$y = ax + b$$

Exemple 4.19

Trouvez l'équation de la droite passant par les points suivants.

(a) $(-2;3)$ et $(1;-3)$

(b) $(-3;1)$ et $(2;5)$

Solution :

(a) On calcule d'abord la pente

$$a = \frac{3-(-3)}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$$

L'équation de la droite cherchée sera donc de la forme $y = -2x + b$.

Puisque $(-2;3)$ est un point de la droite, ses coordonnées doivent satisfaire l'équation de la droite. On remplace donc ses coordonnées dans l'équation $y = -2x + b$ pour déterminer la valeur b.

$$y = -2x + b\big|_{x=-2,y=3} \iff 3 = -2(-2) + b \iff b = -1$$

L'équation de la droite est alors $y = -2x - 1$.

Validation. On remplace l'abscisse de chacun des points, $(-2;3)$ et $(1;-3)$, dans l'équation et on vérifie si on obtient bien l'ordonnée correspondante.

$$-2x - 1\big|_{x=-2} = -2(-2) - 1 = 3$$

$$-2x-1|_{x=1}=-2(1)-1=-3$$

(b) On calcule d'abord la pente

$$a=\frac{1-5}{-3-2}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$$

L'équation de la droite cherchée sera donc de la forme $y=\frac{4}{5}x+b$.

Puisque $(-3;1)$ est un point de la droite, on remplace ses coordonnées dans l'équation $y=\frac{4}{5}x+b$ pour déterminer la valeur b.

$$y=\frac{4}{5}x+b\Big|_{x=-3,y=1}\iff 1=\frac{4}{5}(-3)+b\iff b=\frac{17}{5}$$

L'équation de la droite est alors $y=\frac{4}{5}x+\frac{17}{5}$.

Validation. On vérifie (*faites-le*) que chacun des points $(-3;1)$ et $(2;5)$ satisfont l'équation de la droite.

Forme pente-point

La forme pente-point de l'équation de la droite passant par un point de coordonnées $(x_0;y_0)$ et de pente a est

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0).$$

Cette forme est très utile et est beaucoup utilisée dans le cours de calcul différentiel, car elle permet, entre autres, de déterminer rapidement l'équation d'une droite lorsqu'on connait sa pente et un de ses points.

Exemple 4.20

À l'aide de la forme pente-point, trouvez l'équation de la droite dont la pente et un point sont donnés.

(a) $a=-2$ et $(1;-3)$

(b) $a=\frac{4}{5}$ et $(2;5)$

Solution :

(a) On pose $x_0=1$ et $y_0=-3$, avec $a=-2$, et on obtient l'équation

$$y-(-3)=-2(x-1)\iff y+3=-2(x-1).$$

Validation. En isolant y, on peut vérifier que l'équation est équivalente à celle de l'exemple précédent.

$$y+3=-2(x-1)\iff y+3=-2x+2\iff y=-2x-1.$$

On peut aussi vérifier que $(1;-3)$ satisfait bien l'équation $y=-2x-1$ car $-2(1)-1=-3$.

(b) On pose $x_0=2$ et $y_0=5$, avec $a=\frac{4}{5}$, et on obtient l'équation

$$y-5=\frac{4}{5}(x-2).$$

Validation. En isolant y, on peut vérifier (*faites-le*) que l'équation est équivalente à celle de l'exemple précédent.

Théorème 4.5 Soit deux droites non verticales D_1 et D_2 de pentes respectives a_1 et a_2,

$$\begin{aligned} D_1 \parallel D_2 \quad &\iff \quad a_1 = a_2 \\ D_1 \perp D_2 \quad &\iff \quad a_1 \cdot a_2 = -1 \end{aligned}$$

Les symboles $\parallel$ et $\perp$ signifient respectivement « est parallèle à » et « est perpendiculaire à ».

Dans le cas où les droites sont perpendiculaires on pourrait aussi écrire

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \text{ ou } a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

Ainsi, deux droites sont perpendiculaires lorsque la pente de l'une des droites est l'opposé de l'inverse de celle de l'autre droite.

Exemple 4.21

Déterminez l'équation de la droite qui passe par le point $(-4; -1)$ et qui est

(a) parallèle

(b) perpendiculaire

à la droite d'équation $y = 3 - 2x$.

Solution :

(a) La pente de la parallèle est identique à celle de la droite $y = 3 - 2x$. Comme cette pente est -2 et que la droite cherchée doit passer par $(-4; -1)$ on trouve, à l'aide de la forme pente-point,

$$y - (-1) = -2(x - (-4)) \iff y + 1 = -2(x + 4) \iff y = -2x - 9.$$

(b) La pente de la perpendiculaire est l'opposé de l'inverse de celle de la droite $y = 3 - 2x$: $-\left(\frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{2}$. Avec le point $(-4; -1)$, on trouve

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - (-4)) \iff y + 1 = \frac{1}{2}(x + 4) \iff y = \frac{1}{2}x + 1.$$

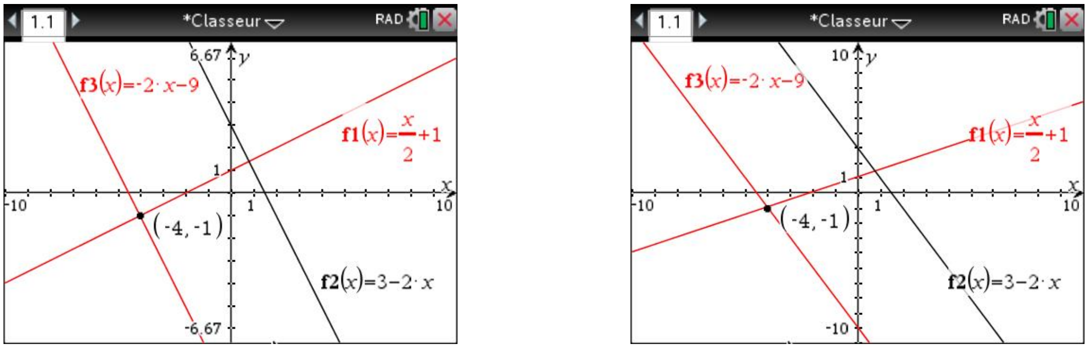
Validation. On peut vérifier que les relations sont bien respectées en traçant les graphes à l'aide de la calculatrice.

Attention ! Les échelles en abscisse et en ordonnée doivent être identiques pour que les angles ne soient pas déformés.

Avec la TI... Le *zoom standard* de la calculatrice Nspire CX produit une fenêtre où $x \in [-10; 10]$ et $y \in [-6{,}67; 6{,}67]$ afin de respecter les dimensions 3:2 de l'écran. Les échelles sont ainsi identiques en abscisse et en ordonnée.

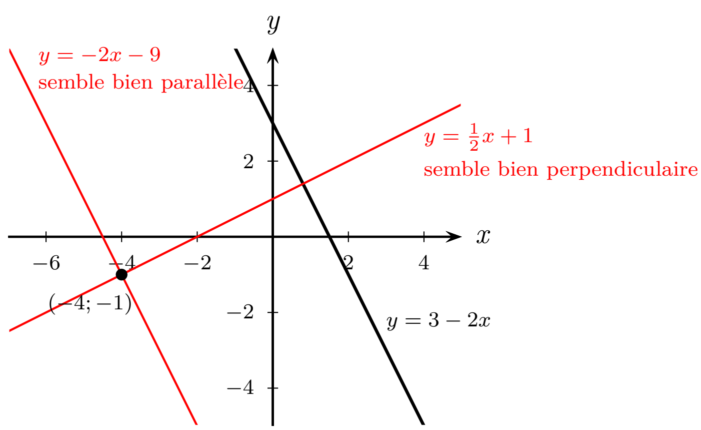
Si on change la fenêtre pour autre chose, par exemple, pour $x \in [-10; 10]$ et $y \in [-10; 10]$, les angles seront déformés. Dans la figure 4.1(b), les longueurs associées aux graduations sont différentes et les angles sont déformés.

Quoi écrire ? Pour consigner par écrit votre validation graphique, la reproduction devrait contenir les informations pertinentes et quelques courtes phrases résumant vos observations. Un exemple de consignation est donné à la figure ci-dessous.



((a)) Graduations de longueurs identiques ((b)) Graduations de longueurs différentes

FIGURE 4.1 – L'effet du choix de la fenêtre sur les angles



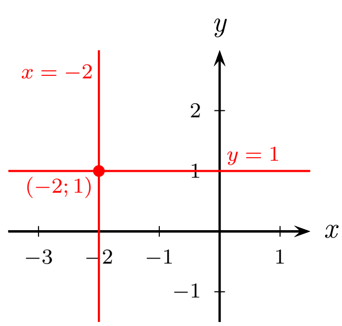
Attention ! Une droite verticale est perpendiculaire à une droite horizontale.

Exemple 4.22

Trouvez l'équation de la droite verticale et celle de la droite horizontale qui passent par le point $(-2; 1)$.

Solution :

Pour s'aider, on trace un graphique.



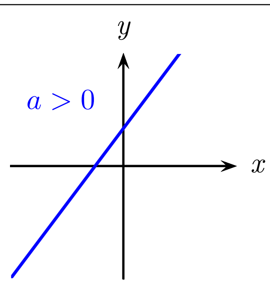
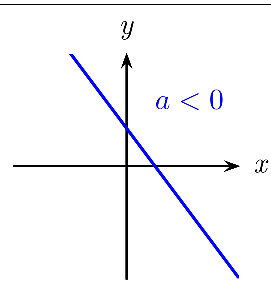
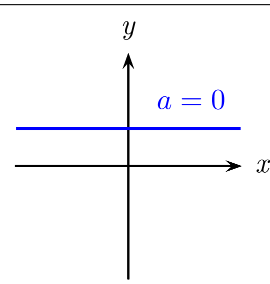
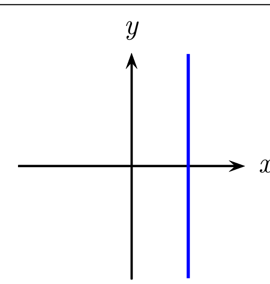
L'équation de la droite verticale qui passe par le point $(-2; 1)$ est $x = -2$, tandis que celle de la droite horizontale est $y = 1$.

TABLEAU 4.1 – Les équations d'une droite, résumé

forme pente-ordonnée	$y = ax + b$	pente a, ordonnée à l'origine b
forme pente-point	$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$	pente a, point $(x_0; y_0)$ de la droite
forme générale	$Ax + By = C$	A et B non simultanément nuls
droite horizontale	$y = b$	pente nulle
droite verticale	$x = c$	pente non définie

On suppose que x et y sont des variables réelles tandis que a, b, c, x_0, y_0, A, B et C sont des nombres réels.
Dans ce contexte, on considère les équations $y = b$ et $x = c$ comme des équations à deux variables : $y = b \Leftrightarrow 0x + y = b$ et $x = c \Leftrightarrow x + 0y = c$.

TABLEAU 4.2 – La pente, résumé

droite croissante	droite décroissante	droite horizontale	droite verticale
			
pente positive	pente négative	pente nulle	pente indéfinie

Exercices

4.23 Calculez, lorsque possible, la pente de la droite passant par les points donnés. Tracez la droite à la main et précisez ensuite si elle est croissante, décroissante, horizontale ou verticale.

(a) $(-3; -2)$ et $(2; 10)$

(b) $(-4; 6)$ et $(2; -2)$

(c) $(-2; 1)$ et $(-2; -5)$

(d) $(3; 5)$ et $(-3; 5)$

4.24 Dans le système métrique, l'eau gèle à 0 °C et bout à 100 °C (au niveau de la mer). Cette unité de mesure est d'usage courant à travers le monde à l'exception de quelques pays, dont les États-Unis, qui utilisent toujours l'échelle Fahrenheit.

Dans l'échelle de température en Fahrenheit (°F), le point de congélation de l'eau est à 32 °F et le point d'ébullition est à 212 °F.

(a) Les échelles de température en Fahrenheit et en Celsius ont une relation linéaire. Si f désigne la température en Fahrenheit et c désigne celle en Celsius, déterminez une équation linéaire qui décrit f en fonction de c. Tracez son graphe.

(b) Si une famille de Montréal règle le thermostat à 20 °C, cela correspond à combien en Fahrenheit ? Cette dernière correspond à quoi sur le graphe tracé en (a) ?

(c) S'il fait 100 °F à Dallas, cela correspond à combien en Celsius ? Cette dernière valeur correspond à quoi sur le graphe tracé en (a) ?

(d) La pente de la droite trouvée en (a) nous dit quoi dans le contexte ?

(e) Les échelles en Celsius et en Fahrenheit coïncident à quelles températures ?

4.25 Tracez la droite d'équation donnée.

(a) $y = 2x - 3$

(b) $2x + 3y = 6$

(c) $2x - 6 = 0$

4.26 Déterminez l'équation de la droite qui satisfait aux conditions données. Déterminez son équation sous la forme pente-point et, ensuite, sous la forme pente-ordonnée.

(a) De pente 2 et passant par $(3; 1)$

(b) De pente -2 et passant par $(-3; 1)$

(c) De pente $\frac{2}{3}$ et passant par l'origine

(d) Passant par les points $(4; -2)$ et $(-1; -7)$

(e) Passant par les points $(3; -1)$ et $(2; 2)$

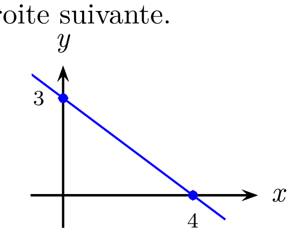
(f) Passant par les points $(-2; 3)$ et $(4; 3)$

(g) Passant par les points $(5; -2)$ et $(5; 6)$

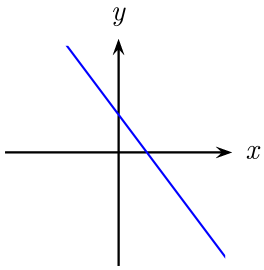
(h) Passant par $(-3; 2)$ et d'ordonnée à l'origine -5

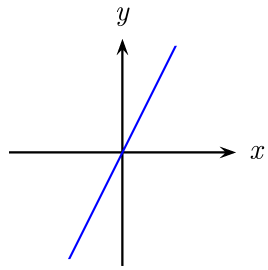
(i) D'abscisse à l'origine 5 et d'ordonnée à l'origine -1

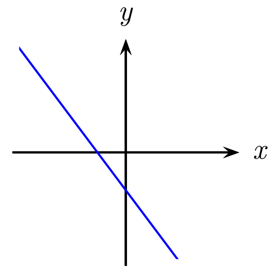
4.27 Déterminez l'équation de la droite suivante.



4.28 En examinant le graphe de la droite $y = ax + b$ donnée, déterminez si $a < 0$, $a > 0$ ou $a = 0$ et si $b < 0$, $b > 0$ ou $b = 0$.

(a) 

(b) 

(c) 

4.29 Esquissez le graphique d'une droite $y = ax + b$ ayant les paramètres donnés.

(a) $a > 0$ et $b < 0$ (b) $a = 0$ et $b < 0$ (c) $a > 0$ et $b > 0$

4.30 Tracez le graphique des droites d'équations données.

(a) $y = -2$ (c) $x = -1$ (e) $y = 0$
(b) $y = 3$ (d) $x = 2$ (f) $x = 0$

4.31 Réécrivez, lorsque possible, l'équation de droite donnée sous la forme pente-ordonnée. À l'aide de cette réécriture, déterminez la valeur de la pente et celle de l'ordonnée à l'origine. Grâce à ces paramètres (pente et ordonnée à l'origine), tracez le graphe de la droite.

(a) $8x - 4y = 12$ (b) $5y - 10 = 0$ (c) $2x - 6 = 0$

4.32 Déterminez l'équation de la droite qui passe par le point donné et qui est parallèle à la droite d'équation donnée.

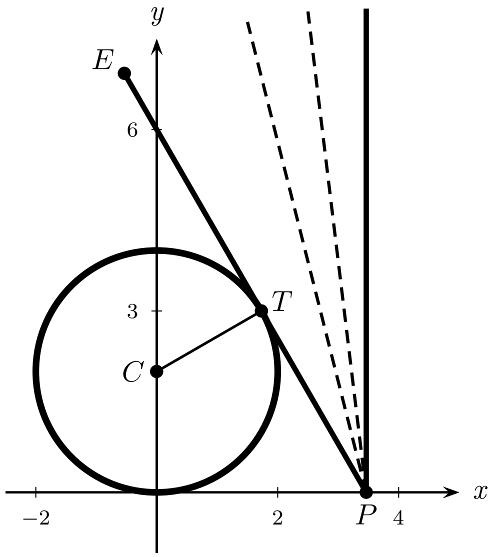
(a) $(3; 2)$ et $y = 2x + 1$ (b) $(2; -1)$ et $3y = 2x + 1$ (c) $(-1; -3)$ et $x = 4$

4.33 Déterminez l'équation de la droite qui passe par le point donné et qui est perpendiculaire à la droite d'équation donnée.

(a) $(1; 5)$ et $y = 3x - 1$ (c) $(3; 1)$ et $y = 2 - x$ (e) $(2; 3)$ et $x = 1$
(b) $(1; -2)$ et $y = 4$ (d) $(-3; 1)$ et $3x + 2y = 1$

4.34 Une tige rigide de 8 cm est placée à la droite de l'axe central d'un cerceau circulaire de 2 cm de rayon. La tige tombe, bascule en pivotant sur sa base et entre en contact avec le cerceau.

En suivant les étapes suivantes, déterminez où placer la tige (P) afin que son point de tangence (T) avec le cercle soit à une hauteur de 3 cm. Ensuite, déterminez où se situe l'autre extrémité de la tige (E). Une esquisse de modélisation est présentée ci-dessous.



Rappel. Une droite tangente à un cercle est toujours perpendiculaire au rayon du cercle au point de tangence.

Consignes TI. Travaillez en mode `auto`, donnez les réponses exactes et ensuite des réponses arrondies. Ces dernières serviront à valider à l'aide du graphique.

(a) Déterminez l'équation du cercle qui modélise le cerceau.

(b) Utilisez le fait que T est un point du cercle pour en déterminer ses coordonnées.

(c) Déterminez l'équation de la droite passant par les points P et T. *Ne présumez pas que cette droite passe par le point* $(0; 6)$.

(d) Trouvez les coordonnées du point P, le point d'appui de la tige sur l'axe horizontal.

(e) Trouvez les coordonnées de l'extrémité E de la tige.

4.6 Les systèmes d'équations linéaires

Définition 4.3 Un **système d'équations linéaires à deux variables** est formé de deux ou plusieurs équations linéaires à deux variables. Par exemple,

$$\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ x-2y &= 6 \end{aligned}$$

est un sytème de deux équations linéaires en deux variables x et y.
Résoudre un système d'équations à deux variables consiste à déterminer l'ensemble **solution du système**, c'est-à-dire l'ensemble des couples de valeurs des variables qui satisfont toutes les équations du système.

Exemple 4.23
Déterminez si $(4;-1)$, $(-2;2)$ et $(3;4)$ sont des solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ x-2y &= 6. \end{aligned}$$

Solution :
Puisque 4 est l'abscisse et -1 est l'ordonnée du point, on remplace x par 4 et y par -1.

$$\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ 4+2(-1) &\stackrel{?}{=} 2 \\ 4-2 &\stackrel{?}{=} 2 \\ 2 &= 2 \text{ vrai} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-2y &= 6 \\ 4-2(-1) &\stackrel{?}{=} 6 \\ 4+2 &\stackrel{?}{=} 6 \\ 6 &= 6 \text{ vrai} \end{aligned}$$

Le couple $(4;-1)$ satisfait les deux équations et est donc une solution du système.
Dans le cas de $(-2;2)$, on remplace x par -2 et y par 2.

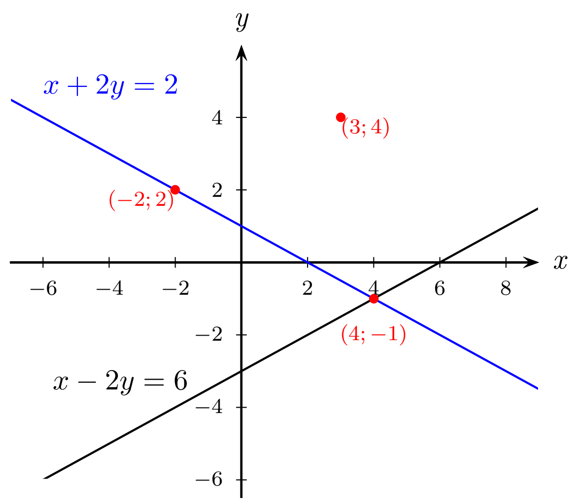
$$\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ (-2)+2(2) &\stackrel{?}{=} 2 \\ -2+4 &\stackrel{?}{=} 2 \\ 2 &= 2 \text{ vrai} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-2y &= 6 \\ (-2)-2(2) &\stackrel{?}{=} 6 \\ -2-4 &\stackrel{?}{=} 6 \\ -6 &= 6 \text{ faux} \end{aligned}$$

Le couple $(-2;2)$ satisfait la première équation mais pas la deuxième. Le couple $(-2;2)$ n'est donc pas une solution du système.
Dans le cas de $(3;4)$, on remplace x par 3 et y par 4.

$$\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ 3+2(4) &\stackrel{?}{=} 2 \\ 3+8 &\stackrel{?}{=} 2 \\ 11 &= 2 \text{ faux} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-2y &= 6 \\ 3-2(4) &\stackrel{?}{=} 6 \\ 3-8 &\stackrel{?}{=} 6 \\ -5 &= 6 \text{ faux} \end{aligned}$$

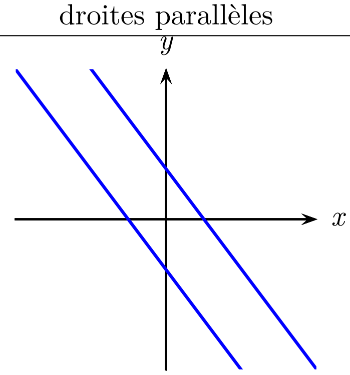
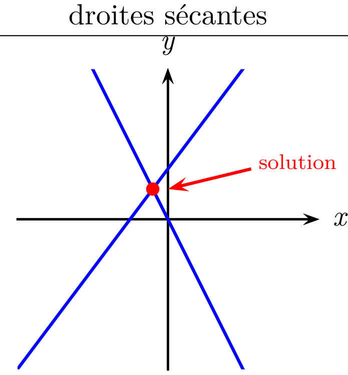
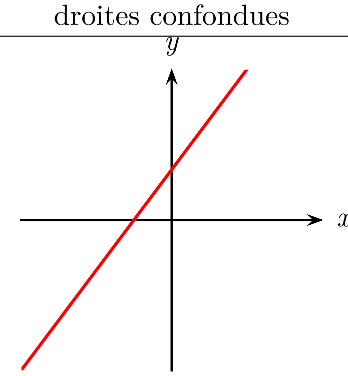
Le couple $(3;4)$ ne satisfait aucune des deux équations. Il ne s'agit donc pas d'une solution du système.
Lorsque A et B ne sont pas tous les deux nuls, le graphe d'une équation $Ax+By=C$ est une droite et résoudre un système d'équations de cette forme correspond à trouver l'intersection des droites qui composent le système.
Puisque le couple $(4;-1)$ satisfait les deux équations du système, il est à l'intersection des deux droites. Le couple $(-2;2)$ satisfait la première équation du système mais pas la deuxième, il est

donc sur la droite $x + 2y = 2$ mais pas sur la droite $x - 2y = 6$. Le point $(3; 4)$ ne satisfait aucune des deux équations, il n'est sur aucune des droites.



