TI-Nspire CX CAS en MAT265

Nombres complexes. Réglages de la calculatrice.

michel.beaudin@etsmtl.ca

Version du 19 novembre 2022

Les nombres complexes sont utilisés fréquemment en mathématiques et le cours de MAT265 est probablement l'endroit où ils sont encore plus importants. Entre autre, nous rencontrerons des nombres complexes au chapitre 4 des notes de cours. Tout en introduisant les réglages de Nspire requis au niveau universitaire, pourquoi ne pas commencer tout de suite à parler des nombres complexes ? C'est ce que propose le présent fichier.

Définitions: un *nombre complexe* est une expression de la forme $x + \boldsymbol{i} \cdot y$ où x et y sont des nombres réels et où $\boldsymbol{i}$ (appelé l'unité imaginaire) est tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Autrement dit

$\boldsymbol{i}=\sqrt{-1}$ ▸ true

On écrira souvent $z = x + \boldsymbol{i} \cdot y$ pour désigner le nombre complexe z et on dira que x est la *partie réelle* de z tandis que y est la *partie imaginaire* de z.

$\mathrm{real}(x+\boldsymbol{i} \cdot y)$ ▸ x

$\mathrm{imag}(x+\boldsymbol{i} \cdot y)$ ▸ y

On pourra se représenter le nombre complexe z comme étant le couple ordonné (x, y) et ainsi placer ce point dans le plan complexe. La distance de ce point à l'origine est (par le théorème de Pythagore)

$\sqrt{x^2+y^2}$.

On appelle cela le *module* de z : "abs()" ou encore les deux barres verticales qu'on trouve dans les modèles mathématiques permettent d'obtenir le module:

$|x+\boldsymbol{i} \cdot y|$ ▸ $\sqrt{x^2+y^2}$

Un nombre complexe z dont la partie imaginaire vaut 0 sera donc situé sur l'axe des x (l'axe réel) et ce sera donc un nombre réel et un nombre complexe de la forme $z = \boldsymbol{i} \cdot y$ sera dit imaginaire pur et sera situé sur l'axe des y (l'axe imaginaire).

Définition : lorsqu'on écrit $z = x + \boldsymbol{i} \cdot y$, on dit souvent qu'il s'agit de la *forme rectangulaire* d'un nombre complexe. La figure plus bas nous permet de conclure que le nombre complexe z peut aussi s'écrire sous la forme suivante, dite *forme polaire* :

$z = r \cdot \left(\cos(\theta) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(\theta)\right)$ où $r = |z|$ et $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$

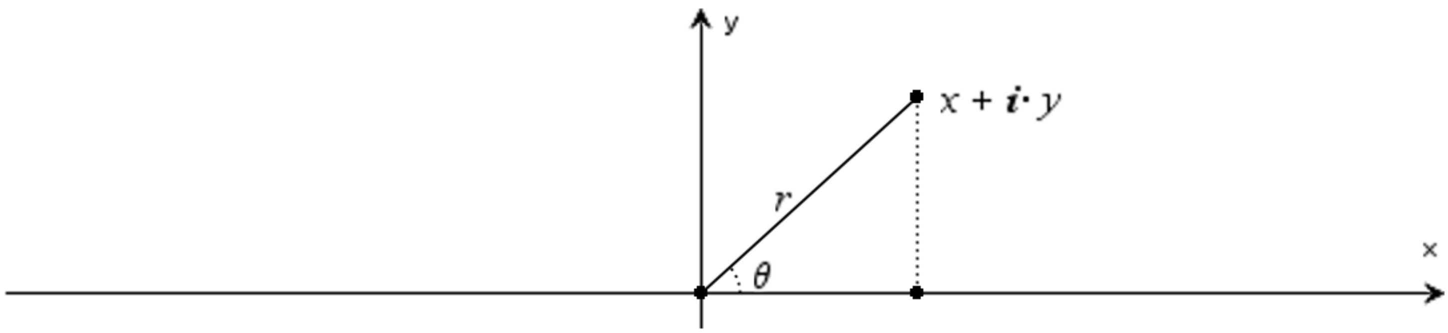
La *formule d'Euler* permet d'utiliser la forme polaire puisque

$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i} \cdot \theta} \blacktriangleright \cos(\theta)+\sin(\theta) \cdot \boldsymbol{i}$