En général, un système de deux équations linéaires à deux variables aura zéro, une ou une infinité de solutions selon que les droites impliquées sont parallèles distinctes, s'intersectent en un point ou sont parallèles confondues. L'interprétation de l'ensemble solution d'un tel système est résumé au tableau 4.3 ci-dessous.

Tableau 4.3 – Interprétation de l'ensemble solution, résumé

droites parallèles	droites sécantes	droites confondues
		
aucune solution	solution unique	infinité de solutions

Pour résoudre un système d'équations linéaires à deux variables à la main, on privilégie [ii] la résolution par substitution qui consiste à isoler une des variables d'une équation pour ensuite remplacer cette variable dans l'autre équation. L'équation à une seule variable obtenue est alors facile à résoudre.

Exemple 4.24

Résolvez le système d'équations et donnez une interprétation graphique de son ensemble solution.

$$\begin{array}{rcl} 5x - 4y & = & 9 \\ x + 3 & = & 2y. \end{array}$$

ii. Il existe aussi la méthode de comparaison et celle de réduction, mais on privilégie la méthode par substitution, omniprésente en mathématique et en sciences.

Solution :
Étape 1. On isole une variable de l'une ou l'autre des équations. Dans ce cas, en isolant x dans l'équation $x+3=2y$, on évitera les fractions.

$$x+3=2y \Longleftrightarrow x=2y-3$$

Étape 2. On remplace l'expression de l'étape 1 dans l'autre équation. On remplace x par $2y-3$.

$$\begin{array}{rcl} 5x-4y & = & 9 \\ 5(2y-3)-4y & = & 9 \end{array}$$

Étape 3. On résout l'équation à une variable obtenue à l'étape 2.

$$\begin{array}{rcl} 5(2y-3)-4y & = & 9 \\ 10y-15-4y & = & 9 \\ 6y & = & 24 \\ y & = & 4 \end{array}$$

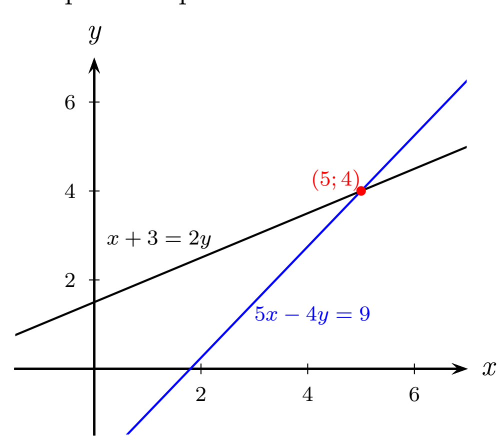
Étape 4. On remplace la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2y-3 \\ x & = & 2(4)-3 \\ x & = & 5 \end{array}$$

Puisque $x=5$ et $y=4$, la solution est $(5;4)$.
Étape 5. On vérifie que la solution proposée satisfait bien les deux équations de départ.

$$\begin{array}{ccl} 5x-4y & = & 9 \\ 5(5)-4(4) & \stackrel{?}{=} & 9 \\ 25-16 & \stackrel{?}{=} & 9 \\ 9 & = & 9 \text{ vrai} \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} x+3 & = & 2y \\ (5)+3 & \stackrel{?}{=} & 2(4) \\ 8 & = & 8 \text{ vrai} \end{array}$$

La solution est alors $(5;4)$ et correspond au point d'intersection des deux droites.



Avec la TI... Si on veut, on peut vérifier ses calculs, étape par étape, à l'aide de la calculatrice.

solve(x+3=2· y,x)	x=2· y−3
5· x−4· y=9|x=2· y−3	6· y−15=9
solve(6· y−15=9,y)	y=4
x=2· y−3|y=4	x=5
5· x−4· y=9|x=5 and y=4	true
x+3=2· y|x=5 and y=4	true

Exemple 4.25

Résolvez le système d'équations et donnez une interprétation graphique de son ensemble solution.

$$\begin{aligned} x+2y &= 5 \\ 3x+6y &= 12. \end{aligned}$$

Solution :

On isole x de l'équation $x+2y=5$.

$$x+2y=5 \Longleftrightarrow x=5-2y$$

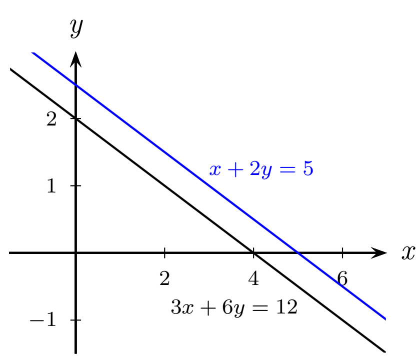
On remplace l'expression obtenue dans l'autre équation

$$\begin{aligned} 3x+6y &= 12 \\ 3(5-2y)+6y &= 12 \end{aligned}$$

et on résout l'équation obtenue

$$\begin{aligned} 3(5-2y)+6y &= 12 \\ 15-6y+6y &= 12 \\ 15 &= 12. \end{aligned}$$

Puisque l'égalité $15=12$ est fausse, le système ne possède aucune solution. Les droites impliquées sont parallèles.



On peut vérifier algébriquement que les droites sont bien parallèles en isolant y pour trouver leur forme pente-ordonnée.

$$\begin{aligned} x+2y=5 &\iff y=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{2} \\ 3x+6y=12 &\iff y=-\tfrac{1}{2}x+2. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la pente est $-\frac{1}{2}$, elle correspond au coefficient de la variable x, et les droites ont des ordonnées à l'origine différentes. Ce sont bien des droites parallèles distinctes.

Avec la TI... Lorsqu'on résout ce système à l'aide du solveur de la calculatrice, elle nous retourne `false`.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x+2\cdot y=5 \\ 3\cdot x+6\cdot y=12 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad \text{false}$$

Ceci signifie que le système ne possède aucune solution, les deux équations ne sont jamais vraies simultanément. Puisqu'il n'y a aucune solution, les droites sont parallèles.

Attention ! Deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble solution. Deux équations linéaires équivalentes sont donc représentées par la même droite.

Exemple 4.26

Résolvez le système d'équations et donnez une interprétation graphique de son ensemble solution.

$$\begin{array}{rcl} 4x+y & = & 3 \\ 12x+3y & = & 9. \end{array}$$

Solution :

Dès le départ, on constate que si on multiplie la première équation par 3, on obtient la deuxième équation. On peut directement en conclure que les droites sont parallèles et confondues puisque les équations sont équivalentes et ont donc le même ensemble solution. Si on ne fait pas immédiatement ce constat, comment s'en rendre compte par les calculs ?

On isole y de l'équation $4x+y=3$

$$4x+y=3 \iff y=3-4x,$$

on remplace cette expression dans l'autre équation

$$\begin{array}{rcl} 12x+3y & = & 9 \\ 12x+3(3-4x) & = & 9 \end{array}$$

et on résout

$$\begin{array}{rcl} 12x+3(3-4x) & = & 9 \\ 12x+9-12x & = & 9 \\ 9 & = & 9 \ \text{vrai.} \end{array}$$

Contrairement à l'exemple précédent, l'égalité $9=9$ est vraie quelle que soit la valeur x réelle. Il y a donc une infinité de solutions possibles.

On peut vérifier algébriquement que les droites sont confondues en résolvant chacune des équations du système de départ pour y afin de constater qu'elles sont équivalentes à $y=3-4x$:

$$4x+y=3 \quad\iff\quad y=3-4x$$

et

$$\begin{array}{rcl} 12x+3y=9 & \iff & 3y=9-12x \\ & \iff & y=3-4x. \end{array}$$

Les équations, $4x+y=3$, $12x+3y=9$ et $y=3-4x$, sont donc trois équations équivalentes dont l'ensemble solution correspond à la droite de pente -4 et d'ordonnée à l'origine 3. Tout point de cette droite est une solution du système d'équations.

Il y a une infinité de façons différentes de décrire l'ensemble solution. Elles dépendent du choix de l'équation utilisée pour décrire la relation entre les variables, en voici quelques-unes.

$$\begin{array}{rl}
\{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x + y = 3\} & \text{en utilisant une des équations données} \\
\{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3 - 4x\} & \text{en isolant } y \text{ en fonction de } x \\
\{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{3-y}{4}\} & \text{en isolant } x \text{ en fonction de } y \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Avec la TI... Lorsqu'on résout ce système à l'aide de la calculatrice, elle nous retourne une paramétrisation (une façon de générer des solutions) de l'ensemble solution.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 4\cdot x+y=3 \\ 12\cdot x+3\cdot y=9 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$$

Ainsi, lorsqu'on donne une valeur à y, que la calculatrice désigne ici par $\boldsymbol{c1}$, la valeur correspondante de x peut-être obtenue en calculant

$$x = \frac{-(c1-3)}{4}.$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 4\cdot x+y=3 \\ 12\cdot x+3\cdot y=9 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$$

$$x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1} \mid \boldsymbol{c1}=-1 \qquad x=1 \text{ and } y=-1$$

$$x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1} \mid \boldsymbol{c1}=11 \qquad x=-2 \text{ and } y=11$$

$$x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1} \mid \boldsymbol{c1}=2.14 \qquad x=0.215 \text{ and } y=2.14$$

$$x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1} \mid \boldsymbol{c1}=0 \qquad x=\frac{3}{4} \text{ and } y=0$$

$$x=\frac{-(\boldsymbol{c1}-3)}{4} \text{ and } y=\boldsymbol{c1} \mid \boldsymbol{c1}=-1.57 \qquad x=1.1425 \text{ and } y=-1.57$$

Les couples $(x;y)$ ainsi obtenus sont des solutions du système d'équations et l'ensemble de toutes les solutions peut être décrit par

$$\left\{\left(\frac{-(c1-3)}{4}; c1\right) \mid c1 \in \mathbb{R}\right\}$$

La formule $x = \frac{-(c1-3)}{4}$ est équivalente (lorsque $y = c1$) à celle obtenue lorsqu'on isole x de chacune des équations du sytème de départ.

$$4x + y = 3 \iff x = \frac{3-y}{4} \iff x = \frac{-(y-3)}{4}.$$

$$12x + 3y = 9 \iff \textit{faites-le} \iff x = \frac{-(y-3)}{4}.$$

Quoi écrire ? Pour consigner par écrit le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice, il est plutôt d'usage d'écrire

$$\left\{\left(\frac{3-y}{4}; y\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$$

que

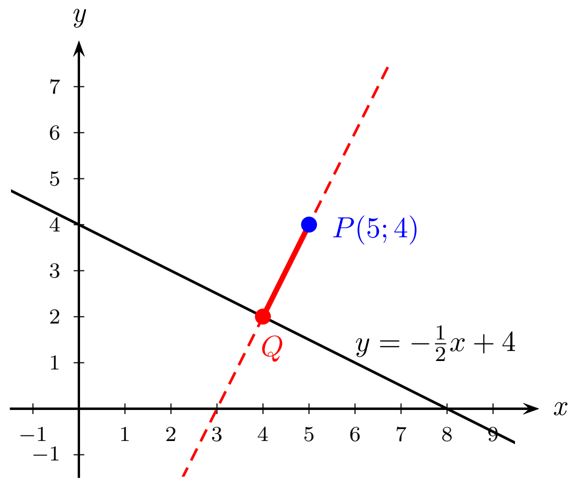
$$\left\{\left(\frac{-(c1-3)}{4};c1\right) \mid c1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exemple 4.27

Trouver la distance entre le point $(5;4)$ et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Solution :

La distance d'un point P à une droite est la plus courte distance séparant ce point P et un point appartenant à la droite. Elle correspond à la longueur du segment perpendiculaire à la droite reliant celle-ci au point P. En trouvant le point d'intersection Q entre la droite et ce segment qui lui est perpendiculaire, il suffit donc de calculer la distance entre les points P et Q pour obtenir la distance entre P et la droite.



Étant donné le point $P(5;4)$, on cherche les coordonnées du point Q. Il faut, dans un premier temps, trouver l'équation de la droite passant par le segment $\overline{PQ}$. La pente de cette droite est 2, puisque, les deux droites étant perpendiculaires, elle est l'opposée de l'inverse de la pente de la droite $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Comme elle passe par le point $P = (5;4)$, on peut utiliser la forme pente-point pour trouver l'équation de la droite prolongeant $\overline{PQ}$.

$$y - 4 = 2(x-5) \iff y - 4 = 2x - 10 \iff y = 2x - 6$$

Les coordonnées du point d'intersection Q se trouvent en résolvant le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{1}{2}x + 4 \\ y & = & 2x - 6 \end{array}$$

On substitue la valeur de y de la première équation dans la deuxième et on isole x.

$$\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x + 4 & = & 2x - 6 \\ -\frac{1}{2}x - 2x & = & -6 - 4 \\ -\frac{5}{2}x & = & -10 \\ x & = & \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-10) \\ x & = & 4 \end{array}$$

On trouve la valeur de y en remplaçant x dans une des équations de départ : $y = 2(4) - 6 = 2$. Le point d'intersection cherché est donc $Q(4;2)$.

Il suffit de calculer la distance séparant les points $P(5;4)$ et $Q(4;2)$.

$$d(P,Q) = \sqrt{(5-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

La distance entre le point $P(5;4)$ et la droite $y = -\frac{1}{2}x + 4$ est donc $\sqrt{5}$ unités.

Exemple 4.28

Le budget d'un client pour un projet est de 25 000 \$. Le gestionnaire de projet de la firme soumissionnaire évalue qu'il faudra 50 jours-personnes (un jour-personne représente le travail qui serait accompli par une seule personne en un jour) pour réaliser le travail. Deux personnes ressources seront affectées à ce projet. Le taux facturé par l'entreprise pour l'une d'elle est de 400 \$/jour et celui pour l'autre est de 650 \$/jour. Combien de temps sera imparti à chaque personne sur ce projet pour en respecter le budget et le nombre de jours ?

Solution :

Au total, les deux personnes de la firme travailleront 50 jours et le montant facturé pour leur travail sera de 25 000 \$. Si on pose x le nombre de jours qui seront travaillés par la première personne et y, celui prévu pour la deuxième personne, alors on a le système d'équations linéaires suivant à résoudre.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 50 \\ 400x + 650y & = & 25\ 000 \end{array}$$

On isole y dans la première équation,

$$x + y = 50 \Longleftrightarrow y = 50 - x$$

puis on substitue dans la deuxième.

$$\begin{array}{rcl} 400x + 650(50 - x) & = & 25\ 000 \\ 400x + 32\ 500 - 650x & = & 25\ 000 \\ 32\ 500 - 250x & = & 25\ 000 \\ -250x & = & -7500 \\ x & = & \frac{-7500}{-250} \\ x & = & 30 \end{array}$$

On trouve y en remplaçant la valeur de x dans la première équation.

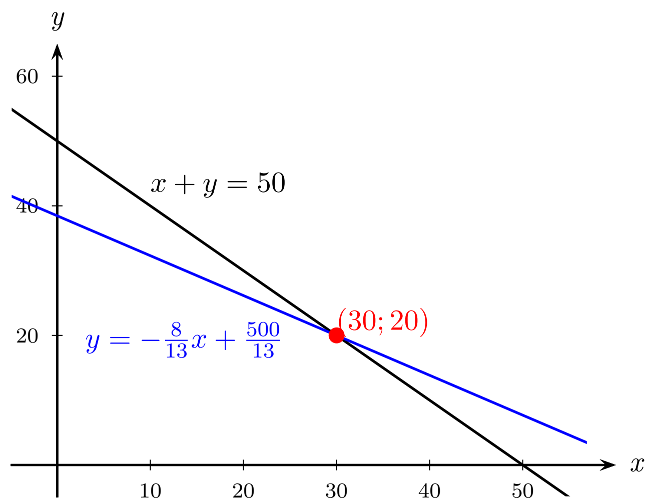
$$y = 50 - 30 = 20$$

Sur ce projet, 30 jours de travail seront planifiés pour la première personne et 20 jours pour la seconde.

Validation. De façon évidente, on a que la solution $x = 30$ et $y = 20$ respecte la première équation $x + y = 50$, puisque $30 + 20 = 50$, mais on peut vérifier qu'elle satisfait aussi la deuxième équation.

$$\begin{array}{rcl} 400x + 650y & = & 25\ 000 \\ 400(30) + 650(20) & \stackrel{?}{=} & 25\ 000 \\ 12\ 000 + 13\ 000 & \stackrel{?}{=} & 25\ 000 \\ 25\ 000 & = & 25\ 000 \end{array}$$

Graphiquement, on constate que la solution $(30;20)$ correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux droites.



Exercices

4.35 Déterminez la position relative des droites suivantes (parallèles distinctes, confondues, sécantes, perpendiculaires). Lorsqu'elle existe, trouvez leur intersection.

(a) $y = 2x + 1$ et $y = 10 - x$
(b) $y = 6x - 2$ et $y = 3x + 1$
(c) $3x + y = 2$ et $y = 5x - 6$
(d) $2x + 5y = 15$ et $4x + 10y = 20$
(e) $x + y = 1$ et $2y = 2 - 2x$
(f) $x = 2$ et $y = 5$

4.36 À l'aide de votre calculatrice, déterminez la position relative des droites suivantes (parallèles distinctes, confondues, sécantes, perpendiculaires). Lorsqu'elle existe, donnez leur intersection.

Consignes. Travaillez dans une fenêtre de calcul. Validez ensuite vos résultats en les comparant au graphique.

(a) $17x + 15y = 27$ et $15x - 17y = 50$
(b) $2{,}5x + 3{,}2y = 5{,}7$ et $1{,}4x + 5{,}2y = -3$
(c) $4x = 3{,}5y - 1$ et $7y - 8x = 2$
(d) $y = 2{,}1x - 2$ et $10{,}5x - 5y = 15$

4.37 Trouvez la distance entre le point et la droite.

(a) $y = 2x + 1$ et $(3; 2)$
(b) $3x + y = 6$ et $(0; 0)$
(c) $2y = 4x + 3$ et $(-1; -\frac{1}{2})$

4.38 Une entreprise de gaz naturel désire raccorder la maison d'un nouveau client à une conduite de gaz passant près de chez lui. La conduite est constituée d'un tuyau en ligne droite dont la deuxième extrémité se situe à 500 m à l'est et 800 m au nord de la première extrémité. La maison du client est située à 50 m à l'ouest et 100 m au nord de la première extrémité du tuyau. Quelle est la longueur du plus court tuyau qui permet de raccorder le nouveau client à la conduite existante ?

4.39 En posant et en résolvant des systèmes d'équations linéaires à deux variables appropriées, répondez aux questions suivantes. Illustrez graphiquement à quoi correspondent les solutions obtenues.

(a) Trouvez deux nombres positifs dont la somme est 100 et dont la différence est 12.

(b) Si 100 billets de 5 \$ ou de 10 \$ constituent une somme totale de 850 \$, combien y a-t-il de billets de 10 \$?

(c) Le périmètre d'un écran d'ordinateur est 162 cm. Si sa longueur mesure 22 cm de plus que sa largeur, quelles sont les dimensions de l'écran ?

4.40 Lorsque Jérôme loue une automobile pour 3 jours et parcourt 175 km, il paie 125 \$. S'il la loue 5 jours et parcourt 400 km, elle lui coûte 250 \$. Quels sont le taux de location par jour et le taux par km ?

4.41 Une explosion près de la surface de la mer est détectée par les senseurs submergés d'un navire 30 secondes avant qu'elle ne soit détectée sur sa plate-forme. À quelle distance du navire se produit l'explosion ?

Rappel. La vitesse du son dans l'eau est d'environ 1500 m/s tandis que dans l'air elle est d'environ 340 m/s.

4.42 La figure 4.2 montre une coupe 2D d'une structure avec les coordonnées de quelques points importants. L'axe des x représente le sol et les coordonnées sont exprimées en mètres.

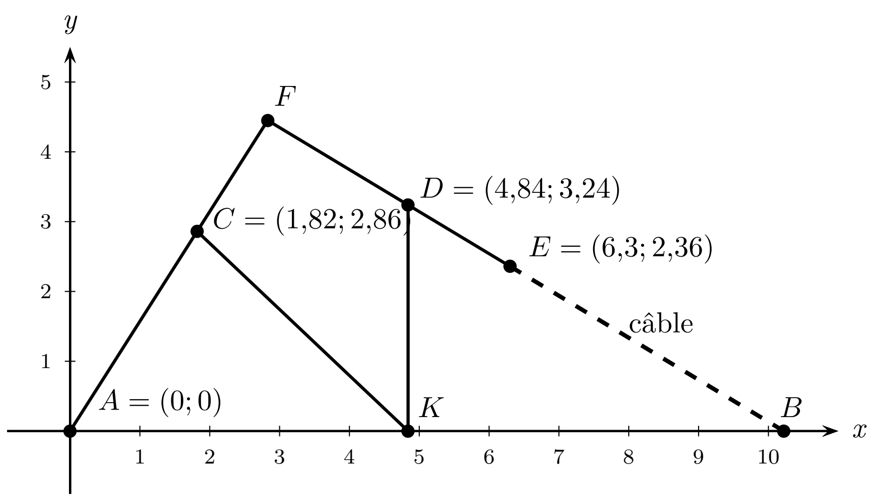


FIGURE 4.2 – Coupe 2D d'une structure

Consignes. Travaillez dans une fenêtre de calcul et non dans le registre graphique.
Faites attention aux arrondis. Ne jamais arrondir un résultat dans un calcul intermédiaire, utilisez plutôt les valeurs données par la calculatrice (pas seulement la partie affichée). Au besoin, vous arrondissez lorsque vous consignez votre travail par écrit.

(a) Trouvez l'équation de la droite passant par les points D et E.

(b) Sachant que la droite passant par D et K est verticale, quelle est son équation ?

(c) On pourrait penser que la droite passant par les points A et C et celle qui passe par les points D et E sont perpendiculaires. Montrez que ce n'est pas le cas. *Vous pouvez tenir pour acquis que les points A, C et F sont sur une même droite. Il en est de même pour les points B, E, D et F.*

(d) Trouvez les coordonnées du point F, le point le plus haut de cette structure.

(e) Sachant que B est le point d'attache du câble sol (celui en pointillé), calculez la longueur du câble reliant les points E et B.

Réponses

Chapitre 1

Rép. 1.1

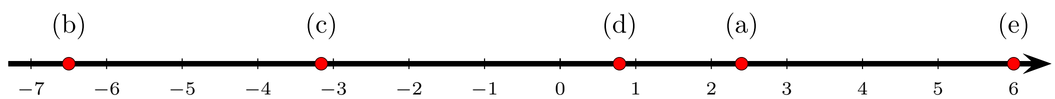
(a) Vrai
(b) Faux
(c) Vrai
(d) Vrai
(e) Vrai
(f) Vrai
(g) Vrai, dans un ensemble, on ne tient pas compte de l'ordre
(h) Vrai
(i) Vrai
(j) Vrai
(k) Vrai, dans un ensemble, il n'y a pas de répétition
(l) Faux

Rép. 1.2

(a) $5{,}1 \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
(b) $-\sqrt{36} = -6 \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
(c) $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}'$ et $\mathbb{R}$
(d) $23/2 \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
(e) $-36/12 = -3 \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
(f) $215{,}13\overline{51} \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
(g) $-512{,}36 \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
(h) $2\pi \in \mathbb{Q}'$ et $\mathbb{R}$
(i) $-571{,}\overline{5} \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Rép. 1.3 $\frac{13}{-2} = -6{,}5$, $\frac{\pi}{4} \approx 3{,}14/4 \approx 3/4 = 0{,}75$ et $\sqrt{36} = 6$

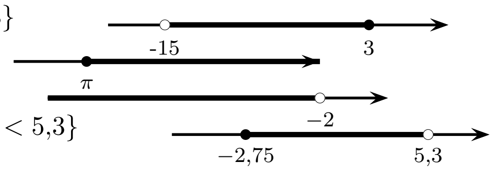
On peut coincer 10 entre les carrés parfaits 9 et 16 pour en déduire que $3 < \sqrt{10} < 4$ tout en étant plus près de 3 que de 4 (puisque 10 est plus près de 9 que de 16.) et ainsi, $-4 < -\sqrt{10} < -3$ en étant plus près de -3.



Rép. 1.4 (a) $7 < 10$ (b) $-\pi > -3{,}2$ (c) $\sqrt{2} < 1{,}42$ (d) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Rép. 1.5

(a) $]-15;3] = \{x \in \mathbb{R} | -15 < x \leq 3\}$
(b) $[\pi;\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq \pi\}$
(c) $]-\infty;-2[= \{x \in \mathbb{R} | x < -2\}$
(d) $[-2{,}75;5{,}3[= \{x \in \mathbb{R} | -2{,}75 \leq x < 5{,}3\}$



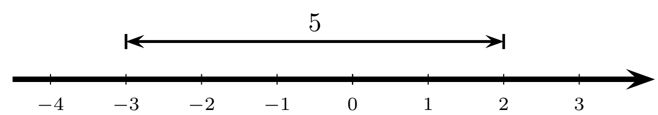
Rép. 1.6 (a) $]-\infty;4]$ (b) $[-6;6]$ (c) $]0,\infty[$ (d) $]-\infty;\infty[$

Rép. 1.7

(a) $|-45{,}3| = 45{,}3$
(b) $|752| = 752$
(c) $\dfrac{-5}{|-5|} = \dfrac{-5}{5} = -1$
(d) $|\sqrt{52} - 7| = \sqrt{52} - 7$, car $\sqrt{52} - 7 > 0$
(e) $|5 - \sqrt{35}| = \sqrt{35} - 5$, car $5 - \sqrt{35} < 0$
(f) $|3 - \pi| = \pi - 3$, car $3 - \pi < 0$

Rép. 1.8 (a) $|x| = 5$ lorsque $x = 5$ ou $x = -5$
(b) $|x| = 0$ lorsque $x = 0$
(c) $|x| = -2$ est impossible car la valeur absolue n'est jamais négative
(d) $|x| = 3{,}2$ lorsque $x = 3{,}2$ ou $x = -3{,}2$
(e) $|x| = \frac{15}{4}$ lorsque $x = \frac{15}{4}$ ou $x = -\frac{15}{4}$
(f) $|x| = \sqrt{3}$ lorsque $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Rép. 1.9 (a) $|3 - 21| = |-18| = 18$
(b) $|19 - 12| = |7| = 7$
(c) $|-3 - 2| = |-5| = 5$
Validation. On peut vérifier le résultat à l'aide d'un graphique. Voyez la figure ci-dessous.



(d) $|-5 - (-7)| = |-5 + 7| = |2| = 2$

Rép. 1.10 (a) Le tableau suivant donne les écarts $|note - moyenne|$ pour chaque équipe de chacun des groupes.

Numéro d'équipe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Écarts groupe 1	11	0	8	8	4	27	5	14	2
Écarts du groupe 2	14	4	17	9	38	3	4	2	15

(b) L'écart absolu moyen du groupe 1 est de 8,8, ce qui signifie que les notes s'écartent en moyenne de 8,8 points de la moyenne, tandis que l'écart moyen du groupe 2 est de 11,8. La dispersion des notes autour de la moyenne est donc plus grande dans le groupe 2 que dans le groupe 1.

Rép. 1.11 $d((5;3),(1;4)) = |5 - 1| + |3 - 4| = 4 + 1 = 5$
$d((5;3),(2;2)) = |5 - 2| + |3 - 2| = 3 + 1 = 4$
$d((5;3),(7;4)) = |5 - 7| + |3 - 4| = 2 + 1 = 3$
Le taxi situé en $(7;4)$ est le plus proche et devrait prendre le client.

Rép. 1.12 (a) $x^2 - 3x + 1|_{x=2} = 2^2 - 3(2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$
(b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2|_{x=2,y=5} = (2 - 1)^2 + (5 - 3)^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$
(c) $\left.\dfrac{|5x| - 3}{3 - 2x}\right|_{x=-3} = \dfrac{|-15| - 3}{3 + 6} = \dfrac{15 - 3}{9} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$
(d) $b^2 - 4ac|_{a=2,b=3,c=0} = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 9 - 0 = 9$
(e) $\left.\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right|_{x_1=2,x_2=4,y_1=1,y_2=3} = \dfrac{3 - 1}{4 - 2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Rép. 1.13 Le calcul se fait difficilement à la main, on utilise alors la calculatrice.
(a) $-4{,}9t^2 + 30t + 2|_{t=0} = 2$ donc à 2 m de hauteur
(b) $-4{,}9t^2 + 30t + 2|_{t=5,1} \approx 27{,}55$ donc à environ 27,55 m de hauteur
(c) $-4{,}9t^2 + 30t + 2|_{t=8} \approx -71{,}6$ m
On pourra conclure que le modèle, tel qu'il est énoncé, ne reflète pas bien la hauteur de l'objet dès que celui-ci arrive au sol. La fonction définie par parties

$$h = \begin{cases} -4{,}9t^2 + 30t + 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6{,}188 \\ 0 & \text{si } t > 6{,}188 \end{cases}$$

serait plus appropriée. En effet, dès que l'objet frappe le sol à $t \approx 6{,}188$ s, le modèle indique que sa hauteur est 0. Évidemment, il ne tient pas compte du rebondissement potentiel...

Rép. 1.14 $\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\Big|_{L=0{,}65;T=136;\mu\approx 0{,}01185} \approx 82{,}4$ Hz

Rép. 1.15
(a) $3(6x) = (3 \cdot 6)x = 18x$
(b) $6x + (5x + 3) = (6x + 5x) + 3 = 11x + 3$
(c) $x \cdot 5 = 5x$
(d) $3(x + 2) = 3x + 6$
(e) $4(2x - 5) = 4(2x) + 4(-5) = (4 \cdot 2)x - 20 = 8x - 20$

Rép. 1.16
(a) La commutativité de la multiplication
(b) Le neutre de l'addition
(c) L'associativité de l'addition
(d) Le neutre de la multiplication
(e) L'associativité de la multiplication
(f) La distributivité de la multiplication sur l'addition
(g) La commutativité de l'addition
(h) La commutativité de la multiplication

Rép. 1.17
(a) fausse, elle illustre l'associativité de la multiplication $3(6x) = (3 \cdot 6)x$
(b) vraie
(c) fausse, elle illustre la distributivité de la multiplication sur l'addition $3(1 + x) = 3 + 3x$
(d) vraie

Rép. 1.18 (a) -1 (b) $-2/3$ (c) $-0{,}5$ (d) π (e) 0

Rép. 1.19 (a) 1 (b) $3/2$ (c) 2 (d) $-\frac{1}{\pi}$ (e) non défini

Rép. 1.20 (a) $-1/3$ (b) 1 (c) $-4/3$ (d) $1/2$ (e) -10

Rép. 1.21 (a) 3 (b) 4 (c) 14 (d) -15 (e) 28 (f) 3 (g) -15 (h) -1 (i) 3

Rép. 1.22
(a) $\dfrac{2x}{x^2} - 4$
(b) $\dfrac{2x}{x^2 - 4}$
(c) $\dfrac{2y}{\frac{5x}{y} + 1}$
(d) $3x + \dfrac{2}{3x} - 1$
(e) $3x + \dfrac{2}{3} \cdot x - 1$
(f) $\dfrac{\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{8}\right) \cdot 2}{x} - \dfrac{x}{4}$

Rép. 1.23
(a) $2x \div 3 - y$
(b) $2 \div (5x) - 1 \div 3$
(c) $3 \div (x + 2)$
(d) $5(x + 1) \div 3 + 2 \div (5x)$
(e) $(x - 2 \div y) \div (3 \div z)$
(f) $5 \div (4 + 1 \div (3 - x))$

Rép. 1.24
(a) $\boxed{13x} + \boxed{6}$
(b) $\boxed{5x(-3y)} + \boxed{-5x} + \boxed{6y}$
(c) $\boxed{-7(xy + z)}$
(d) $\boxed{(x + 15)(x - 4)}$
(e) $\boxed{3x} + \boxed{2 \div 3x} + \boxed{-1}$
(f) $\boxed{(1 \div x + x \div 8) \cdot 2 \div x} + \boxed{-x \div 4}$

Rép. 1.25
(a) $4xy$
(b) $-28xy$
(c) $-15xy - 5x + 6y$
(d) $1 + 10x$
(e) $6x + 3$
(f) $8 - x$
(g) $13 - 5x$
(h) $5x + 8$
(i) $5x$
(j) $-3x + 2y - 5$
(k) 0
(l) $x - 2$
(m) $2x + 4$
(n) $7xy + x - 6y + 3$
(o) $9x - 13y$
(p) $2x$
(q) $9x + 2$

Rép. 1.26 (a) $\boxed{13\,x} + \boxed{6}$

(b) $\boxed{4\,x} + \boxed{-y\,z}$

(c) $\boxed{5\,x\,y} + \boxed{3\,y} + \boxed{9}$

(d) $\boxed{8\,(x+1)}$

(e) $\boxed{-7\,(xy+z)}$

(f) $\boxed{(x+15)\,(x-4)}$

Rép. 1.27 (a) Non, car le numérateur comporte plusieurs termes. On ne simplifie pas un terme du numérateur avec un terme du dénominateur.

$$\frac{\mathbf{2}+x}{\mathbf{2}} = \frac{\overset{\text{terme}}{\boxed{2}}+x}{\underset{\text{terme}}{\boxed{2}}}$$

(b) Oui, car $\dfrac{\mathbf{2}\cdot x}{\mathbf{2}} = \underbrace{\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}_{1}\cdot x = x$

(c) Oui, car on peut factoriser le numérateur et simplifier les facteurs communs.

$$\frac{\mathbf{2}+\mathbf{2}x}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2}(1+x)}{\mathbf{2}} = \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}_{1}\cdot\frac{(1+x)}{1} = 1+x$$

(d) Oui, car $\dfrac{\mathbf{3}\cdot x}{\mathbf{3}\cdot y} = \underbrace{\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{3}}}_{1}\cdot\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{y}$

(e) Oui, car $\dfrac{\mathbf{8}\cdot(x-1)}{\mathbf{8}\cdot x} = \underbrace{\dfrac{\cancel{8}}{\cancel{8}}}_{1}\cdot\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

(f) Non, car 5 n'est pas un facteur du dénominateur mais un terme de celui-ci.

$$\frac{\mathbf{5}}{x-\mathbf{5}} = \overset{\text{facteur}}{5}\cdot\frac{1}{x+\underset{\text{terme}}{\boxed{-5}}}$$

(g) Non, car 7 et y sont des facteurs du terme $7y$ et non du numérateur et du dénominateur. On ne peut pas simplifier un terme du numérateur avec un terme du dénominateur.

$$\frac{x-\mathbf{7}y}{2+\mathbf{7}y} = \frac{x-\overset{\text{terme}}{\boxed{7y}}}{2+\underset{\text{terme}}{\boxed{7y}}}$$

(h) Oui, car on peut factoriser le dénominateur et simplifier.

$$\frac{\mathbf{9}a}{\mathbf{9}b+\mathbf{9}} = \frac{\mathbf{9}\cdot a}{\mathbf{9}\cdot(b+1)} = \underbrace{\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}}}_{1}\cdot\frac{a}{b+1} = \frac{a}{b+1}$$

Rép. 1.28 (a) $\frac{72}{27} = \frac{8\cdot\cancel{9}}{3\cdot\cancel{9}} = \frac{8}{3}$

(b) $\frac{6xy}{21y} = \frac{2\cdot\cancel{3}\cdot x\cdot\cancel{y}}{\cancel{3}\cdot 7\cdot\cancel{y}} = \frac{2x}{7}$, si $y \neq 0$.

(c) $\frac{5x+5}{5(x+1)} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{5}\cdot\cancel{(x+1)}} = 1$, si $x \neq -1$.

(d) $\frac{24(a+1)(b+c)}{15(a+1)} = \frac{\cancel{3}\cdot 8\cdot\cancel{(a+1)}\cdot(b+c)}{\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{(a+1)}} = \frac{8(b+c)}{5}$, si $a \neq -1$.

(e) $\frac{4x-16}{20x+12} = \frac{\cancel{4}\cdot(x-4)}{\cancel{4}\cdot(5x+3)} = \frac{x-4}{5x+3}$

(f) $\frac{2\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{5\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{x}\cdot y\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}} = \frac{2x}{5y}$, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

(g) $\frac{3\cdot 3\cdot 7\cdot(x-1)\cdot(x-1)}{3\cdot(x-1)} = \frac{\cancel{3}\cdot 3\cdot 7\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-1)}{\cancel{3}\cdot\cancel{(x-1)}} = 21(x-1)$, si $x \neq 1$.

(h) $\frac{-x(x+8)}{-13(x+8)} = \frac{x\cdot\cancel{(x+8)}}{13\cdot\cancel{(x+8)}} = \frac{x}{13}$, si $x \neq -8$.

(i) $\frac{(2x+2)(3y-3)}{12} = \frac{\cancel{2}\cdot(x+1)\cdot\cancel{3}\cdot(y-1)}{\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{3}} = \frac{(x+1)(y-1)}{2}$

Rép. 1.29
(a) $\frac{7a}{3b}$
(b) Ne se simplifie pas.
(c) $\frac{2(a-b)}{b}$
(d) Ne se simplifie pas.
(e) $\frac{(7x+14y)}{(21x+7y)} = \frac{\cancel{7}(x+2y)}{\cancel{7}(3x+y)} = \frac{x+2y}{3x+y}$
(f) Ne se simplifie pas.
(g) Ne se simplifie pas.
(h) 1
(i) $3(x+2)$, si $x \neq 3$

Rép. 1.30
(a) $\frac{9}{7}$
(b) $-\frac{5}{4}$
(c) $\frac{15}{14}$
(d) $\frac{6}{7}$
(e) $-\frac{8}{3}$
(f) $\frac{5}{2}$
(g) $\frac{5}{9}$
(h) $\frac{20}{3}$
(i) $-\frac{5}{6}$
(j) $\frac{3}{2}$
(k) $\frac{1}{6}$
(l) 1
(m) $\frac{5}{2}$
(n) $\frac{4}{5}$
(o) $-\frac{5}{2}$
(p) 9
(q) $\frac{17}{14}$
(r) $-\frac{1}{15}$
(s) $-\frac{1}{20}$
(t) $-\frac{1}{30}$
(u) $\frac{1}{42}$
(v) $-\frac{9}{4}$
(w) $\frac{9}{5}$

Rép. 1.31
(a) $\frac{x-1}{3}$
(b) $\frac{2x-1}{2}$
(c) $\frac{5x}{2}$, si $y \neq -2$
(d) $\frac{12x}{5(y+1)}$
(e) $\frac{3(2x-1)}{25}$
(f) $\frac{2x-1}{3}$
(g) $\frac{2(x+1)}{5}$
(h) $\frac{2x+5}{3}$
(i) $\frac{2x+7}{7}$
(j) $3x-1$
(k) $2-x$
(l) 4, si $x \neq -2$
(m) $\frac{5x+3}{3}$
(n) $\frac{3x-5z}{2y+1}$
(o) $\frac{2x+1}{x+1}$
(p) -8, si $x \neq 0$
(q) $\frac{5x+1}{3}$
(r) $\frac{4x+5}{10}$
(s) $\frac{7x+15}{30}$
(t) $\frac{17x-15}{30}$
(u) $-\frac{x}{4}$
(v) $\frac{2-4x}{x} = \frac{2(1-2x)}{x}$
(w) $\frac{35x-12}{30}$

Rép. 1.32
(a) $\frac{x+1}{3x-1}$, si $x \neq 0$
(b) $\frac{4x-1}{8x+1}$, si $x \neq 0$
(c) $\frac{5x-15}{4x-13}$, si $x \neq 3$
(d) $\frac{x}{x+3}$, si $x \neq -2$

Rép. 1.33 On simplifie d'abord l'intérieur de la parenthèse.

$$\begin{aligned} x &= \frac{4\pi r^3}{3} \div \left(\frac{\pi r^2}{2}\cdot 2\pi\right) = \frac{4\pi r^3}{3} \div \left(\frac{\pi r^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{1}\right) = \frac{4\pi r^3}{3} \div \left(\frac{\pi r^2\cdot\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\cdot 1}\right) \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \div (\pi^2 r^2) = \frac{4\pi r^3}{3}\cdot\frac{1}{\pi^2 r^2} = \frac{4\pi r^3\cdot 1}{3\cdot\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

Rép. 1.34
(a) 275 cm^2
(b) $300 - x^2$ pour $0 \leq x \leq 10$ ou, sous la forme d'un intervalle, $x \in [0;10]$
(c) $300 - x^2|_{x=5} = 275\ \text{cm}^2$,
$300 - x^2|_{x=10} = 200\ \text{cm}^2$
$300 - x^2|_{x=3{,}2} = 289{,}76\ \text{cm}^2$

Rép. 1.35 (a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

(b) $-5^3 = -5 \cdot 5 \cdot 5 = -125$

(c) $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$

(d) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{1}{125}$

(e) $2^3 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

(f) $-3\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = -3 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{-3}{25}$

(g) $-5(-2)^{-3} = -5 \cdot \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{5}{(-2)(-2)(-2)} = -5 \cdot \dfrac{1}{-8} = \dfrac{5}{8}$

Rép. 1.36 (a) $(3x)^2(2y)^3 = (3x)(3x)(2y)(2y)(2y) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot xxyyy = 72x^2y^3$

(b) $\dfrac{(2xy)^2x^5}{xy} = \dfrac{(2xy)(2xy)xxxxx}{xy} = \dfrac{(2 \cdot 2)(xxxxxxx)(yy)}{xy} = \dfrac{4\cancel{x}xxxxxx\cancel{y}y}{\cancel{x}\cancel{y}} = 4x^6y$

(c) $2^{-1}xy^{-3} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{1 \cdot x \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot y^3} = \dfrac{x}{2y^3}$

Rép. 1.37 (a) $(-3)^4 = 81$

(b) $-2 \cdot 2 \cdot 2 = -2^3 = -8$

(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

(d) $\frac{5^3}{x^5} = \frac{125}{x^5}$

(e) $3x^4 + 5y^2z^3$

(f) $3(x^2)^3(y^3)^4 = 3x^6y^{12}$

(g) $(1-3x)^4$

(h) $((x-2y)^2)^3 = (x-2y)^6$

Rép. 1.38 (a) $-2x^{-1} \neq 2x$, car $-2x^{-1} = -2 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$

(b) $3^2 \cdot 3^3 \neq 9^5$, car $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$, on additionne les exposants

(c) $2^3 + 2^3 \neq 4^3$, car $2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$, on additionne les termes, puis on additionne les exposants des facteurs

(d) $(3^2)^3 \neq 3^5$, car $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$, on multiplie les exposants

(e) $\dfrac{3^8}{3^2} \neq 3^4$, car $\dfrac{3^8}{3^2} = 3^{8-2} = 3^6$, on soustrait les exposants

(f) $\dfrac{10^8}{2^8} = 5^8$, car $\dfrac{10^8}{2^8} = \left(\frac{10}{2}\right)^8$, les composantes du quotient on le même exposant

(g) $\dfrac{5x^2}{x^2} \neq 4x^2$, car $\dfrac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 5$ car, si $x \neq 0$, on peut simplifier les facteurs communs

(h) $\dfrac{x^2-2}{x^2} \neq -2$, car x^2 n'est pas un *facteur* commun

(i) $1 - 3x^{-2} \neq 1 - \frac{1}{3x^2}$, car $1 - 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$, l'exposant -2 n'affecte que le facteur x

(j) $3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1} = 1$, car $3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

(k) $2^{100} = 16^{25}$, car $16^{25} = (2^4)^{25} = 2^{4 \cdot 25} = 2^{100}$

(l) $10^{-3} \neq 0{,}0001$, car $0{,}0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

(m) $15{,}17 \times 10^5 = 1{,}517 \times 10^6$, car $15{,}17 = 1{,}517 \times 10$ et $15{,}17 \times 10^5 = 1{,}517 \times 10 \times 10^5 = 1{,}517 \times 10^6$

Rép. 1.39 Puisque $5\,972\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5{,}972 \times 10^{24}$ kg

$$\frac{1{,}898 \times 10^{27}}{5{,}972 \times 10^{24}} = \frac{1{,}898}{5{,}972} \times 10^3 \approx 0{,}318 \times 10^3 = 318$$

donc environ 318 fois.