La convention est de placer l'angle θ dans la bande $]-\pi, \pi]$. On l'appelle l'*argument* de z et Nspire l'appelle "angle". La formule suivante couvre tous les cas:

$\text{angle}(x+\boldsymbol{i} \cdot y) \blacktriangleright \dfrac{\pi \cdot \text{sign}(y)}{2} - \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\text{angle}(\{-1,1,1+\boldsymbol{i},1-\boldsymbol{i},-1+\boldsymbol{i},-1-\boldsymbol{i}\}) \blacktriangleright \left\{\pi,0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{3 \cdot \pi}{4},\dfrac{-3 \cdot \pi}{4}\right\}$


y
$x + \boldsymbol{i} \cdot y$
r
θ
x

Définitions: soient $z = a + b\cdot\boldsymbol{i}$ et $w = c + d\cdot\boldsymbol{i}$ deux nombres complexes.

Alors on définit l'*addition* par $z + w = a + c + (b + d)\cdot\boldsymbol{i}$.

Définition: on définit la multiplication par

$z\cdot w = a\cdot c - b\cdot d + (a\cdot d + b\cdot c)\cdot\boldsymbol{i}$. .

$a+b\cdot \boldsymbol{i}+c+d\cdot \boldsymbol{i} \blacktriangleright a+c+(b+d)\cdot \boldsymbol{i}$

$(a+b\cdot \boldsymbol{i})\cdot (c+d\cdot \boldsymbol{i}) \blacktriangleright a\cdot c-b\cdot d+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot \boldsymbol{i}$

Définition: soit $z = x + \boldsymbol{i}\cdot y$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $x - \boldsymbol{i}\cdot y$. Dans Nspire, c'est

$\mathrm{conj}(x+\boldsymbol{i}\cdot y) \blacktriangleright x-y\cdot \boldsymbol{i}$

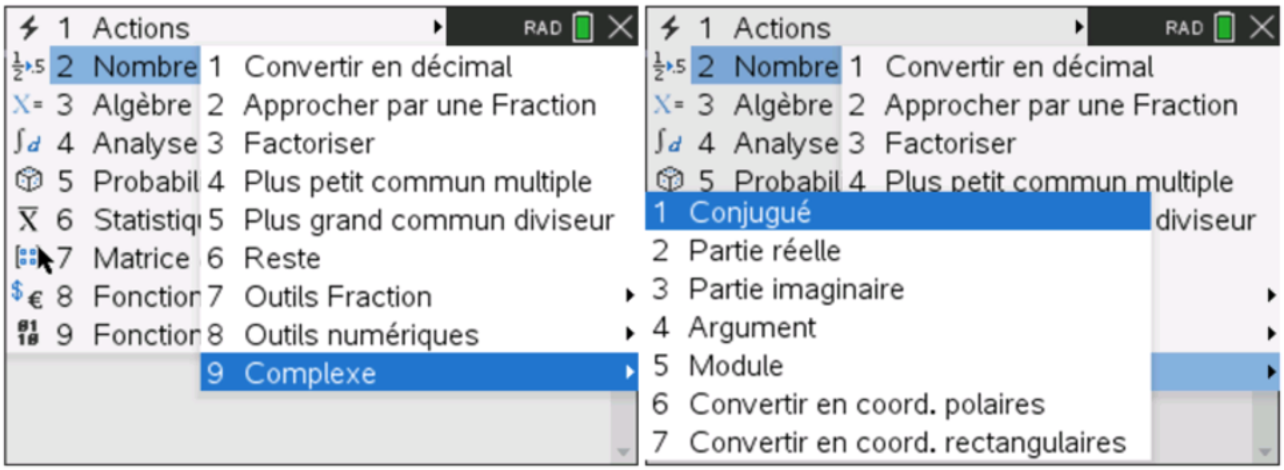
L'*inverse (multiplicatif)* de $x + \boldsymbol{i}\cdot y$ est

$\frac{1}{x+\boldsymbol{i}\cdot y} \blacktriangleright \frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot \boldsymbol{i}$

Notons que l'inverse existe pour tout nombre complexe sauf 0.

Avec la calculatrice Nspire, montrons les menus qui permettent d'illustrer les définitions précédentes.

On voit ici (OS 5.4 utilisé) un premier endroit où certaines commandes sont regroupées. Dans une page de calcul, le menu 2 (Nombre), 9 (Complexe) nous mène à des commandes pour calculer le conjugué, la partie réelle, la partie imaginaire, l'argument, le module, la conversion en coordonnées polaires et la conversion en coordonnées rectangulaires.