Rép. 1.40 (a) x^5

(b) x^6

(c) a^9

(d) $81a^{11}b^7$

(e) $(a+b)^9$

(f) $\frac{81x^4}{y^2}$

(g) $\frac{x^6}{8y^{12}}$

(h) $\frac{9}{x}$

(i) $\frac{3b}{7a}$

(j) 12

(k) $-\frac{1}{a^6b^{11}}$

(l) $\frac{1}{x^5y}$

(m) $\frac{x}{y^3z^5}$

(n) $-\frac{4}{s^3t^3}$

(o) $\frac{-9a^5}{b^8}$

(p) $\frac{36x^4}{121y^8}$

(q) $\frac{2}{625x^3}$

(r) $\frac{(a+1)}{(b+1)^3}$

(s) 5^{3n+2}

(t) $\frac{(n+1)x}{2n}$

Rép. 1.41 (a) $2^{-11} = 0{,}5^{11}$
(b) $(-0{,}1)^{-15} = -10^{15}$
(c) $2^{25} < 2^{33}$
(d) $2^{-25} > 2^{-33}$
(e) $(-2)^{25} > (-2)^{33}$
(f) $10^{-25} < 10^{33}$
(g) $0{,}5^{25} > 0{,}5^{33}$
(h) $(-0{,}5)^{25} < (-0{,}5)^{33}$
(i) $(-0{,}5)^{-15} > (-0{,}5)^{-17}$
(j) $0{,}5^{-25} < 0{,}1^{-25}$
(k) $-3^{-5} < 5^{-3}$

Rép. 1.42 (a) 9
(b) -7
(c) $\sqrt{-49} \notin \mathbb{R}$
(d) -5
(e) $0{,}5$
(f) $-\frac{2}{3}$
(g) -2
(h) -2
(i) 19
(j) $5\sqrt{2}$
(k) $2\sqrt{5}$
(l) $\frac{9}{10}$
(m) $\frac{5}{6}$
(n) $3\sqrt{10}$
(o) $\sqrt{10}$
(p) 3
(q) $5\sqrt{3}$
(r) $2\sqrt{3}$
(s) $\frac{1}{2}$
(t) $\frac{51\sqrt{5}}{5}$
(u) 1
(v) $\frac{2}{9}$
(w) $\frac{31}{108}$

Rép. 1.43 (a) $1-\sqrt{5}$ (b) 2 (c) $a^2 + a\sqrt{b} - 6b$

Rép. 1.44 (a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot 1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{(1-\sqrt{2})\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$

Examinez bien comment la calculatrice représente ces valeurs.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad \frac{-(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{5}}{5}$$

Rép. 1.45 (a) $\dfrac{a}{(a^2)^{3/2}} = \dfrac{a}{a^3} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

(b) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2^2} + a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5a^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{5}\,a}{2}$

(c) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\dfrac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}$

(d) $\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{4}}} = \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{4}{a^2+4b^2}} = \dfrac{a}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{\sqrt{4}}}{\sqrt{a^2+4b^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}}$

Rép. 1.46 (a) $x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2$
(b) $5x^{2/3} = 5(\sqrt[3]{x})^2$
(c) $5x^{-2/3} = \frac{5}{(\sqrt[3]{x})^2}$
(d) $-4x^{2/3} = -4(\sqrt[3]{x})^2$
(e) $4xy^{-2/3} = \frac{4x}{(\sqrt[3]{y})^2}$
(f) $-2x^{2/3}y^{-5/3} = -\frac{2x^{2/3}}{y^{5/3}} = -\frac{2(\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{y})^5}$

Rép. 1.47 (a) $\sqrt{25x^2y} = (25x^2y)^{1/2} = 5xy^{1/2}$

Attention ! Si on entre l'expression $\sqrt{25x^2y}$ dans la calculatrice sans spécifier que les variables sont positives, la forme simplifiée qu'on obtiendra est $5|x|\sqrt{y}$. Pourquoi cette dernière contient-elle une valeur absolue ? Voyez l'encadré de la page 55.

(b) $\dfrac{7\left(250x^5\right)^{1/3}}{(5x^3)^{1/2}} = 7\cdot 5^{1/2}\cdot 2^{1/3}\cdot x^{1/6}$

(c) $\left(\frac{64x^2}{9^3}\right)^{1/6} = \frac{2}{3}x^{1/3}$

(d) $\dfrac{(x^0)^{1/5}(4y^{-1})^{1/2}}{3(x^3)^{1/2}} = \frac{2}{3x^{3/2}y^{1/2}}$

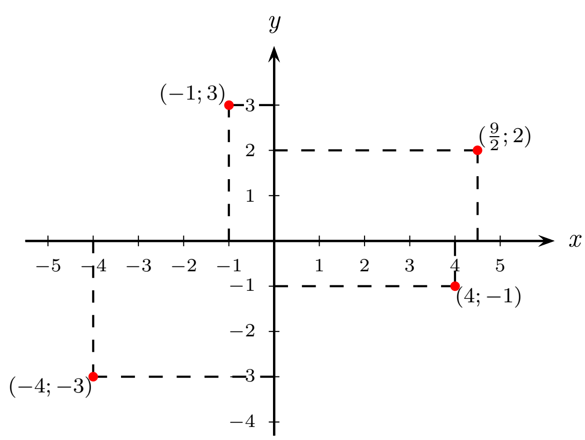
Rép. 1.48 (a) $27^{2/3} = 9$
(b) $32^{-3/5} = \frac{1}{8}$
(c) $-9^{3/2} = -27$
(d) $8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
(e) $(-4)^{3/2} \notin \mathbb{R}$
(f) $4^0 - 4^{-1} = \frac{3}{4}$
(g) $\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} = \frac{27}{8}$
(h) $\sqrt[3]{2^{15}} = 32$
(i) $\sqrt[4]{64x^{20}} = 2\sqrt{2}\,x^5$
(j) $\sqrt[5]{2x^2}\,\sqrt[5]{16x} = 2\sqrt[5]{x^3}$
(k) $\sqrt{32}\sqrt{50} = 40$
(l) $\frac{125}{64}$
(m) 4
(n) $x^{5/6}$
(o) $\frac{1}{a^{7/4}}$
(p) $x^{2/5}y^{1/6}$
(q) $\frac{2^{2/3}}{x^{3/20}}$
(r) $\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$
(s) $35x^{5/4}$
(t) $2x^{11/12}$
(u) $5x^3y^2$
(v) $\frac{125x^3}{y}$

Rép. 1.49 (a) $10^{2/5} > 7^{2/5}$
(b) $10^{-2/5} < 7^{-2/5}$
(c) $0{,}5^{-2/5} < 0{,}1^{-2/5}$

Rép. 1.50 (a) $\frac{\sqrt{17}}{17}$
(b) $5\sqrt[3]{5}$
(c) $2x\sqrt[3]{2y}$
(d) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{a}{2\sqrt{b}}$
(e) $y\sqrt{7x}$
(f) $-\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{y}{5}}$
(g) L'expression ne peut pas être simplifiée.
(h) $\sqrt{x+y}$

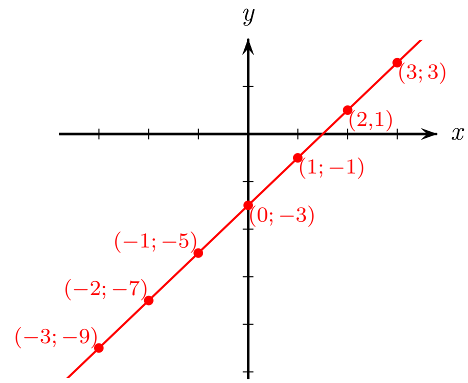
Rép. 1.51 (a) $-\dfrac{2}{(6x-1)^{4/3}}$
(b) $\dfrac{5x+1}{(5x^2+2x)^{1/2}} = \dfrac{5x+1}{\sqrt{5x^2+2x}}$
(c) $\dfrac{x-1}{(2x-1)^{3/2}}$

Rép. 1.52 La première valeur d'un couple correspond à la projection du point sur l'axe des x tandis que la deuxième valeur correspond à celle sur l'axe des y.



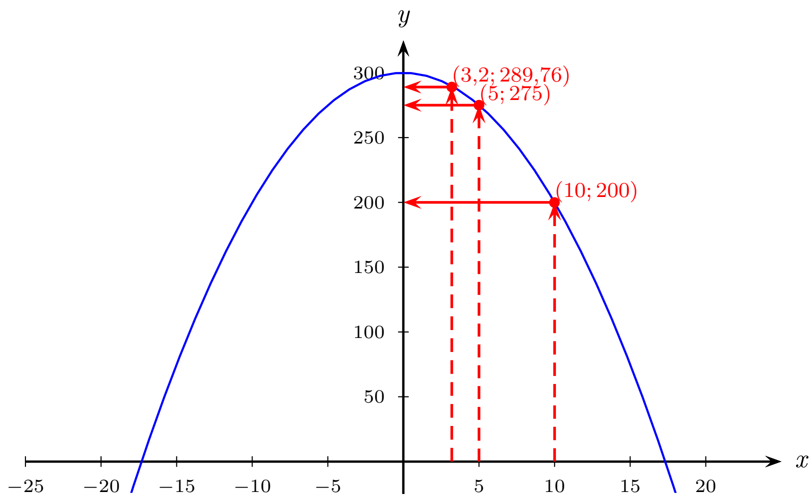
Rép. 1.53 Pour tracer le graphe, on donne des valeurs à x et on calcule les valeurs correspondante y en évaluant $f(x)$. On place ensuite les couples trouvés dans le plan et on les relie par une courbe lisse.

x	$y = 2x - 3$	$(x; y)$
-3	-9	$(-3; -9)$
-2	-7	$(-2; -7)$
-1	-5	$(-1; -5)$
0	-3	$(0; -3)$
1	-1	$(1; -1)$
2	1	$(2; 1)$
3	3	$(3; 3)$

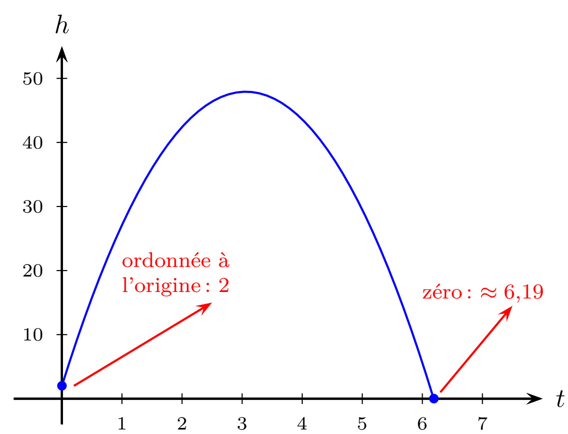


L'ordonnée à l'origine est -3. Pour que $2x - 3 = 0$, x doit être $3/2$. Le zéro est donc $3/2$.

Rép. 1.54 Les valeurs trouvées à l'exercice 1.34, respectivement 275, 200 et 289,76, correspondent aux ordonnées des points d'abscisses 5, 10 et 3,2 respectivement.



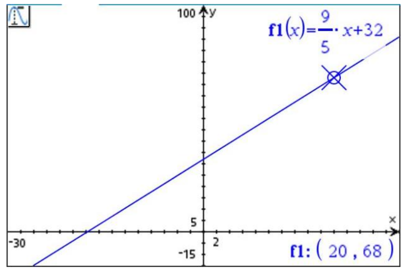
Rép. 1.55 Le graphe de h dans une fenêtre où $t \in [0; 7]$ et $h \in [0; 50]$ est le suivant.



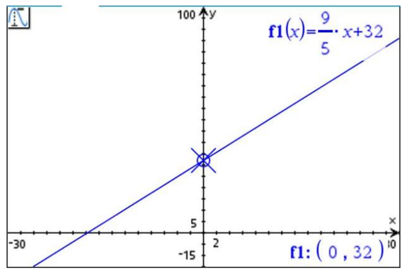
(a) Elle correspond à la hauteur de laquelle l'objet a été lancé. C'est-à-dire, 2 m est la valeur obtenue en évaluant $-4{,}9t^2 + 30t + 2|_{t=0}$.

(b) Il correspond au temps écoulé entre le lancé et le moment où l'objet frappe le sol, environ 6,19 s. On le trouve à l'intersection du graphe de la fonction et l'axe des abscisses (dans ce cas-ci, l'axe des t).

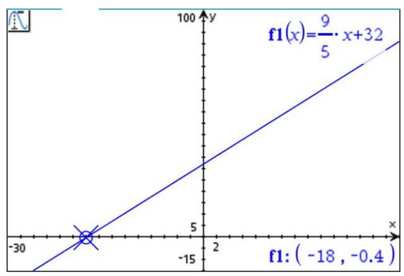
Rép. 1.56 (a) 20°C= 68°F, 68 correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 20



(b) l'ordonnée à l'origine est 32, dans des conditions normale, l'eau gèle à 0°C= 32°F



(c) 0°F=$-17{,}\overline{7}$°C ≈ -18°C, elle correspond au zéro de la fonction, c'est-à-dire à l'abscisse du point d'ordonnée 0



Rép. 1.57
(a) $\frac{4}{5}-\frac{1}{a}=\frac{4a-5}{5a}$
(b) $\frac{9a+16b}{72}$
(c) $\frac{-9a+25b+1}{30ab}$
(d) $\frac{6x+y}{2x}$
(e) $\frac{x}{2}$
(f) $\frac{2}{a+4}$
(g) $\frac{2x+8}{3y-9}$
(h) $\frac{-1}{7}$
(i) x
(j) $\frac{55x+4}{27}$
(k) $\frac{1}{3}$
(l) $\frac{-4x-4}{5x+20}$
(m) $\frac{-5}{6b}$
(n) $\frac{1}{xy}$
(o) $\frac{1}{2}$
(p) 1
(q) $\frac{-12}{x-7}$
(r) $\frac{-8xy}{z}$
(s) $\frac{5-2x}{3y}$
(t) $\frac{15x+4}{3}$

Rép. 1.58
(a) $\frac{a^{10}}{b^2}$
(b) $\frac{1}{64x^3}$
(c) $\frac{x^7}{9}$
(d) $8x^2y^3z^2$
(e) $\frac{1}{a^8b^4}$
(f) $\frac{48}{49}$
(g) x^4
(h) $\frac{9(a+b)^3}{a^2}$
(i) a^4b^4
(j) a^6b^{12}
(k) $\frac{49x^3}{y}$
(l) $\frac{a^5b^2}{2}$
(m) x^8
(n) $4a^{10}b^{10}$
(o) $\frac{4a^3}{b}$
(p) $\frac{a^{27}}{b^{37}}$
(q) $5x^3y^9$
(r) $\frac{4x}{y^3}$
(s) $\frac{16}{7}x$
(t) $\frac{36}{x^2}$

Rép. 1.59
(a) $\frac{3}{2\sqrt{2}x}=\frac{3\sqrt{2}}{4x}$
(b) $\frac{3}{20}a^{2/5}$
(c) $a^{4/3}b^{5/3}$
(d) $\frac{x^{4/3}}{y^2z^6}$
(e) x^2
(f) $(x-y)^{1/6}$
(g) $-x^3y^2$
(h) $\frac{(x+y)^{5/2}}{(x-y)^{9/2}}$
(i) $x^{3/2}y^{5/2}$
(j) $\frac{6}{(a+2b)^{17/12}}$
(k) $\frac{y^{8/3}}{x^4}$
(l) $\frac{b^{13/6}c}{a^2}$
(m) $\frac{4}{5x^2}$
(n) $3(ab)^{1/5}$
(o) $\frac{y^{1/8}}{a^{1/10}}$
(p) $\frac{1}{a^6b^{9/4}}$
(q) $9ac^{3/2}$
(r) $\frac{1}{x^{13/3}y^{14/3}}$
(s) 1
(t) x^6y^{14}

Chapitre 2

Rép. 2.1

(a) $A = 6c^2$ est de degré 2, tandis que $V = c^3$ est de degré 3.

(b) $A|_{c=10} = 6(10)^2 = 600$ cm^2 et $V|_{c=10} = (10)^3 = 1000$ cm^3

(c) Non, si on double c, l'aire quadruple et le volume est multiplié par 8. En effet, $(2c)^2 = 4c^2$ et $(2c)^3 = 8c^3$

Rép. 2.2

(a) $A = 2\pi rh$ est de degré 2, tandis que $V = \pi r^2 h$ est de degré 3.

(b) $V|_{r=4,h=9} = \pi(4)^2(9) = 144\pi \approx 452{,}4$ cm^3 et $A|_{r=4,h=9} = 2\pi(4)(9) = 72\pi \approx 226{,}2$ cm^2

(c) Si $r = 1$ cm, alors $h = 49$ cm fait en sorte que $V|_{r=1,h=49} = \pi \cdot (1)^2 \cdot 49 = 49\pi$ cm^3
Si $h = 1$ cm, alors $r = 7$ cm. En effet, $V|_{r=7,h=1} = \pi \cdot (7)^2 \cdot 1 = 49\pi$ cm^3
Pour trouver un troisième cylindre, on peut choisir une valeur (qu'elle soit entière ou non) pour r et ensuite en déduire la valeur h qui fait en sorte que $\pi r^2 h = 49\pi$. Par exemple, si $r = 2$ cm alors $V|_{r=2} = \pi(2)^2\, h = 4\pi\, h$. On cherche donc h tel que $4\pi\, h = 49\pi$. On en déduit [iii] $h = \frac{49}{4} = 12{,}25$ cm. Dans le cas où $r = 1$ et $h = 49$, $A|_{r=1,h=49} = 2\pi\cdot 1\cdot 49 = 98\pi \approx 307{,}88$ cm^2, dans celui où $r = 7$ et $h = 1$, $A|_{r=7,h=1} = 2\pi \cdot 7 \cdot 1 = 14\pi \approx 43{,}98$ cm^2 et dans celui où $r = 2$ et $h = 49/4$, $A|_{r=2,h=49/4} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{49}{4} = 49\pi \approx 153{,}9$ cm^2.

(d) On choisit une valeur pour r ou pour h et on déduit l'autre valeur. Si, par exemple, $r = 3$ m, $h = \frac{100}{9\pi} \approx 3{,}54$ m et l'aire de la surface latérale est $2\pi rh|_{r=3,h=\frac{100}{9\pi}} = \frac{200}{3} \approx 66{,}67$ m^2.

Rép. 2.3

(a) $V_{ext} = \pi\left(r + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \cdot h$, $V_{int} = \pi\left(r - \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \cdot h$

$$V = V_{ext} - V_{int} = \pi\left(r + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 h - \pi\left(r - \frac{\Delta x}{2}\right)^2 h$$

(b) On évalue V en $r = 4$ cm, $h = 9$ cm et $\Delta x = 1$ mm $= 0{,}1$ cm

$$V_{r=4,h=9,\Delta x=0,1} \approx 22{,}62 \text{ cm}^3$$

Rép. 2.4

(a) polynôme de degré 6

(b) pas un polynôme car l'exposant $3/2 \notin \mathbb{N}$

(c) polynôme de degré 1

(d) polynôme de degré 2

(e) pas un polynôme car $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 3x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3}$, les exposants ne sont pas dans $\mathbb{N}$

(f) monôme (polynôme à un seul terme) de degré 0

(g) polynôme de degré 3

(h) polynôme de degré 5

(i) polynôme de degré 4

Rép. 2.5

(a) 4

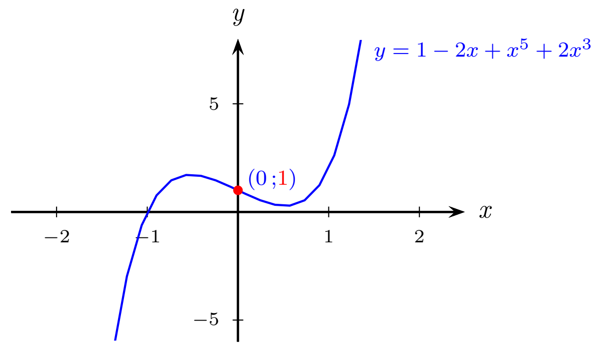
(b) 5

(c) 1, cette valeur correspond à l'ordonnée à l'origine de la fonction. En effet,

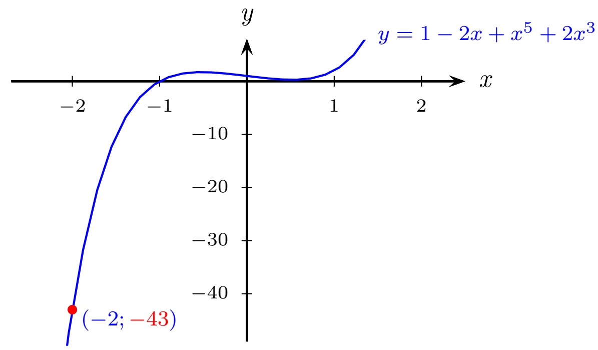
$$P(0) = 1 - 2 \cdot 0 + 0^5 + 2 \cdot 0^3 = 1.$$

Tous les termes contenant un facteur x s'annulent lorsque $x = 0$. Seul le terme constant n'est pas affecté par le valeur de x.

iii. L'égalité $4\pi\, h = 49\pi$ est en fait une équation en h et on verra la résolution d'équations en détail au chapitre 3.



(d) -2
(e) 2
(f) 0
(g) $P(-1) = 0$
(h) $P(-2) = -43$, -43 correspond à l'ordonnée du point d'abscisse -2.



(i) $P(t) = 1 - 2t + t^5 + 2t^3$

Rép. 2.6
(a) 5
(b) 4
(c) -2
(d) $3(-1)(2)^2(3) - 2(-1)^2(3) + 5(2)^2 + (-1) - 2 = -25$
(e) $3(1)(2a)^2(-1) - 2(1)^2(-1) + 5(2a)^2 + (1) - 2 = -12a^2 + 2 + 20a^2 - 1 = 8a^2 + 1$
(f) $3x(2x)^2(-x) - 2x^2(-x) + 5(2x)^2 + x - 2 = -12x^4 + 2x^3 + 20x^2 + x - 2$

Rép. 2.7
(a) $8x^2 - 7x + 5$
(b) $5x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 3x + 4$
(c) $-5x^2y - 2x + 7y^2 - y + 5xy + 12$
(d) $x^2 + 5xy - 3x + 2y$

Rép. 2.8
(a) $h_{Lune}|_{t=3} = 54{,}8$ m
(b) $h_{Terre}|_{t=3} = 17{,}9$ m
(c) $4{,}1t^2$
(d) $4{,}1t^2|_{t=3} = 36{,}9$ m ce qui est cohérent avec $54{,}8 - 17{,}9 = 36{,}9$.

Rép. 2.9
(a) $-15x^6$
(b) $2t^3x^2y^3$
(c) $2x^3y^4z^4$
(d) $15x^3 - 10x^2 + 5x$
(e) $6x^3y - 9t^2x^2$
(f) $3x^2 + 5xy - 2y^2$
(g) $2x^3 - 13x^2 + 20x$
(h) $3x^3 - 7x^2 + 4$

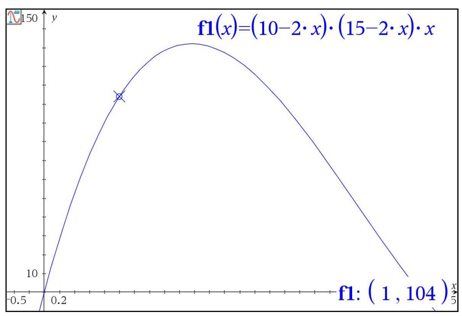
Rép. 2.10 $(4x+3)(2x+1)-3(x+1)=8x^2+7x$

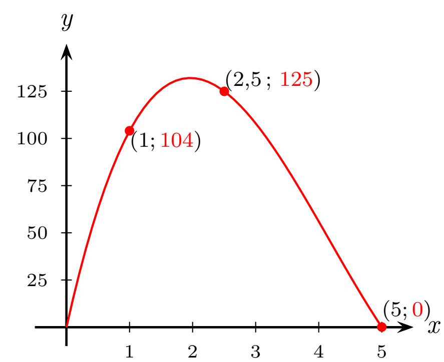
Rép. 2.11 $x^2+14x+5$

Rép. 2.12 (a) $V=x\cdot(10-2x)\cdot(15-2x)=4x^3-50x^2+150x$

(b) $V|_{x=1}=104$ cm^3, $V|_{x=2,5}=125$ cm^3 et $V|_{x=5}=0$ cm^3
Parmi ces trois boîtes, celle de hauteur $x=2{,}5$ cm a le plus grand volume, soit 125 cm^3.

(c) Sur le graphique, les valeurs calculées correspondent aux ordonnées des points dont les abscisses sont 1, 2,5 et 5.





Rép. 2.13 (a) $2x(x^2+3)$ (b) $3x^2(6x^2-2x+3)$ (c) $(2x-1)(x^2+5)$

Rép. 2.14 (a) $A(6B-A)$

(b) L'expression à factoriser est équivalente à $2A\cdot 3B+A^2\cdot(-1)$ sauf que A est remplacé par $3x-2$ et B est remplacé par $(1-x)$ et on doit effectuer une simplification finale.

$$\begin{aligned} 2\cdot(3x-2)\cdot 3\cdot(1-x)+(3x-2)^2\cdot(-1) &= 6\cdot(3x-2)\cdot(1-x)-(3x-2)^2 \\ &= (3x-2)\,[6(1-x)+(3x-2)(-1)] \\ &= (3x-2)\,[6-6x-3x+2] \\ &= (3x-2)(8-9x) \end{aligned}$$

(c) $3A^3(A+4B)$
(d) $3(x-1)^3(5x-1)$
(e) $A^2B^4(9B+10A)$
(f) $(3x+2)^2(2x-1)^4(48x+11)$
(g) $-4(5-x)^3(4x-3)^8(13x-48)=4(x-5)^3(4x-3)^8(13x-48)$

Vous pouvez vérifier vos réponses à l'aide de la calculatrice en entrant une expression sur une ligne de commande et en appuyant sur la touche [enter]. La calculatrice donne parfois une réponse factorisée. Si la calculatrice ne donne pas une réponse factorisée, utilisez la commande `Factoriser` du menu algèbre.

Rép. 2.15 (a) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$
(b) $x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$
(c) $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$
(d) $(x-5)(x+4)$
(e) $(x+3)(x+5)$
(f) $(x-11)(x-1)$
(g) $(t-6)(t+1)$
(h) $-(x+1)(x+4)$

Rép. 2.16 (a) $144-25x^2=12^2-(5x)^2=(12-5x)(12+5x)$
(b) $49y^2-36x^2=(7y-6x)(7y+6x)$
(c) $x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)$
(d) $25x^2-100(x+1)^2=(5x)^2-(10(x+1))^2=(5x-10(x+1))(5x+10(x+1))$
$=(-5x-10)(15x+10)=-5(x+2)\cdot 5(3x+2)=-25(x+2)(3x+2)$

Rép. 2.17 Aire$= 9x^2 - 4$, $p = 3x + 2$ par $q = 3x - 2$

Rép. 2.18 (a) $\pi(7{,}5 + x)^2 - \pi(7{,}5)^2 = \pi x^2 + 15\pi x \overset{TI}{=} \pi x^2 + 47{,}1239...x$

(b) $\pi x^2 + 47{,}1239...x|_{x=3{,}5} \approx 203{,}42$ m^2

(c) $2\pi(7{,}5 + x)$

(d) $2\pi(7{,}5 + x)|_{x=3{,}5} \approx 69{,}1$ m

Rép. 2.19 (a) $V_C = \pi h \left[(r + \frac{\Delta x}{2})^2 - (r - \frac{\Delta x}{2})^2\right]$

(b) Avec $A = r + \frac{\Delta x}{2}$ et $B = r - \frac{\Delta x}{2}$ et la formule de différence de carrés,

$$\begin{aligned}\left(r + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{\Delta x}{2}\right)^2 &= \left[\left(r + \frac{\Delta x}{2}\right) - \left(r - \frac{\Delta x}{2}\right)\right]\left[\left(r + \frac{\Delta x}{2}\right) + \left(r - \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \\ &= \left[\cancel{r} + \frac{\Delta x}{2} - \cancel{r} + \frac{\Delta x}{2}\right]\left[r + \cancel{\frac{\Delta x}{2}} + r - \cancel{\frac{\Delta x}{2}}\right] \\ &= \Delta x \cdot 2r.\end{aligned}$$

(c) En factorisant l'expression pour le volume du cylindre, on obtient la formule pour le volume du prisme rectangulaire droit de longueur $2\pi r$, de hauteur h et d'épaisseur x :

$$\begin{aligned}V_C &= \pi\left(r + \tfrac{\Delta x}{2}\right)^2 h - \pi\left(r - \tfrac{\Delta x}{2}\right)^2 h && \text{exercice 2.3} \\ &= \pi h\left[\left(r + \tfrac{\Delta x}{2}\right)^2 - \left(r - \tfrac{\Delta x}{2}\right)^2\right] && \text{mise en évidence des facteurs communs} \\ &= \pi h \cdot \Delta x \cdot 2r && \text{de (b)} \\ &= 2\pi r h \Delta x && \text{commutativité de la multiplication}\end{aligned}$$

Rép. 2.20 (a) $b^2 - 4ac|_{a=1,b=3,c=2} = 1 > 0$

Les racines sont $r_1 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2(1)} = -1$ et $r_2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2(1)} = -2$ donc $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

(b) $b^2 - 4ac|_{a=1,b=-8,c=7} = 36 > 0$

Les racines sont $r_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{36}}{2(1)} = 7$ et $r_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{36}}{2(1)} = 1$ donc $x^2 - 8x + 7 = (x - 7)(x - 1)$

La factorisation de ce polynôme aurait été plus rapide par inspection.

(c) $b^2 - 4ac|_{a=1,b=-2,c=-4} = 20 > 0$

Les racines sont $r_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{20}}{2(1)} = 1 + \sqrt{5}$ et $r_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{20}}{2(1)} = 1 - \sqrt{5}$

donc $x^2 - 2x - 4 = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5}))$

La factorisation de ce polynôme n'aurait pas été possible par inspection.

(d) $b^2 - 4ac|_{a=3,b=1,c=1} = -11 < 0$

Le polynôme est irréductible et donc complètement factorisé.

(e) $b^2 - 4ac|_{a=2,b=4,c=-5} = 56 > 0$

Les racines sont $r_1 = \frac{-4+\sqrt{56}}{2(2)} = \frac{-2+\sqrt{14}}{2}$ et $r_2 = \frac{-4+\sqrt{56}}{2(2)} = \frac{-2-\sqrt{14}}{2}$

donc $2x^2 + 4x - 5 = 2\left(x - \frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

Rép. 2.21 (a) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

(b) n'est pas un carré parfait

(c) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

(d) n'est pas un carré parfait

Rép. 2.22 (a) $x^2 + \underline{\qquad} + 36 = x^2 + \underline{\qquad} + 6^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 6^2$

(b) $y^2 - 20y + 100$

(c) $25x^2 + 10x + \underline{\qquad} = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 1 + \underline{\qquad} = 25x^2 + 10x + 1$

(d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Rép. 2.23
(a) $(x+4)^2$
(b) $(2x-1)^2$
(c) $(4x-5y)(4x+5y)$
(d) $(t+3)(t^2-3t+9)$
(e) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
(f) $(3+4x)(9-12x+16x^2)$
(g) $\left(3-\frac{x}{5}\right)\left(9+\frac{3x}{5}+\frac{x^2}{25}\right)$
(h) $(5x+2)(7x^2+8x+4)$
(i) $3(x-1)(x^2-11x+37)$
(j) $(1-8x)(1+8x)$
(k) $(9ab-(a+b))(9ab+(a+b))$
(l) $\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{36}(x-2)(x+2)$
(m) $(5x-2)(5x+2)$
(n) $3(x-7)(x-1)$
(o) $(3xy-4)^2$
(p) $\frac{1}{9}(2x+15)^2 ou \left(\frac{2}{3}x+5\right)^2$

Rép. 2.24
(a) $x^2(x+1)(x^2-x+1)$
(b) $x^2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
(c) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$
(d) $x^3(x-9)(x+9)$
(e) $5(2x+3)^2$
(f) $-3x(x+1)(x-5)(x+5)$
(g) $80y^2(2y-1)(2y+1)$
(h) $4xy(x+1)^2$
(i) $3(3x-1)(x+3)$
(j) $(3-2x)^2\left(\frac{3}{2}-x\right)\left(\frac{3}{2}+x\right)$
(k) $(6x-1)^2$
(l) $x^2(7x-2)(7x+2)$
(m) $2(2x+1)(x-3)$
(n) $-\frac{1}{2}(x+10)^2$
(o) $5(1-2x^2)(x-2)(x^2+2x+4)$

Rép. 2.25 (a) $\mathbb{R}\setminus\{-5;5\}$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Rép. 2.26
(a) $\frac{x+5}{x^2-25}=\frac{\cancel{x+5}}{\cancel{(x+5)}(x-5)}=\frac{1}{x-5}$ si $x\neq -5$
(b) $\frac{x^3-x}{x^2-2x+1}=\frac{x(x^2-1)}{(x-1)^2}=\frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{x(x+1)}{x-1}$ si $x\neq 1$
On remarque que 1 n'est pas dans le domaine de la fraction résultante et n'a donc pas à en être exclu.
(c) $2(x-3)$ si $x\neq 0$ et $x\neq -1$

Rép. 2.27
(a) $\frac{5}{4A^2B^2}\cdot\frac{6A^3}{5B}=\frac{3A}{2B^3}$, si $A\neq 0$
(b) $\frac{5}{4(x-1)^2(x+2)^2}\cdot\frac{6(x-1)^3}{5(x+2)}=\frac{3(x-1)}{2(x+2)^3}$, si $x\neq 1$
(c) $\frac{8x-4}{4x+12}\cdot\frac{x^2-9}{4x^2-4x+1}=\frac{\cancel{4}(2x-1)}{\cancel{4}(x+3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{(2x-1)^2}=\frac{\cancel{(2x-1)}(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(2x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{x-3}{2x-1}$, si $x\neq -3$
(d) $\frac{x^3-27}{2x^2-4x}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{x^2+3x+9}{2x}$, si $x\neq -2$, $x\neq 2$ et $x\neq 3$
(e) $\frac{9t^2-16}{t+1}\div(4-3t)=-\frac{3t+4}{t+1}$, si $x\neq 4/3$
(f) $\frac{x^2-16}{4x^2-20x+16}\div\frac{x^2+3x-4}{3x^2-6x+3}=\frac{3}{4}$, si $x\neq 1$, $x\neq -4$ et $x\neq 4$

Rép. 2.28
(a) $\dfrac{21}{8}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{16}{8}=\dfrac{2\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}}=2$
(b) Cette expression généralise la soustraction de l'exercice (a) car si on pose $x=10$ dans l'expression (b), on obtient celle de (a). La simplification en (b) se fait de la même façon qu'en (a).

$$\frac{2x+1}{x-2}-\frac{5}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}=\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=2 \text{ si } x\neq 2$$

(c) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}-\dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-2}{x-3}$, si $x\neq 2$
(d) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\cdot 3-1\cdot 5}{3\cdot 5}=\dfrac{4}{15}$
(e) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{2x}{(x+1)(x+3)}$

(f) On effectue la mise au (plus petit) dénominateur commun $(x-1)^3$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-1)^3} &= \frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)}-\frac{3}{(x-1)^3}\\ &= \frac{(x-1)^2-2(x-1)-3}{(x-1)^3}\\ &= \frac{(x^2-2x+1)-2(x-1)-3}{(x-1)^3}\\ &= \frac{x^2-4x}{(x-1)^3}=\frac{x(x-4)}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

(g) On effectue d'abord la mise au (plus petit) dénominateur commun.

$$\begin{aligned}\frac{7x-3}{5}+\frac{9+2x}{2}-\frac{9-6x}{10} &= \frac{(7x-3)}{5}\cdot\frac{2}{2}+\frac{9+2x}{2}\cdot\frac{5}{5}-\frac{9-6x}{10}\\ &= \frac{(7x-3)\cdot 2+(9+2x)\cdot 5-(9-6x)}{10}\\ &= \frac{14x-6+45+10x-9+6x}{10}\\ &= \frac{30x+30}{10}=\frac{\cancel{10}(3x+3)}{\cancel{10}}=3x+3=3(x+1)\end{aligned}$$

(h) On factorise les dénominateurs et on effectue la mise au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2-4x+4}+\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{2}{2-x} &= \frac{x-1}{(x-2)^2}+\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{-(x-2)}\\ &= \frac{x-1}{(x-2)^2}+\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{(x-2)}\\ &= \frac{(x-1)(x+2)+(x+3)(x-2)-2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}\\ &= \frac{(x^2+x-2)+(x^2+x-6)-2(x^2-4)}{(x-2)^2(x+2)}\\ &= \frac{2x}{(x-2)^2(x+2)}\end{aligned}$$

Rép. 2.29 Attention à l'ordre de priorité des opérations !

(a) $\frac{x-2}{x+1}$, si $x\neq 0$ et $x\neq 2$ (b) $\frac{2-x}{x+1}$, si $x\neq 0$ (c) $\frac{7x-17}{6}$, si $x\neq -2$

Rép. 2.30 (a) $\boxed{}=1-3x$ (b) $\boxed{}=1$

Rép. 2.31 (a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq\frac{1}{a+b}$, car $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{a\cdot b}=\frac{a+b}{a\cdot b}\neq\frac{1}{a+b}$

(b) $\frac{x^2-25}{x-5}\neq x-5$, car $\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{x-5}}=x+5\neq x-5$

Rép. 2.32 (a) Fausse, le plus petit dénominateur commun nécessaire est $x(x+3)$

(b) Vraie

Rép. 2.33 (a) $-\frac{1}{x^2}$ (e) $-\frac{10(x+1)^4}{(x-1)^6}$

(b) $-\frac{20x}{(5x^2+1)^3}$ (f) $\frac{21(2x-1)^2}{(3x+2)^4}$

(c) $-\frac{13}{(5x-1)^2}$ (g) $\frac{-30t}{(t^2-4)^4}=\frac{-30t}{(t-2)^4(t+2)^4}$

(d) $\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ (h) $-\frac{3(3x+1)}{(x-1)^5}$

Vous pouvez vérifier vos réponses à l'aide de la calculatrice en entrant l'expression sur une ligne de commande et en appuyant sur la touche [enter]. La calculatrice donnera, dans la majorité des cas, une réponse simplifiée.

Rép. 2.34 (a) $2A^2B^3(4A+3B)$
(b) $B(AB-4)$
(c) $6(y-3)^5(y-2)^2(-2y+7)$
(d) $(x-3)^2(x+1)^4(6x+11)$
(e) $2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2(5-x)=\frac{1}{2}(2x+5)^2(5-x)$
(f) $(x+7)^6(3x-2)^3(25x+14)$
(g) $18x(x-1)^2(2x+1)^2$
(h) $14(t+4)(3-t)$
(i) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)^2(11x-\frac{67}{2})$
(j) $(2x-1)^4(1-x)^3(-13x+9)$

Rép. 2.35 (a) $\frac{2x^3}{y}$
(b) $\frac{4(x^2-81)}{x+8}$, si $x\neq -3$
(c) $\frac{3(x+3)}{(x-3)^2}$, si $x\neq -3$ et $x\neq 0$
(d) $\frac{10(x-5)^2}{(x+5)^5}$, si $x\neq 5$
(e) $a+1$, si $a\neq -1$ et $b\neq -1$
(f) $(x-4)(x-6)$, , si $x\neq -4$ et $x\neq 6$
(g) $\frac{16x^2}{35}$, si $x\neq -6$ et $x\neq 0$
(h) $\frac{y(y-4)^2}{4}$, si $y\neq 1$ et $y\neq 4$
(i) $\frac{x-6}{x+6}$, si $x\neq 6$ et $x\neq 9$
(j) $\frac{x+3}{x(x-6)}$, si $x\neq 4+\sqrt{31}$, $x\neq 4-\sqrt{31}$ et $x\neq 3$

Rép. 2.36 (a) $\frac{2(5x+2)}{(2x+1)^2}$
(b) $\frac{x-7}{2(x-8)(x-9)}$
(c) $\frac{3x-16}{(x-3)(x+5)}$
(d) $\frac{-7(2x+9)}{(x+1)(x+8)}$
(e) $\frac{3x+14}{(x-2)^4}$
(f) $\frac{-1}{(5x-4)^4}$
(g) $\frac{-2x^3+x}{8x+1}$
(h) $\frac{2x^2+20x+9}{5x(3x+11)}$
(i) $4-10x$
(j) $\frac{a}{3}-\frac{1}{6a}+\frac{1}{6a^2}$ ou $\frac{2a^3-a+1}{6a^2}$

Rép. 2.37 (a) $\frac{x^2-2x-6}{(x-1)^2}$
(b) $\frac{20x(x^2-9)}{(x^2-4)^3}$, si $x\neq -3$ et $x\neq 3$
(c) $4x^3(2x-5)(3x-5)$
(d) $\frac{4}{x^2}$
(e) $\frac{5}{(2x+3)^2}$
(f) $\frac{-x(x^3-2)}{(1+x^3)^2}$
(g) $\frac{40(3x-4)^4}{(5x-4)^6}$
(h) $\frac{-4x+23}{(2x-1)^4}$
(i) $\frac{8(x+2)}{(8-x)^6}$
(j) $2x(8x^3+1)^2(8x^3+36x^2+37)$

Chapitre 3

Rép. 3.1 (a) oui, car $\frac{3(0)-1}{2}=-\frac{1}{2}$ et $5(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$
(b) non, car $(-2)^3\neq 2(-2)^2$ et on sait que $-8\neq 8$
(c) non, car $\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$, 2 n'est pas dans le domaine de l'équation et ne peut donc pas être dans son ensemble solution.

Rép. 3.2 (a), (b) et (c) sont des équations conditionnelles
(d) et (e) sont des identités
La calculatrice répond `true` lorsqu'il s'agit d'une identité ; l'équation est vérifiée quelle que soit la valeur que prend la variable dans le domaine de l'équation.
(f) est contradictoire
La calculatrice répond `false` lorsqu'il s'agit d'une équation contradictoire ; l'équation n'a aucune solution.

Rép. 3.3 (a) Les courbes $y = \frac{3+x}{3}$ et $y = x$ ne semblent s'intersecter qu'en $x = 1{,}5$.
$\frac{3+x}{3} = x$ n'est donc pas une identité puisque la véracité de l'égalité dépend de la valeur de x. Il s'agit donc d'une équation conditionnelle.

(b) Les courbes $y = 5(x+1)$ et $y = 5x+5$ semblent superposées.
Par distributivité de la multiplication sur l'addition, $5(x+1) = 5 \cdot x + 5 \cdot 1 = 5x+1$ et ce, quelle que soit la valeur x. L'équation $5(x+1) = 5x+5$ est donc une identité.

(c) Les courbes $y = (2x+3)^2$ et $y = 4x^2+12x+9$ semblent superposées.
En développant le côté gauche de l'équation à l'aide du produit remarquable carré parfait (somme) on obtient $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2+12x+9$. Puisque l'égalité est vraie quelle que soit la valeur x, l'équation est une identité.

(d) Les courbes $y = (2x+3)^2$ et $y = 4x^2+12x+10$ ne s'intersectent pas.
Comme la résolution de l'équation $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+15$,

$$(2x+3)^2 = 4x^2+12x+15 \iff 4x^2+12x+9 = 4x^2+12x+15 \iff 9 = 15$$

amène à une impossibilité, elle n'a aucune solution. L'équation est contradictoire.

Rép. 3.4 On donne ici les solutions pour (e) et (h). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

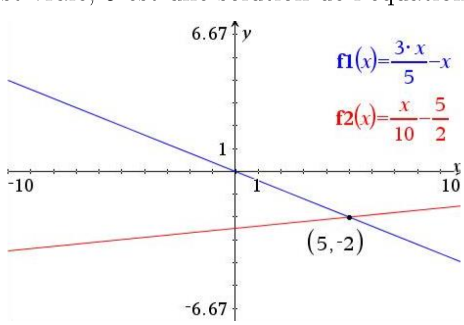
(e) On commence par trouver le plus petit dénominateur commun de chacun des membres de l'équation, on multiplie par 10, on simplifie et, finalement, on divise par -5.