Exemple : soient les deux nombres complexes suivants.

$\mathbf{w1}:=3+4\cdot i \blacktriangleright 3+4\cdot i$

$\mathbf{w2}:=-4+6\cdot i \blacktriangleright -4+6\cdot i$

Alors

$\mathrm{real}(\mathbf{w1}) \blacktriangleright 3$

$\mathrm{imag}(\mathbf{w1}) \blacktriangleright 4$

$\mathrm{conj}(\mathbf{w1}) \blacktriangleright 3-4\cdot i$

$|\mathbf{w1}| \blacktriangleright 5$

$\frac{1}{\mathbf{w1}} \blacktriangleright \frac{3}{25}-\frac{4}{25}\cdot i$

$\mathbf{w1}+\mathbf{w2} \blacktriangleright -1+10\cdot i$

$\mathbf{w1}\cdot\mathbf{w2} \blacktriangleright -36+2\cdot i$

$\frac{\mathbf{w1}}{\mathbf{w2}} \blacktriangleright \frac{3}{13}-\frac{17}{26}\cdot i$

$\text{angle}(\mathbf{w1}) \quad ▸ \quad \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

En effet, puisque tan(θ) = 4/3 et puisque **w1** est dans le premier quadrant, on peut écrire que θ = arctan(4/3). Or

$\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \quad ▸ \quad \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

Note: si vous vous demandez pourquoi Nspire fait cela, c'est parce qu'il est facile d'évaluer numériquement arctan(3/4) car la série de Taylor de arctan(x) converge justement si $-1 < x < 1$. Et, évidemment, arctan(3/4) + arctan(4/3) = π/2 (dessinez un triangle rectangle: la somme des deux angles aigus donne bien π/2).

$\mathbf{w1} ▸ \text{Polar} \quad ▸ \quad e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)}\cdot 5$

On peut utiliser la notation (r $\angle\theta$) :

$(5 \angle 30°) \quad ▸ \quad \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\cdot i$

$(2+2\cdot i) ▸ \text{Polar} \quad ▸ \quad e^{\frac{i\cdot\pi}{4}}\cdot 2\cdot\sqrt{2}$

$6\cdot e^{\frac{3\cdot\pi\cdot i}{4}} \quad ▸ \quad -3\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}\cdot i$

La formule du produit de deux nombres complexes n'est pas très utile si l'on doit effectuer plusieurs produits. Il devient alors utile de passer à la forme polaire et d'utiliser la *formule de De Moivre* qui dit que si n est un entier positif, alors

$$\left(r\cdot e^{i\cdot \theta}\right)^{n}=r^{n}\cdot e^{i\cdot n\cdot \theta}$$

Nspire affichera toujours la réponse en respectant la convention pour l'argument. Par exemple en retournant au nombre complexe **w1** :

$\mathbf{w1} \blacktriangleright 3+4\cdot i$

$\mathbf{w1}^{23} \blacktriangleright -9392840736385317+7340510203856444\cdot i$

$\mathbf{rr}:=\left|\mathbf{w1}^{23}\right| \blacktriangleright 11920928955078125$

$\text{approx}(23\cdot \text{angle}(\mathbf{w1})) \blacktriangleright 21.3278$

$\text{approx}(\text{mod}(23\cdot \text{angle}(\mathbf{w1}),2\cdot\pi)) \blacktriangleright 2.47823$

$\boldsymbol{\theta\theta}:=\text{angle}\left(\mathbf{w1}^{23}\right) \blacktriangleright \pi-\tan^{-1}\left(\frac{7340510203856444}{9392840736385317}\right)$

$\text{approx}(\boldsymbol{\theta\theta}) \blacktriangleright 2.47823$

$\mathbf{rr}\cdot e^{i\cdot \boldsymbol{\theta\theta}} \blacktriangleright -9392840736385317+7340510203856444\cdot i$

Avec les nombres complexes, on peut maintenant **résoudre l'équation suivante :**

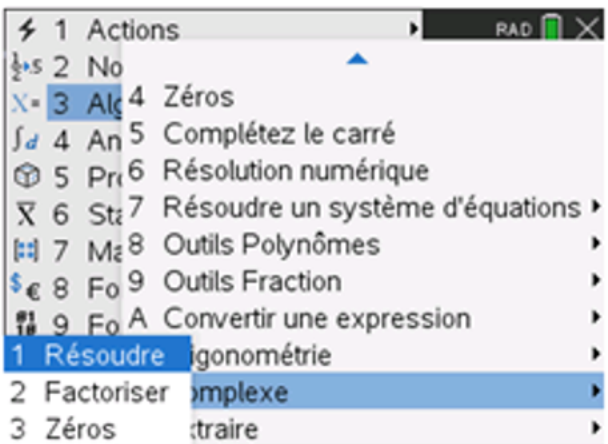
$z^2+1=0$.