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{5} - x = \frac{x}{10} - \frac{5}{2} \quad &\iff \quad \frac{3x-5x}{5} = \frac{x-25}{10} \\
&\iff \quad \frac{-2x}{5} = \frac{x-25}{10} \\
&\iff \quad \frac{-2x}{5} \cdot 10 = x - 25 \\
&\iff \quad -4x = x - 25 \\
&\iff \quad -5x = -25 \\
&\iff \quad x = 5
\end{aligned}$$

Validation. On vérifie la réponse en la substituant dans l'équation de départ.

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{5} - x \quad &= \quad \frac{x}{10} - \frac{5}{2} \\
\frac{3(5)}{5} - (5) \quad &\stackrel{?}{=} \quad \frac{(5)}{10} - \frac{5}{2} \\
-2 \quad &= \quad -2
\end{aligned}$$

Puisque la dernière égalité est vraie, 5 est une solution de l'équation de départ.



La solution $x = 5$ correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux droites $y = \frac{3x}{5} - x$ et $y = \frac{x}{10} - \frac{5}{2}$.

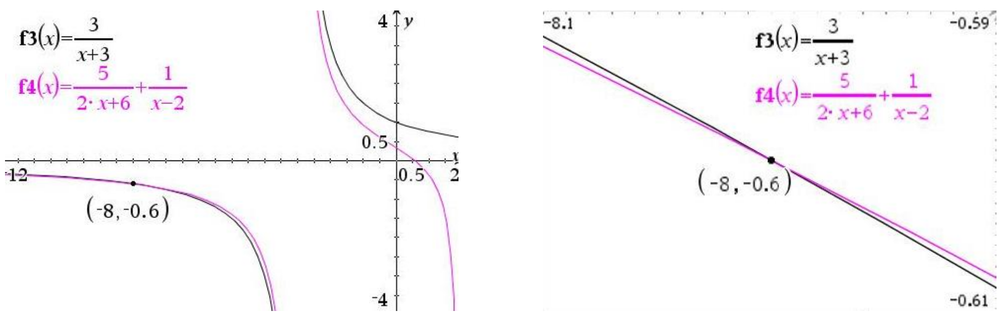
(h) On commence par déterminer le plus petit dénominateur commun, on effectue la mise au dénominateur commun et, ensuite, on compare les numérateurs.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x+3}=\frac{5}{2x+6}+\frac{1}{x-2} \quad &\iff \quad \frac{3}{x+3}=\frac{5}{2(x+3)}+\frac{1}{x-2}\\
&\iff \quad \frac{6(x-2)}{2(x+3)(x-2)}=\frac{5(x-2)}{2(x+3)(x-2)}+\frac{2(x+3)}{2(x+3)(x-2)}\\
&\overset{x\neq 2 \text{ et } x\neq -3}{\iff} \quad 6(x-2)=5(x-2)+2(x+3)\\
&\iff \quad 6x-12=5x-10+2x+6\\
&\iff \quad x=-8
\end{aligned}$$

Validation. On vérifie la réponse en substituant la valeur -8 dans l'équation de départ.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x+3} &= \frac{5}{2x+6}+\frac{1}{x-2}\\
\frac{3}{(-8)+3} &\overset{?}{=} \frac{5}{2(-8)+6}+\frac{1}{(-8)-2}\\
\frac{3}{-5} &\overset{?}{=} \frac{5}{-10}+\frac{1}{-10}\\
\frac{3}{-5} &= -\frac{6}{10}
\end{aligned}$$

Puisque la dernière égalité est vraie, on conclut que -8 est une solution de l'équation de départ.



La solution $x=-8$ correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux courbes $y=\frac{3}{x+3}$ et $y=\frac{5}{2x+6}+\frac{1}{x-2}$.

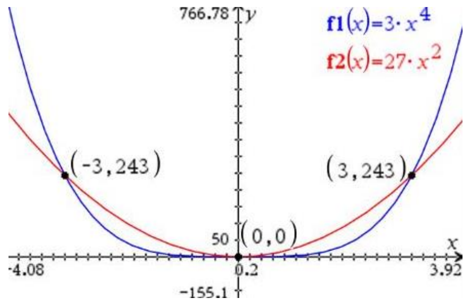
Attention ! Même si les deux courbes semblent coïncider à plus d'un endroit, ce n'est peut-être pas le cas. Comment en être certain ? Grâce à la résolution de l'équation qu'on fait algébriquement...

Rép. 3.5 $x=\frac{20}{21}\approx 0{,}95$ m, $3x=\frac{60}{21}\approx 2{,}86$ m et $10-3x=\frac{50}{7}\approx 7{,}14$ m
Validation. Les proportions semblent cohérentes avec la figure.

Rép. 3.6 On donne ici la solution pour (a). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.
(a) On soustrait $27x^2$ des deux membres pour tout ramener à gauche, on factorise et on utilise la règle du produit nul.

$$\begin{aligned}
3x^4=27x^2 \quad &\iff \quad 3x^4-27x^2=0\\
&\iff \quad 3x^2(x^2-9)=0\\
&\iff \quad 3x^2(x-3)(x+3)=0\\
&\iff \quad x=0 \ \text{ ou } \ x=3 \ \text{ ou } \ x=-3
\end{aligned}$$

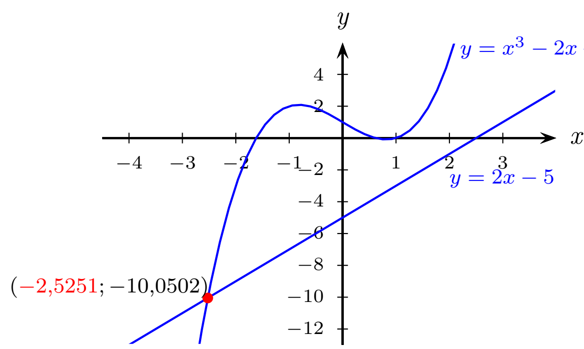
Les solutions correspondent bien aux abscisses des points d'intersection des courbes $y=3x^4$ et $y=27x^2$.



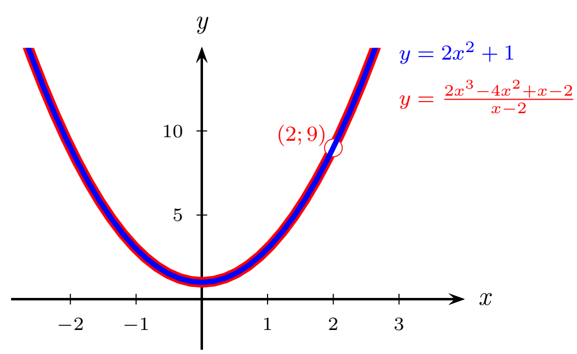
Validation. On peut toujours substituer les valeurs dans l'équation de départ pour s'assurer que toutes les égalités sont vraies.

$$3 \cdot 0^4 \stackrel{?}{=} 27 \cdot 0^2 \iff 0 = 0$$
$$3 \cdot 3^4 \stackrel{?}{=} 27 \cdot 3^2 \iff 243 = 243$$
$$3 \cdot (-3)^4 \stackrel{?}{=} 27 \cdot (-3)^2 \iff 243 = 243$$

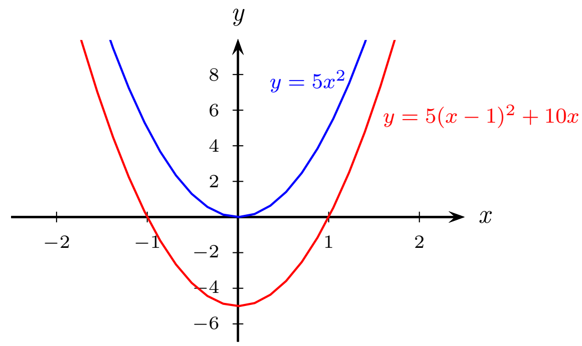
Rép. 3.7 (a) $x = -2.5251$, E.S.$= \{-2{,}5251\}$. Il s'agit de l'abscisse du point d'intersection des courbes $y = 2x - 5$ et $y = x^3 - 2x + 1$.



(b) `true`, l'ensemble solution est égal à l'ensemble de référence $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Les courbes sont superposées sauf en $x = 2$ où $\left.\frac{2x^3-4x^2+x-2}{x-2}\right|_{x=2}$ n'est pas définie, même si $y = 2x^2 + 1$ est définie et vaut 9. La courbe $y = \frac{2x^3-4x^2+x-2}{x-2}$ a un trou en $(2; 9)$.



(c) `false`, équation contradictoire donc E.S.$= \{\} = \emptyset$, les courbes sont parallèles, elles ne se croisent pas.



Rép. 3.8 On donne ici les solutions pour (e) et (g). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

Dans ce qui suit, on suppose qu'il n'y a aucune division par 0.

(e) On ramène d'abord tout au numérateur, on développe le produit et on isole R.

$$\begin{aligned} I = \tfrac{nE}{R+nr} &\iff I\,(R+nr) = nE \\ &\iff IR + Inr = nE \\ &\iff IR = nE - Inr \\ &\iff R = \tfrac{nE-Inr}{I} \end{aligned}$$

(g) On ramène tous les termes qui contiennent y' d'un côté de l'égalité, on met y' en évidence et on l'isole.

$$\begin{aligned} 2xy^3 + 3x^2y^2y' = 4y' - 1 &\iff 2xy^3 + 1 = 4y' - 3x^2y^2y' \\ &\iff 2xy^3 + 1 = \left(4 - 3x^2y^2\right) y' \\ &\iff y' = \frac{2xy^3+1}{4-3x^2y^2} \end{aligned}$$

Rép. 3.9 Soit x et y les deux nombres, alors $P = (70-y)y = -y^2 + 70y$.

Rép. 3.10 Soit h la hauteur de la boîte de conserve. Son aire totale A est donnée par la somme de son aire latérale et de l'aire des deux disques fermant ses extrémités.

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

On résout l'équation pour h.

$$\begin{aligned} A = 2\pi rh + 2\pi r^2 &\iff A - 2\pi r^2 = 2\pi rh \\ &\iff h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} \end{aligned}$$

Rép. 3.11 Soit h la hauteur de la boîte. Le volume V de la boîte est donné par $25\,600 = hc^2$, ce qui implique que $h = \frac{25\,600}{c^2}$. L'aire est donnée par $A = c^2 + 4hc$. En substituant l'expression de h dans l'équation de l'aire, on obtient

$$A = c^2 + 4 \cdot \frac{25\,600}{c^2} \cdot c = c^2 + \frac{102\,400}{c}.$$

Rép. 3.12 La longueur L de l'échelle est donnée par $L = \sqrt{x^2 + (y+2{,}5)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2}$.

Les triangles rectangles étant semblables, les côtés homologues sont proportionnels, ce qui permet d'écrire une équation reliant x et y.

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2{,}5}{y}$$

On résout l'équation pour y.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} = \frac{y+2{,}5}{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad xy = 3(y+2{,}5) \\ &\Longleftrightarrow \quad xy = 3y + 7{,}5 \\ &\Longleftrightarrow \quad xy - 3y = 7{,}5 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-3)y = 7{,}5 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{7{,}5}{x-3} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{15}{2(x-3)} \end{aligned}$$

On remplace y dans l'équation de la longueur de l'échelle pour obtenir L en fonction de x.

$$L = \sqrt{x^2 + \left(\frac{15}{2(x-3)} + \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{15+5x-15}{2(x-3)}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5x}{2x-6}\right)^2}$$

Rép. 3.13 (a) $T = 30 + 8(x-3)$
(b) 4,25 km
(c) 102°C, on comprend alors l'étonnement des experts...

Rép. 3.14 150 mL d'eau

Rép. 3.15 $h = \frac{500}{21\pi} \approx 7{,}58$ m

Rép. 3.16 17 h 15

Rép. 3.17 environ 4,88 km/h

Rép. 3.18 Mathilde a 12 ans et Gérard, son père, a 36 ans.

Rép. 3.19 Il y a eu 8000 visites le premier jour, 6000 le deuxième et 2000, le troisième

Rép. 3.20 1600 km

Rép. 3.21 1 h 12 minutes

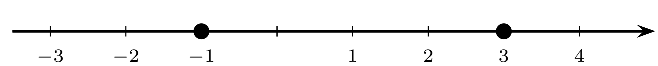
Rép. 3.22 (a) $d_i = \dfrac{2d_o}{d_o - 2}$
(b) $d_i = \left.\dfrac{2d_o}{d_o - 2}\right|_{d_o = 400 \text{ cm}} = \dfrac{400}{199}$ cm, soit environ 2,01 cm

Rép. 3.23 L'employé prendrait 15 jours.

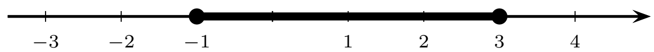
Rép. 3.24 Le photocopieur le plus récent prendrait 15 minutes et le plus ancien prendrait 30 minutes.

Rép. 3.25 Ils sont 6 amis à se partager le coût de la location et ils doivent payer 200 $ chacun.

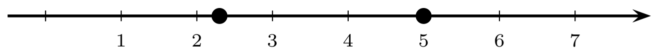
Rép. 3.26 (a) $\{-1\,;3\}$



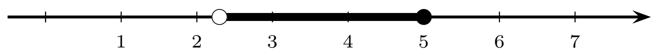
(b) $[-1\,;3]$



(c) $\{2{,}3\,;5\}$



(d) $]2{,}3\,;5]$



Rép. 3.27 On donne ici la réponse pour (c). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

(c) On détermine d'abord si 0 est une solution de l'inéquation en substituant la valeur 0 dans l'inéquation.

$$\begin{aligned}\frac{(0)-4}{12} \overset{?}{\geq} \frac{(0)-2}{9}+\frac{5}{18} \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \overset{?}{\geq} -\frac{2}{9}+\frac{5}{18}\\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{6}{18} \overset{?}{\geq} -\frac{4}{18}+\frac{5}{18}\\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{6}{18} \overset{?}{\geq} \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Puisque l'inégalité est fausse, 0 n'est pas dans l'ensemble solution de l'inéquation.

Pour résoudre l'inéquation, on détermine le plus petit dénominateur commun, on effectue la mise au dénominateur commun et on résout l'inéquation linéaire obtenue. Attention, à la dernière étape, puisqu'on divise par -1, qui est un nombre négatif, on inverse le sens de l'inégalité.

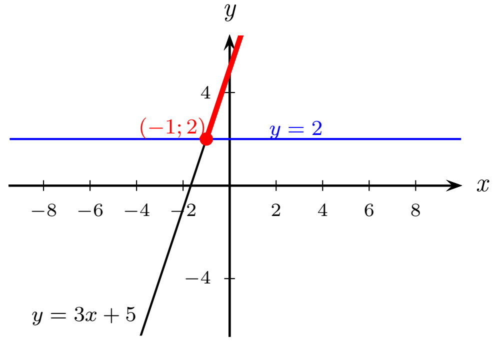
$$\begin{aligned}\frac{x-4}{12} \geq \frac{x-2}{9}+\frac{5}{18} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x-4}{2^2 3} \geq \frac{x-2}{3^2}+\frac{5}{2\cdot 3^2}\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{3\,(x-4)}{2^2 3^2} \geq \frac{2^2\,(x-2)}{2^2 3^2}+\frac{2\cdot 5}{2^2\cdot 3^2}\\ &\Longleftrightarrow \quad 3\,(x-4) \geq 2^2\,(x-2)+10\\ &\Longleftrightarrow \quad 3x-12 \geq 4x-8+10\\ &\Longleftrightarrow \quad -x \geq 14 \Longleftrightarrow x \leq -14\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $]-\infty;-14]$ et, tel qu'attendu, 0 ne fait pas partie de cet intervalle.

Rép. 3.28 On donne ici les réponses pour (a) et (f). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

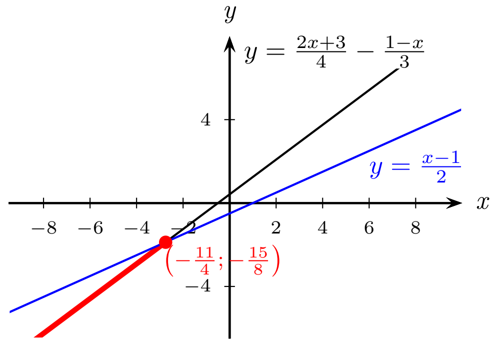
(a) $x \in\,]-1;\infty[$

La droite $y = 3x+5$ est bien au-dessus de la droite $y = 2$ sur cet intervalle.

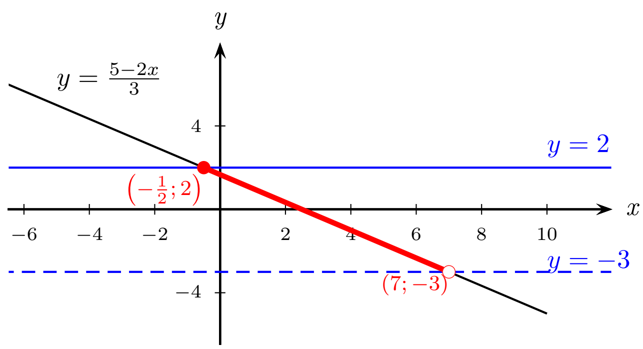


(f) $x \in\,]-\infty;-\frac{11}{4}]$

La droite $y = (2x+3)/4 - (1-x)/3$ est bien sous de la droite $y = (x-1)/2$ sur cet intervalle et les deux termes y sont égaux en $x = -11/4$ puisque les courbes s'intersectent à cet endroit.



Rép. 3.29 (a) $x \in [-1; \frac{2}{3}[$
(b) $x \in]-\frac{11}{2}; \frac{1}{2}[$
(c) $x \in [-\frac{1}{2}; 7[$



Rép. 3.30 (a) Son IMC est environ 37,3 kg/m^2 et, selon le modèle de l'indice de masse corporelle, il serait considéré obèse.

Un tel homme est généralement considéré obèse mais ne l'est pas nécessairement, il pourrait être champion en musculation ! [iv]

(b) On résout $18{,}5 < \frac{m}{1{,}69^2} < 25$ pour m et on trouve $52{,}8... < m < 71{,}4....$ On conclut donc entre environ 55,8 et 71,4 kg.

(c) Puisque 1 pouce équivaut à 2,54 cm, pour convertir en mètres la taille T donnée en pouces, il faut la multiplier par $2{,}54/100 = 0{,}0254$. En divisant le poids M donné en livres par 2,2046, on obtient une approximation en kilogrammes. L'expression de l'IMC pour un poids en livres et une taille en pouces devient donc

$$\text{IMC} \approx \frac{M/2{,}2046}{(0{,}0254)^2T^2} = \frac{M}{(2{,}2046)(0{,}0254)^2T^2} \approx \frac{M}{0{,}0014223197\,T^2}.$$

(d) On résout $\dfrac{M}{(2{,}2046)(0{,}0254)^2(71)^2} \geq 30$ pour M et on trouve $M \geq 215{,}097...$ On conclut que la personne sera considérée obèse si son poids excède environ 215,1 lbs.

Rép. 3.31 (a) Si x désigne le nombre de passages au coût de 3,50 \$, on doit résoudre $3{,}50x \geq 14$. On choisit l'inégalité large ($\geq$) plutôt que l'inégalité stricte ($>$), car à tarif égal, mieux vaut profiter du *Week-end illimité*.

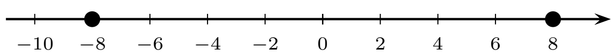
On trouve $x \geq 4$ passages et on en conclut qu'il est avantageux d'acheter un titre pour la fin de semaine si on compte prendre le métro au moins 4 fois.

iv. L'IMC est une mesure utile du surpoids et de l'obésité dans une population mais il ne donne toutefois qu'une indication approximative, car il ne correspond pas forcément au même degré d'adiposité d'un individu à l'autre.

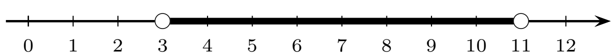
(b) Lorsque $x \geq \frac{a}{p}$ il est avantageux d'acheter une carte *Week-end illimité*.

Rép. 3.32 Plus de 97,4 km

Rép. 3.33 (a) $|x| = 8 \iff x = -8 \quad \text{ou} \quad x = 8$.
Les solutions de l'équation sont les nombres dont la distance à l'origine est de 8, soient -8 et 8. L'ensemble solution est $\{-8; 8\}$.



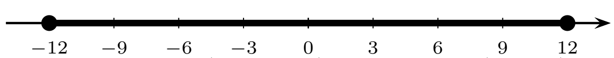
(b) $|x - 7| < 4 \iff -4 < x - 7 < 4 \iff 3 < x < 11$.
Les solutions de l'inéquation sont les nombres dont la distance à 7 est inférieure à 4. Il s'agit de tous les nombres compris entre 3 et 11. L'ensemble solution est donc $]3; 11[$.



(c) $|7 - x| < 4 \iff |-(-7 + x)| < 4 \iff |-7 + x| < 4 \iff |x - 7| < 4 \iff 3 < x < 11$.
Même ensemble solution et interprétation qu'en (b).

(d) $\left|x - \frac{1}{10}\right| \geq 1 \iff x - \frac{1}{10} \leq -1 \quad \text{ou} \quad x - \frac{1}{10} \geq 1 \iff x \leq -\frac{9}{10} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{11}{10}$.
L'ensemble solution comprend tous les nombres dont la distance au nombre $\frac{1}{10}$ est supérieure à 1. L'ensemble solution est donc $\left]-\infty; -\frac{9}{10}\right] \cup \left[\frac{11}{10}; \infty\right[$.

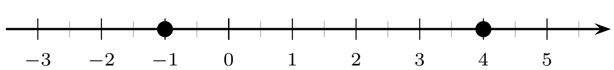
(e) $\left|\frac{1}{2}x\right| \leq 6 \iff \left|\frac{1}{2}\right| |x| \leq 6 \iff \frac{1}{2}|x| \leq 6 \iff |x| \leq 12 \iff -12 \leq x \leq 12$.
L'ensemble solution comprend tous les nombres dont la demie est à une distance inférieure à 6 de l'origine. De façon équivalente, il s'agit de tous les nombres à une distance de l'origine inférieure ou égale à 12. L'ensemble solution est donc $[-12; 12]$.



(f) $|2x - 3| = 5 \iff \left|2(x - \frac{3}{2})\right| = 5 \iff |2| \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right| = 5 \iff \left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$
qui est équivalente à la paire d'équations

$$\begin{array}{rclcrcl} x - \frac{3}{2} & = & -\frac{5}{2} & \text{ou} & x - \frac{3}{2} & = & \frac{5}{2} \\ x & = & -\frac{2}{2} & \text{ou} & x & = & \frac{8}{2} \\ x & = & -1 & \text{ou} & x & = & 4 \end{array}$$

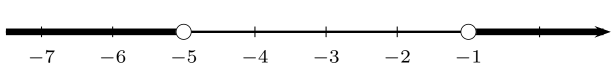
Les solutions sont les nombres dont la distance à $\frac{3}{2}$ est de $\frac{5}{2}$. L'ensemble solution est donc $\{-1; 4\}$.



(g) $|4x + 12| > 8 \iff |4(x + 3)| > 8 \iff |4| \cdot |x + 3| > 8 \iff |x + 3| > 2$
qui est équivalente à la paire d'équations

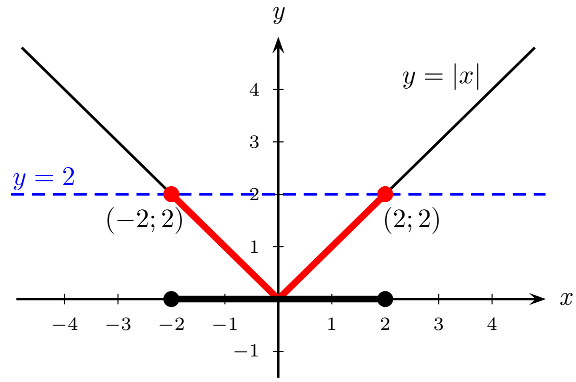
$$\begin{array}{rclcrcl} x + 3 & < & -2 & \text{ou} & x + 3 & > & 2 \\ x & < & -5 & \text{ou} & x & > & -1 \end{array}$$

Puisque $|x + 3| > 2$ peut s'écrire $|x - (-3)| > 2$, cela signifie que l'ensemble solution est composé de tous les nombres dont la distance à -3 est supérieure à 2. L'ensemble solution est donc $]-\infty; -5[\cup]-1; \infty[$.

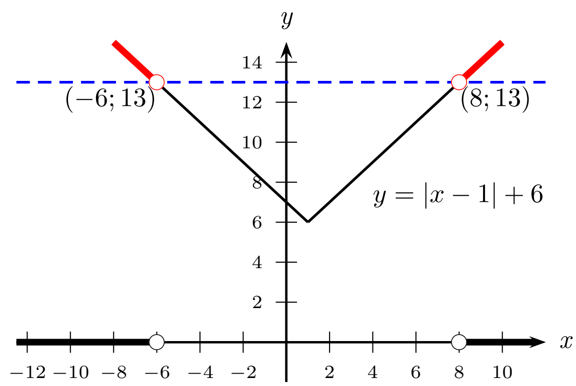


Rép. 3.34 On donne ici les solutions de (a) et de (g). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

(a) $|x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$. Ainsi, $x \in [-2; 2]$.
La courbe $y = |x|$ est bien sous la droite $y = 2$ sur cet intervalle et les ordonnées sont égales en $x = -2$ et $x = 2$, car les courbes s'intersectent en ces valeurs.



(g) $|x-1|+6 > 13 \iff |x-1| > 7 \iff x-1 < -7 \quad \text{ou} \quad x-1 > 7 \iff x < -6 \quad \text{ou} \quad x > 8$.
Ainsi, $x \in]-\infty; -6[\cup]8, \infty[$.



Rép. 3.35 (a) $|x - 71| = 7$
(b) $|x - 68| \leq 8{,}5$
(c) $|x - 6\,237| > 50$
(d) Puisque $88°\text{C} \leq T \leq 92°\text{C}$, la température de l'eau doit donc être à $\pm 2°\text{C}$ de $90°\text{C}$ donc $|T - 90| \leq 2$

Rép. 3.36 Soit h l'une des hauteurs extrêmes pouvant être atteintes par la masse (hauteur minimale ou maximale). On a que $|h - 3| = 1{,}5$. Donc

$$h_{min} - 3 = -1{,}5 \quad \text{et} \quad h_{max} - 3 = 1{,}5 \iff h_{min} = 1{,}5 \quad \text{ou} \quad h_{max} = 4{,}5.$$

La hauteur minimale pouvant être atteinte par la masse est 1,5 m et la hauteur maximale, 4,5 m.

Rép. 3.37 Soit m la masse réelle. On a que $|m - 0{,}871| \leq 0{,}001$. La masse réelle se situe donc entre 0,870 g et 0,872 g.

Rép. 3.38 Soit x le salaire horaire offert par l'entreprise à un candidat.

$$|52 \cdot 40 \cdot x + 1000 - 59\,051| \leq 3000.$$

L'entreprise offrira donc des salaires horaire variant de 26,47 \$ à 29,35 \$ de l'heure.

Rép. 3.39 Soit L la longueur d'une tige, elle sera non conforme si $|L-25|>0{,}05$. Les tiges mesurant moins de 24,95 cm ou plus de 25,05 cm seront donc rejetées.

Rép. 3.40 On donne ici la solution à (d). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

(d) On utilise le fait que $u^2=d \Longleftrightarrow u=\pm\sqrt{d}$ pour résoudre cette équation.

$$\begin{aligned}(2x-1)^2=16 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x-1=\pm 4\\ &\Longleftrightarrow \quad 2x=1\pm 4\\ &\Longleftrightarrow \quad x=\tfrac{1\pm 4}{2}\\ &\Longleftrightarrow \quad x=\tfrac{1+4}{2}=\tfrac{5}{2} \text{ ou } x=\tfrac{1-4}{2}=\tfrac{-3}{2}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$.

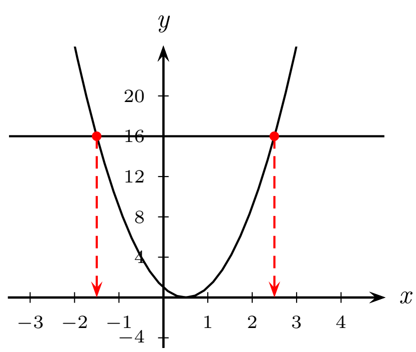
Validation. On substitue une valeur à la fois dans l'équation de départ et on vérifie qu'il y a bien égalité.

$$(2x-1)^2\big|_{x=\frac{5}{2}}=\left(2\cdot\frac{5}{2}-1\right)^2=(5-1)^2=4^2=16$$

et

$$(2x-1)^2\big|_{x=-\frac{3}{2}}=\left(2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1\right)^2=(-3-1)^2=(-4)^2=16$$

Graphiquement, les solutions correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y=(2x-1)^2$ et de la droite horizontale $y=16$.



Rép. 3.41
(a) $x^2+10x+34=(x+5)^2+9$
(b) $x^2+12x=(x+6)^2-36$
(c) $-x^2+4x+3=7-(x-2)^2$
(d) $y^2-5y+3=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$
(e) $2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3$
(f) $-3x^2+6x+7=10-3(x-1)^2$

Rép. 3.42 (a) Le discriminant de x^2+5x+6 est

$$b^2-4ac\big|_{a=1,b=5,c=6}=5^2-4(1)(6)=25-24=1.$$

Puisque le discriminant est plus grand que 0, l'équation $x^2+5x+6=0$ possède deux solutions réelles distinctes. En effet, par factorisation, on trouve

$$x^2+5x+6=0 \Longleftrightarrow (x+2)(x+3)=0 \Longleftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=-3.$$

(b) $b^2-4ac\big|_{a=1,b=3,c=7}=-19$ puisque le discriminant est négatif, $x^2+3x+7=0$ n'a aucune solution réelle. L'impact du discriminant se reflète dans la formule quadratique.

$$x=\left.\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|_{a=1,b=3,c=7}=\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}\notin\mathbb{R}$$

Si on avait tenté de résoudre l'équation par complétion de carré, on aurait

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+7=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{19}{4}$$

Puisqu'une valeur au carré ne peut pas donner un négatif, l'équation n'a aucune solution réelle.

(c) $3x^2=6x \Leftrightarrow 3x^2-6x=0$ et $b^2-4ac\big|_{a=3,b=-6,c=0}=36$ on en conclut que $3x^3-6x=0$ a deux solutions réelles distinctes. En effet, par factorisation, on trouve

$$3x^2-6x=0 \Longleftrightarrow 3x(x-2)=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2.$$

(d) En développant $(2x+1)^2+3$ on trouve $(2x+1)^2+3=4x^2+4x+1+3=4x^2+4x+4$ et

$$b^2-4ac\big|_{a=4,b=4,c=4}=16-64=-48.$$

L'équation n'a donc aucune solution réelle. En effet, on le voit dès le départ, en tentant de résoudre l'équation, $(2x+1)^2+3=0 \Longleftrightarrow (2x+1)^2=-3$. Puisqu'une valeur au carré ne peut pas être négative, l'équation n'a aucune solution réelle.

(e) $9x^2+25=30x \Longleftrightarrow 9x^2-30x+25=0$ et $b^2-4ac\big|_{a=9,b=-30,c=25}=0$. Puisque le discriminant est nul, l'équation $9x^2+25=30x$ a une seule solution réelle. En effet, $9x^2-30x+25$ est le carré parfait d'une différence et

$$9x^2-30x+25=0 \Longleftrightarrow (3x-5)^2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{5}{3}.$$

(f) $(x-5)^2=7 \Longleftrightarrow x^2-10x+25=7 \Longleftrightarrow x^2-10x+18=0$ et $b^2-4ac\big|_{a=1,b=-10,c=18}=28$. L'équation a donc deux solutions réelles. En effet, par l'application de la racine carrée, on trouve

$$(x-5)^2=7 \Longleftrightarrow x-5=\pm\sqrt{7} \Longleftrightarrow x=5\pm\sqrt{7} \Longleftrightarrow x\approx 7{,}646 \text{ ou } x\approx 2{,}354.$$

Ainsi, $x\approx 7{,}646$ ou $x\approx 2{,}354$.

Rép. 3.43 On donne ici la solution à (d). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, utilisez le solveur de votre calculatrice.

(d) On factorise le côté gauche de l'égalité et on utilise la règle du produit nul.

$$(x-2)^2-9=0 \Leftrightarrow ((x-2)-3)((x-2)+3)=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=-1$$

Lorsqu'on utilise la formule quadratique, il faut d'abord réécrire l'équation $(x-2)^2-9=0$ comme $x^2-4x-5=0$, poser $a=1$, $b=-4$ et $c=-5$ et calculer

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}.$$

Les solutions sont donc $\frac{10}{2}=5$ et $\frac{-2}{2}=-1$.

Les calculs impliqués sont de même envergure, que les solutions soient obtenues par factorisation ou par la formule quadratique. Dans certains cas, la factorisation mènera plus directement aux solutions. Parfois, seule la formule quadratique permettra de trouver les solutions. C'est l'expérience qui le dira !

Validation. On substitue les valeurs trouvées dans l'équation de départ et on s'assure que toutes les égalités sont vraies.

$$(5-2)^2-9=3^2-9=9-9=0 \text{ et } (-1-2)^2-9=(-3)^2-9=9-9=0.$$

On a bien deux solutions à l'équation de départ.

Rép. 3.44 $n = 54$

Rép. 3.45 environ 6,2 secondes

Rép. 3.46 $3\sqrt{2} + 3 \approx 7{,}24$ cm

Rép. 3.47 20 m par 25 m

Rép. 3.48 $x \approx 43{,}37$ cm et l'aire de chacun des plus petits rectangles est environ $940{,}36$ cm^2

Rép. 3.49 $v = \frac{5\sqrt{641}-5}{2} \approx 60{,}8$ km/h

Rép. 3.50 Il faudrait environ 1 h 24 min.

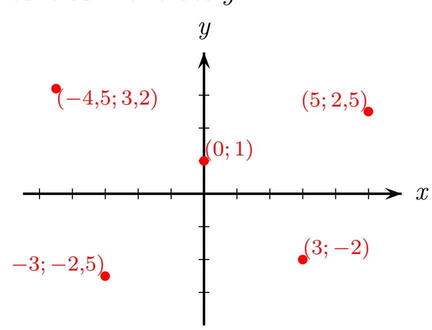
Rép. 3.51
(a) $x = -\frac{4}{5}$
(b) $t = -\frac{10}{3}$
(c) $x = -\frac{1}{5}$
(d) $t = \frac{8}{7}$
(e) $x = -\frac{63}{10}$
(f) $t = -2$
(g) $x = -3$
(h) $x = 18$
(i) $x = 1$
(j) $y = 2$

Rép. 3.52
(a) $x = -\frac{9}{7}$ ou $x = 0$ ou $x = \frac{9}{7}$
(b) $t = -2$ ou $t = 3$
(c) $x = -1$
(d) $x = -11$ ou $x = -9$
(e) $y = 0$ ou $y = \frac{1}{4}$
(f) $t = -10$ ou $t = 0$ ou $t = 10$
(g) $x = \frac{-1}{3}$ ou $x = 0$ ou $x = 1$
(h) $t = -2$ ou $t = -1$ ou $t = 0$ ou $t = 1$
(i) $y = 3$ ou $y = 5$
(j) $y = -\sqrt{2}$ ou $y = \sqrt{2}$ ou $y = \dfrac{1}{7}$

Rép. 3.53
(a) $x = -3$ ou $x = -1$
(b) aucune solution dans $\mathbb{R}$
(c) $x = -2$ ou $x = \frac{9}{2}$
(d) $t = 1 - \sqrt{3}$ ou $t = 1 + \sqrt{3}$
(e) $x = 3$ ou $x = 2$
(f) $x = -1$ ou $x = -\frac{2}{7}$
(g) $x = -\frac{1}{5}$ ou $x = \frac{1}{4}$
(h) $t = \frac{3-\sqrt{21}}{4}$ ou $t = \frac{3+\sqrt{21}}{4}$
(i) $x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$
(j) $x = -9$ ou $x = 1$

Chapitre 4

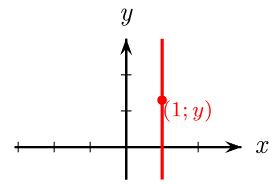
Rép. 4.1 La première valeur du couple correspond à la projection du point sur l'axe des x tandis que la deuxième valeur correspond à celle sur l'axe des y.



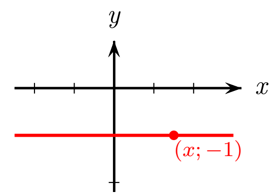
Rép. 4.2 L'abscisse est 0 et tous les points de l'axe vertical satisfont la contrainte (l'équation) $x = 0$.

Rép. 4.3 Un point $(x; y)$ sera sur la droite s'il satisfait la contrainte (l'équation) $x = 3$.

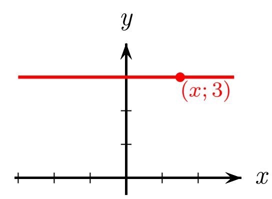
Rép. 4.4 (a) Sur la droite verticale $x = 1$



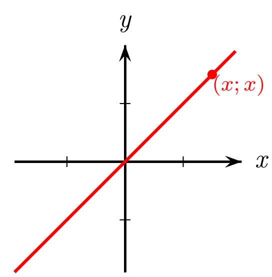
(b) Sur la droite horizontale $y = -1$



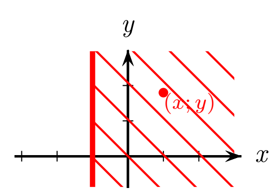
(c) Sur la droite horizontale $y = 3$



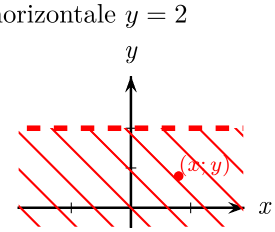
(d) Sur la droite oblique passant par l'origine où $y = x$



(e) Dans le demi-plan à droite de la droite verticale $x = -1$ ou sur celle-ci



(f) Dans le demi-plan, sous la droite horizontale $y = 2$

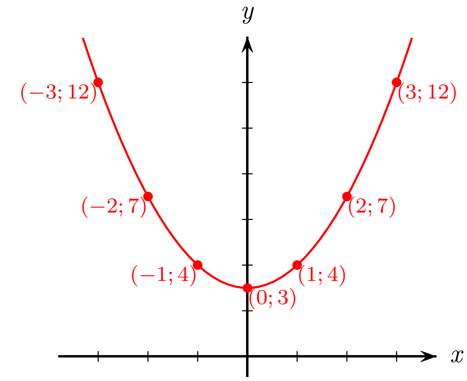


Rép. 4.5 Les couples $(4;6)$ et $(-3;5)$ sont des solutions de l'équation tandis que $(-2;2)$ ne l'est pas.

Rép. 4.6 (a) $(0;0)$ n'est pas une solution, il est plausible que $(0;-1)$ et $(-1;0)$ le soit.
(b) $(1;1)$ n'est pas une solution, il est plausible que $(0;0)$ et $(-0{,}5;-1)$ le soit.

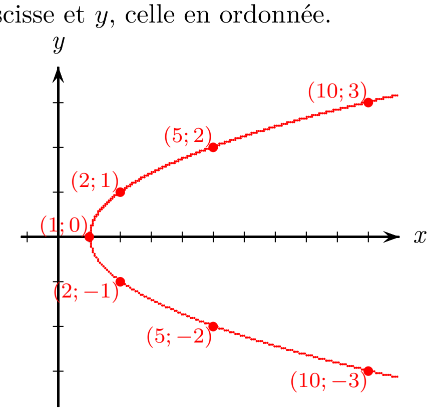
Rép. 4.7 (a) En donnant des valeurs à x, on calcule les valeurs correspondantes en y à l'aide de l'équation $y = x^2 + 3$.

x	$y = x^2 + 3$	$(x;y)$
-3	12	$(-3;12)$
-2	7	$(-2;7)$
-1	4	$(-1;4)$
0	3	$(0;3)$
1	4	$(1;4)$
2	7	$(2;7)$
3	12	$(3;12)$



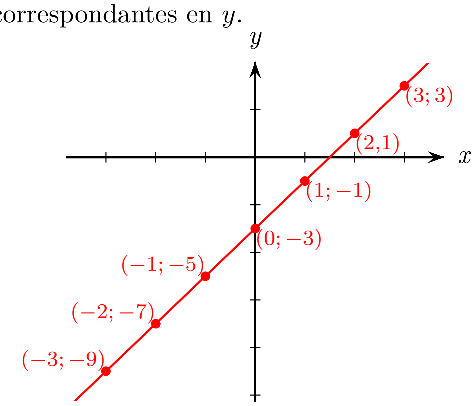
(b) En donnant des valeurs à y, on calcule les valeurs correspondantes en x à l'aide de l'équation $x = y^2 + 1$. Attention, x demeure la variable en abscisse et y, celle en ordonnée.

y	$x = y^2 + 1$	$(x;y)$
-3	10	$(10;-3)$
-2	5	$(5;-2)$
-1	2	$(2;-1)$
0	1	$(1;0)$
1	2	$(2;1)$
2	5	$(5;2)$
3	10	$(10;3)$



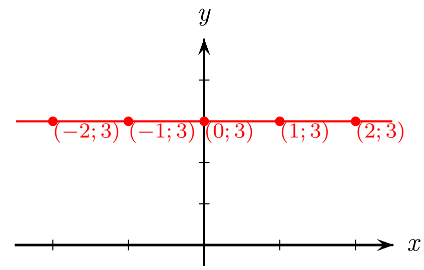
(c) En résolvant l'équation $2x - y = 3$ pour y, on trouve $y = 2x - 3$. Pour tracer le graphe, on donne des valeurs à x et on calcule les valeurs correspondantes en y.

x	$y = 2x - 3$	$(x;y)$
-3	-9	$(-3;-9)$
-2	-7	$(-2;-7)$
-1	-5	$(-1;-5)$
0	-3	$(0;-3)$
1	-1	$(1;-1)$
2	1	$(2;1)$
3	3	$(3;3)$



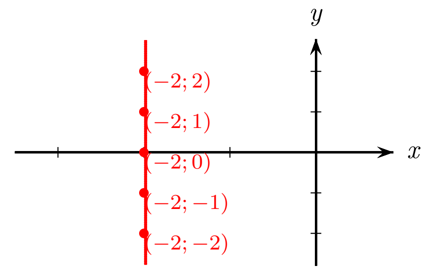
(d) Peu importe la valeur donnée à x, y sera toujours 3.

x	y	$(x;y)$
-2	3	$(-2;3)$
-1	3	$(-1;3)$
0	3	$(0;3)$
1	3	$(1;3)$
2	3	$(2;3)$



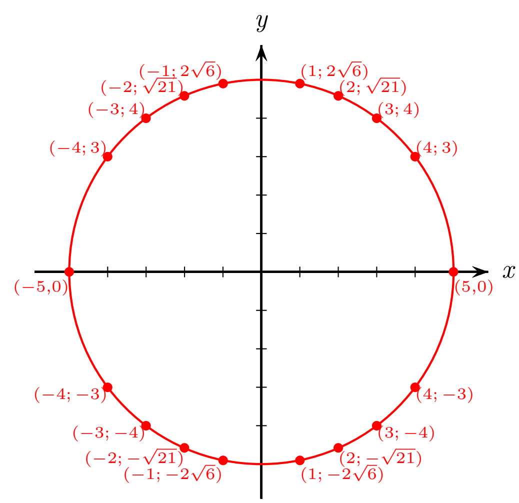
(e) Peu importe la valeur donnée à y, x sera toujours -2.

y	x	$(x;y)$
-2	-2	$(-2;-2)$
-1	-2	$(-2;-1)$
0	-2	$(-2;0)$
1	-2	$(-2;1)$
2	-2	$(-2;2)$



(f) Contrairement aux autres courbes de cet exercice, il est impossible de résoudre $x^2 + y^2 = 25$ pour une variable et n'obtenir qu'une seule équation. En effet, si on résout l'équation $x^2+y^2 = 25$ pour y, on aura deux équations $y = \sqrt{25-x^2}$ et $y = -\sqrt{25-x^2}$. Chaque valeur donnée à x générera alors jusqu'à deux valeurs pour y et, en conséquence, deux points sur le graphe.

x	y	$(x;y)$
-6	$\notin \mathbb{R}$	
-5	0	$(-5;0)$
-4	± 3	$(-4;3)$ et $(-4;-3)$
-3	± 4	$(-3;-4)$ et $(-3;4)$
-2	$\pm\sqrt{21}$	$(-2;\sqrt{21})$ et $(-2;-\sqrt{21})$
-1	$\pm 2\sqrt{6}$	$(-1;2\sqrt{6})$ et $(-1;-2\sqrt{6})$
0	± 5	$(0;5)$ et $(0,-5)$
1	$\pm 2\sqrt{6}$	$(1;2\sqrt{6})$ et $(1;-2\sqrt{6})$
2	$\pm\sqrt{21}$	$(2;\sqrt{21})$ et $(2;-\sqrt{21})$
3	± 4	$(3;4)$ et $(3;-4)$
4	± 3	$(4;3)$ et $(4;-3)$
5	0	$(5;0)$
6	$\notin \mathbb{R}$	



Rép. 4.8 (c) donne le graphe le plus représentatif de la courbe.

Rép. 4.9 (a) $(-3{,}2)$ (b) $\sqrt{58} \approx 7{,}62$ m

Rép. 4.10 (a) $14 + 2\sqrt{13} \approx 21{,}21$ cm (b) $(3{,}0)$ (c) 18 cm^2

Rép. 4.11 Non, car le triangle ne respecte pas le théorème de Pythagore, c'est-à-dire que le carré de la longueur du côté le plus long n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

$$d((0;0),(9;0)) = 9,\ d((0;0),(3;4)) = 5 \text{ et } d((3;4),(9;0)) = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$$

et $(2\sqrt{13})^2 + 5^2 = 52 + 25 = 77 \neq 81$

Rép. 4.12 $(1;5)$

Rép. 4.13 La distance entre un point $(-1;y)$ et le point $(4;-6)$ est donnée par

$$\sqrt{(4-(-1))^2+(-6-y)^2}=\sqrt{25+(6+y)^2}.$$

On doit donc résoudre l'équation $\sqrt{25+(6+y)^2}=7$ pour y. Il y a deux solutions possibles $y=-6\pm 2\sqrt{6}$, c'est-à-dire $y\approx -10{,}9$ ou $y\approx -1{,}1$.

Rép. 4.14 11 h 43

Rép. 4.15
(a) $x^2+y^2=49$
(b) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$
(c) $(x+1)^2+(y-2)^2=2$
(d) $(x+3)^2+(y+1)^2=100$
(e) $(x+2)^2+y^2=9$
(f) $x^2+(y+1)^2=5$

Rép. 4.16
(a) $(0;0)$ et $r=6$
(b) $(5;2)$ et $r=11$
(c) $(-4;1)$ et $r=4$
(d) $(-3;-2)$ et $r=5$
(e) $(0;1)$ et $r=1$
(f) $(-2;0)$ et $r=\sqrt{10}$
(g) $(-3;2)$ et $r=6$
(h) $(-4;3)$ et $r=5$
(i) $(-4;-5)$ et $r=\sqrt{26}$

Rép. 4.17 $(1{,}6;2{,}55)$ et $r\approx 3{,}6827$

Rép. 4.18
(a) $x=-3\pm 4\sqrt{3}\Longrightarrow x\approx -9{,}928$ et $x\approx 3{,}928$
(b) $x=-3\pm\frac{\sqrt{6231}}{10}\Longrightarrow x\approx -10{,}894$ et $x\approx 4{,}894$
(c) $x=-3\pm 2\sqrt{7}\Longrightarrow x\approx -8{,}292$ et $x\approx 2{,}292$

Rép. 4.19 $(x-1)^2+(y-5)^2=13$

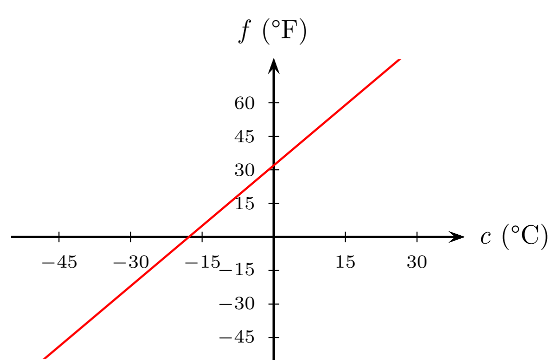
Rép. 4.20 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$, circonférence 8π unités de longueur et d'aire 16π unités de surface

Rép. 4.21
(a) $(2;-1)$
(b) $(x-4)^2+(y-1)^2=4$
(c) $(x-4)^2+(y-1)^2=8$

Rép. 4.22
(a) $(-2;1)$
(b) $(x-\frac{5}{2})^2+(y-2)^2=\frac{85}{4}$

Rép. 4.23
(a) $a=12/5$, croissante
(b) $a=-4/3$, décroissante
(c) non définie, verticale
(d) $a=0$, horizontale

Rép. 4.24
(a) $f=\frac{9}{5}c+32$

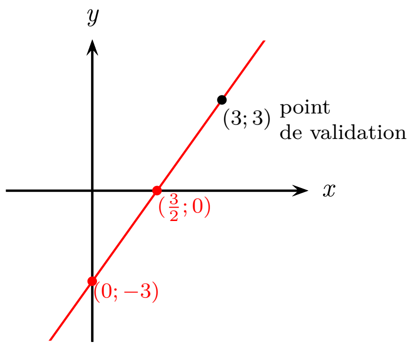


(b) 68 °F et correspond à l'ordonnée du point dont l'abscisse est 20.
(c) $\frac{340}{9}\approx 37{,}8$ °C et correspond à l'abscisse du point dont l'ordonnée est 100.
(d) la pente de $\frac{9}{5}=1{,}8$ nous dit que si la température augmente de 1° dans l'échelle des Celsius,

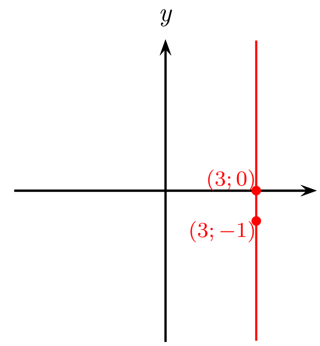
elle augmentera de 1,8° dans celle en Fahrenheit ou, si la température augmente de 5 °C, l'augmentation correspondante sera de 9 °F.

(e) -40 °F$=-40$ °C

Rép. 4.25 (a)

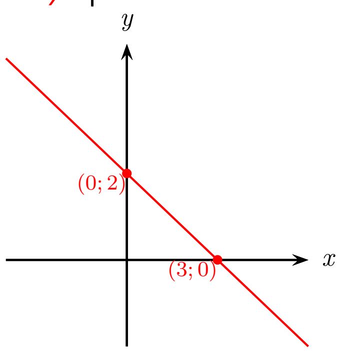


(c)



Peu importe la valeur y, pour obtenir une solution, x doit être 3.

(b)

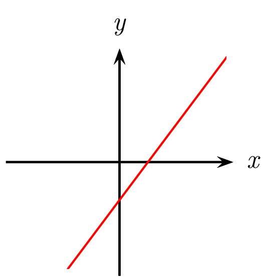


Rép. 4.26 (a) $y-1=2(x-3) \iff y=2x-5$
(b) $y-1=-2(x+3) \iff y=-2x-5$
(c) $y-0=\frac{2}{3}(x-0) \iff y=\frac{2}{3}x$
(d) $y+2=1(x-4) \iff y=x-6$
(e) $y+1=-3(x-3) \iff y=-3x+8$
(f) $y-3=0(x+2) \iff y=3$
(g) droite verticale $x=5$
(h) $y-2=-\frac{7}{3}(x+3) \iff y=-\frac{7}{3}x-5$
(i) $y-0=\frac{1}{5}(x-5) \iff y=\frac{1}{5}x-1$

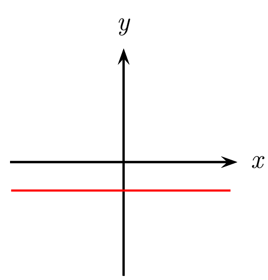
Rép. 4.27 $3x+4y=12$

Rép. 4.28 (a) $a<0$ et $b>0$ (b) $a>0$ et $b=0$ (c) $a<0$ et $b<0$

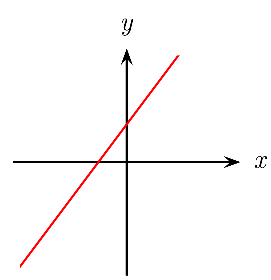
Rép. 4.29 (a)



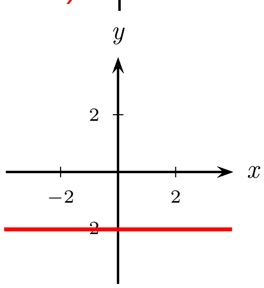
(b)



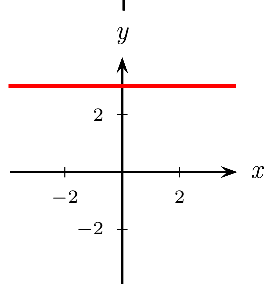
(c)



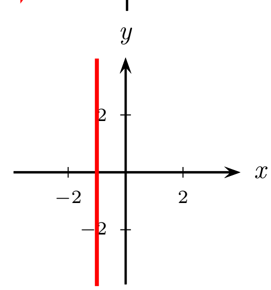
Rép. 4.30 (a)

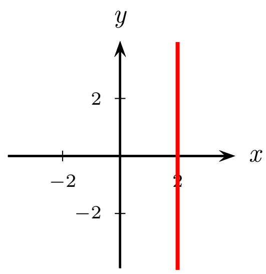


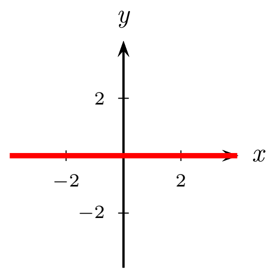
(b)

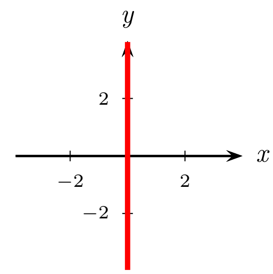


(c)

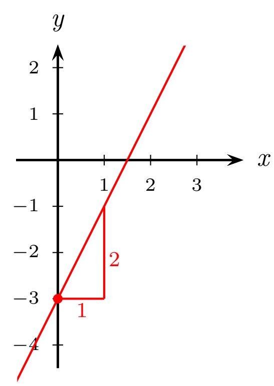


(d) 

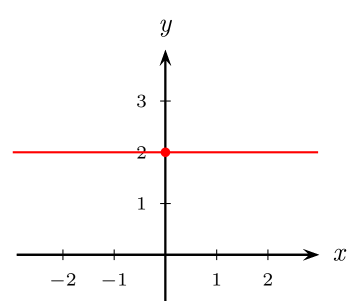
(e) 

(f) 

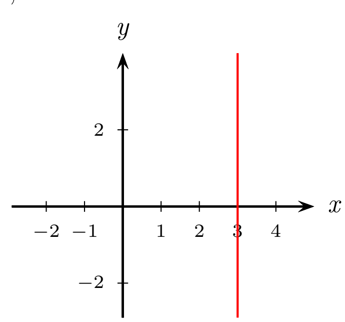
Rép. 4.31 (a) $y = 2x - 3$, $a = 2$ et $b = -3$



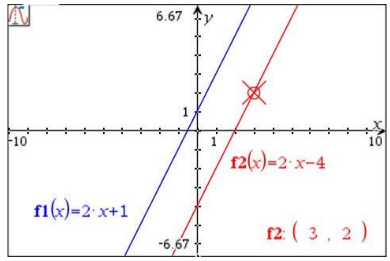
(b) $y = 2$, $a = 0$ et $b = 2$, droite horizontale



(c) $x = 3$, a et b ne sont pas définies, droite verticale



Rép. 4.32 (a) $y - 2 = 2(x - 3) \Longleftrightarrow y = 2x - 4$
On vérifie que le point est bien sur la droite trouvée et que cette dernière est parallèle à la droite donnée.



(b) $y+1=\frac{2}{3}(x-2) \iff y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

(c) $x=-1$

Rép. 4.33 (a) $y-5=-\frac{1}{3}(x-1) \iff x+3y=16$
On vérifie que le point est bien sur la droite trouvée et que cette dernière est perpendiculaire à la droite donnée. *Faites-le.*

> **Attention !** Les échelles en abscisse et en ordonnée doivent être identiques pour que les angles ne soient pas déformés.

(b) $x=1$

(c) $y-1=x-3 \iff y=x-2$

(d) $y-1=\frac{2}{3}(x+3) \iff y=\frac{2}{3}x+3$

(e) $y=3$

Rép. 4.34 (a) $x^2+(y-2)^2=4$

(b) $(\sqrt{3};3)$

(c) $a_{CT}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y-3=-\sqrt{3}(x-\sqrt{3}) \iff y=-\sqrt{3}x+6$

(d) $(2\sqrt{3};0) \approx (3{,}46;0)$.

(e) $(2\sqrt{3}-4;4\sqrt{3}) \approx (-0{,}54;6{,}93)$.

Rép. 4.35 (a) les droites sont sécantes, $(3;7)$

(b) les droites sont sécantes, $(1;4)$

(c) les droites sont sécantes, $(1;-1)$

(d) les droites sont parallèles distinctes

(e) les droites sont confondues
$\{(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+y=1\}$

(f) $(2;5)$
les droites sont perpendiculaires

Rép. 4.36 (a) Les droites sont perpendiculaires car le produit des pentes est -1, $(\frac{1209}{514};-\frac{445}{514})$

$\text{solve}\left(\begin{cases}17\cdot x+15\cdot y=27\\15\cdot x-17\cdot y=50\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{1209}{514}$ and $y=\frac{-445}{514}$
$\text{solve}(17\cdot x+15\cdot y=27,y)$	$y=\frac{-(17\cdot x-27)}{15}$
$\text{expand}\left(y=\frac{-(17\cdot x-27)}{15}\right)$	$y=\frac{9}{5}-\frac{17\cdot x}{15}$
$\text{expand}(\text{solve}(15\cdot x-17\cdot y=50,y))$	$y=\frac{15\cdot x}{17}-\frac{50}{17}$

(b) Les droites sont sécantes, $(4{,}605...;-1.816...)$
elles ne sont pas perpendiculaires car leurs pentes sont de même signe.

$\text{solve}\left(\begin{cases}2.5\cdot x+3.2\cdot y=5.7\\1.4\cdot x+5.2\cdot y=-3\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=4.60563$ and $y=-1.8169$
$\text{solve}(2.5\cdot x+3.2\cdot y=5.7,y)$	$y=-0.78125\cdot(x-2.28)$
$\text{solve}(1.4\cdot x+5.2\cdot y=-3,y)$	$y=-0.269231\cdot(x+2.14286)$

(c) Les droites sont parallèles confondues, $\{(x;y) \mid x \approx 0{,}875(y-0{,}2857)\}$.

$\text{solve}\left(\begin{cases}4\cdot x=3.5\cdot y-1\\7\cdot y-8\cdot x=2\end{cases},\{x,y\}\right)$ $\quad x=0.875\cdot(c1-0.285714)$ and $y=c1$

(d) Les droites sont parallèles.

$\text{solve}\left(\begin{cases}y=2.1\cdot x-2\\10.5\cdot x-5\cdot y=15\end{cases},\{x,y\}\right)$ $\quad$ false

Rép. 4.37 (a) $\sqrt{5}\approx 2{,}236$ (b) $\frac{3\sqrt{10}}{5}\approx 1{,}897$ (c) 0

Rép. 4.38 Si on place la première extrémité de la conduite existante à l'origine $(0;0)$ d'un plan cartésien, la seconde sera située en $(500;800)$, en considérant le nord en haut du plan et l'est à droite. La maison du client, quant à elle, est située en $(-50;100)$. Il s'agit donc de calculer la distance entre ce point et la droite passant par les points $(0;0)$ et $(500;800)$. L'équation de cette droite est $y=\frac{8}{5}x$. La droite qui lui est perpendiculaire et qui passe par $(-50;100)$ est d'équation $y=-\frac{5}{8}x+\frac{275}{4}$. Le point d'intersection des deux droites se trouve en $\left(\frac{2750}{89};\frac{4400}{89}\right)$ ou $(30{,}89...;49{,}44...)$.

La distance entre la maison du client et la conduite existante est donnée par

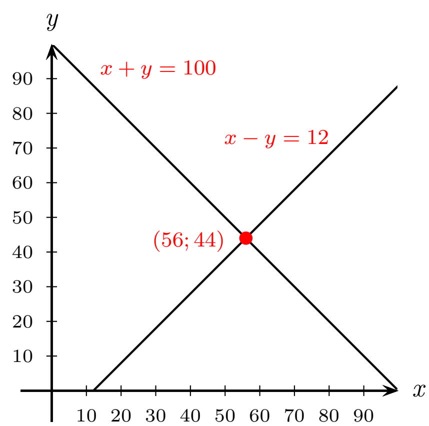
$$d((-50;100);\left(\frac{2750}{89};\frac{4400}{89}\right))=\sqrt{\left(-50-\frac{2750}{89}\right)^2+\left(100-\frac{4400}{89}\right)^2}\approx 95{,}4\text{ m.}$$

Le plus court tuyau nécessaire au raccordement du client mesure environ 95,4 m.

Rép. 4.39 (a) Soient x et y les nombres cherchés. On doit résoudre le système

$$\begin{array}{rcl}x+y&=&100\\x-y&=&12.\end{array}$$

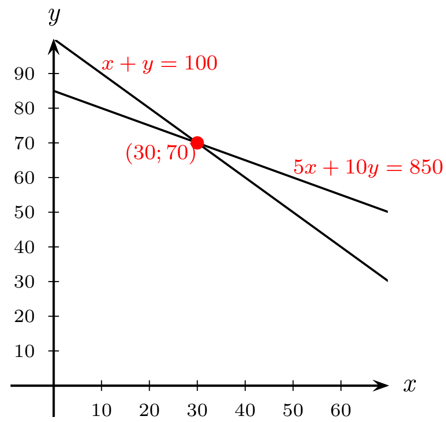
On trouve $x=56$ et $y=44$. Les nombres cherchés sont donc 56 et 44.



(b) Soient x le nombre de billets de 5 \$ et y le nombre de billets de 10 \$. On doit résoudre le système

$$\begin{array}{rcl}x+y&=&100\\5x+10y&=&850.\end{array}$$

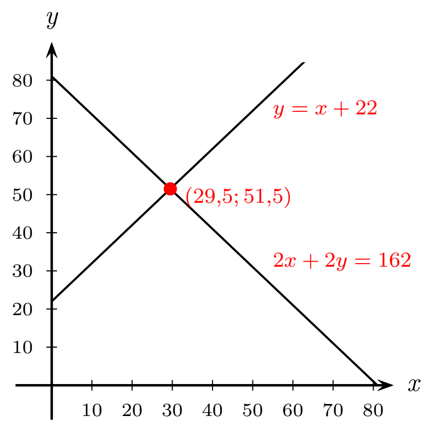
On trouve $x=30$ et $y=70$. La réponse est donc 70 billets.



(c) Soit x la largeur de l'écran en cm et y, sa longueur en cm. On doit résoudre le système

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 162 \\ y & = & x + 22. \end{array}$$

On trouve $x = 29{,}5$ et $y = 51{,}5$. Les dimensions sont donc 29,5 cm par 51,5 cm



Rép. 4.40 x le taux par jour et y le taux par km
$3x + 175y = 125$ et $5x + 400y = 250$
$x \approx 19{,}23$ \$/jour et $y \approx 0{,}38$ \$/km

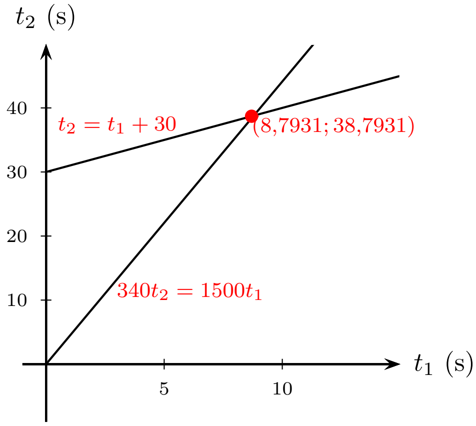
Rép. 4.41 Soit t_1 le temps (en secondes) pour que l'explosion soit détecté par les senseurs et t_2, le temps (en secondes) qu'elle le soit sur la plate-forme. On doit résoudre le système suivant.

$$\begin{array}{rcl} t_2 & = & t_1 + 30 \\ 340t_2 & = & 1500t_1 \end{array}$$

On trouve $t_1 = \frac{255}{29} \approx 8{,}7931$ et $t_2 = \frac{1125}{29} \approx 38{,}7931$. La distance est donc

$$1500 \cdot 255/29 = \frac{382500}{29} \approx 13189{,}7 \text{ m.}$$

L'explosion s'est donc produite à un peu plus de 13 km du navire.
Validation. On vérifie qu'on obtient le même résultat en calculant la distance parcourue par le son dans l'air $340 \cdot \frac{1125}{29} \approx 13189{,}7$ m.



Rép. 4.42 (a) $y - 3{,}24 = -0{,}6027...(x - 4{,}84) \iff y = 6{,}15726... - 0{,}60274...x$

(b) $x = 4{,}84$

(c) La pente de la droite passant par A et C est 1,5714... et celle passant par D et E est $-0{,}6027...$ puisque $(1{,}5714...) \cdot (-0{,}6027...) = -0{,}947... \neq -1$ les droites ne sont pas perpendiculaires.

(d) $(2{,}83...; 4{,}45...)$

(e) $B = (10{,}21545...; 0)$ et la longueur du câble est d'environ 4,57 m

Bibliographie

[1] Belanger, M., De Serres, M., et al. *Intervenir sur les langages en mathématiques et en sciences.* Mont-Royal : Modulo, 2003.

[2] Blitzer, R. *Precalculus.* New Jersey : Prentice-Hall, 2001.

[3] Bourget, B., Gagnon, P., et al. *Mathématique 064-424.* Montréal : Lidec, 1986.

[4] De Serres, M., and Groleau, J. *Mathématiques et langages.* Collège Jean-de-Brébeuf, Direction pédagogique, Service de la recherche, 1997.

[5] Hamel, J. *Mise à niveau mathématique.* Montréal : Éditions du renouveau pédagogique (ERPI), 2e édition, 2017.

[6] Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., et al. *Calcul différentiel et intégral : fonctions d'une variable (Le projet Harvard).* Montréal : Chenelière/McGraw-Hill, 1998. Supervision de l'édition française : Michel Beaudin, École de technologie supérieure.

[7] Stewart, J. *Calcul différentiel.* Montréal : Groupe Modulo inc., 2013. Supervision de l'édition française : Stéphane Beauregard et Chantal Trudel, Collège Bois-de-Boulogne.

Édition originale, octobre 2017, par Kathleen Pineau

Révisé, juillet 2020 et mai 2022, par Kathleen Pineau et Valérie Gouaillier

Responsable du projet et de la mise en page : Kathleen Pineau