Cette équation ne possède pas de solutions réelles mais puisque $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$ aussi, on a donc deux solutions. La TI confirme:

$\text{solve}\left(z^2+1=0,z\right) \blacktriangleright \text{false}$

$\text{cSolve}\left(z^2+1=0,z\right) \blacktriangleright z=i \text{ or } z=-i$

En mode calculatrice, on trouve la commande "cSolve" ici:



Par conséquent, lorsque nous résoudrons des équations polynomiales, il sera toujours préférable d'utiliser "csolve" ou "czeros" plutôt que "solve" ou "zeros".

Exemple et remarque : l'équation quadratique suivante est facile à résoudre

$$x^2 - 3\cdot x - 4 = 0$$

On trouve, par factorisation,

$$x^2 - 3\cdot x - 4 = (x-4)\cdot(x+1) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -1$$

D'ailleurs la formule du second degré confirme :

$$x = \frac{--3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ ou } -1.$$

Graphiquement parlant, cela signifie que la parabole

$$y = x^2 - 3\cdot x - 4$$

coupe l'axe des x quand $x = -1$ ou 4.

Que se passe-t-il maintenant avec l'équation quadratique suivante ?

$$x^2 + 4\cdot x + 40 = 0$$

Le discriminant étant négatif, les racines ne sont pas réelles. Ces racines sont facilement trouvées par la formule quadratique mais encore plus facilement par une complétion du carré. Utilisons chacune des deux méthodes.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-160}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-4 \pm \boldsymbol{i}\cdot\sqrt{144}}{2} = \frac{-4 \pm 12\cdot\boldsymbol{i}}{2} = \frac{2\cdot(-2 \pm 6\cdot\boldsymbol{i})}{2} = -2 \pm 6\cdot\boldsymbol{i}$$

$$x^2 + 4\cdot x + 40 = (x+2)^2 + 36 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x+2)^2 = -36 \ \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{-36} \ = \pm 6\cdot\boldsymbol{i}$$

Donc la parabole d'équation

$$y = x^2 + 4\cdot x + 40$$

NE COUPE JAMAIS l'axe des x. Mais comment "voir" les racines complexes ?

Il suffit de remplacer x par un nombre complexe et de considérer la partie réelle et la partie imaginaire. Puisqu'un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul, alors on tracera chacune des courbes obtenues dans un même plan.

$z^2+4\cdot z+40|z=x+i\cdot y \blacktriangleright x^2+4\cdot x-y^2+40+(2\cdot x\cdot y+4\cdot y)\cdot i$

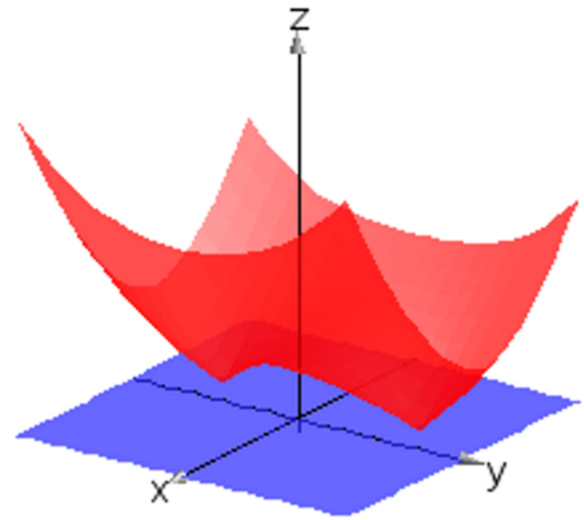
On trace dans un même plan les courbes

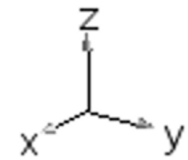
$x^2+4\cdot x-y^2+40=0$ et $2\cdot x\cdot y+4\cdot y=0$

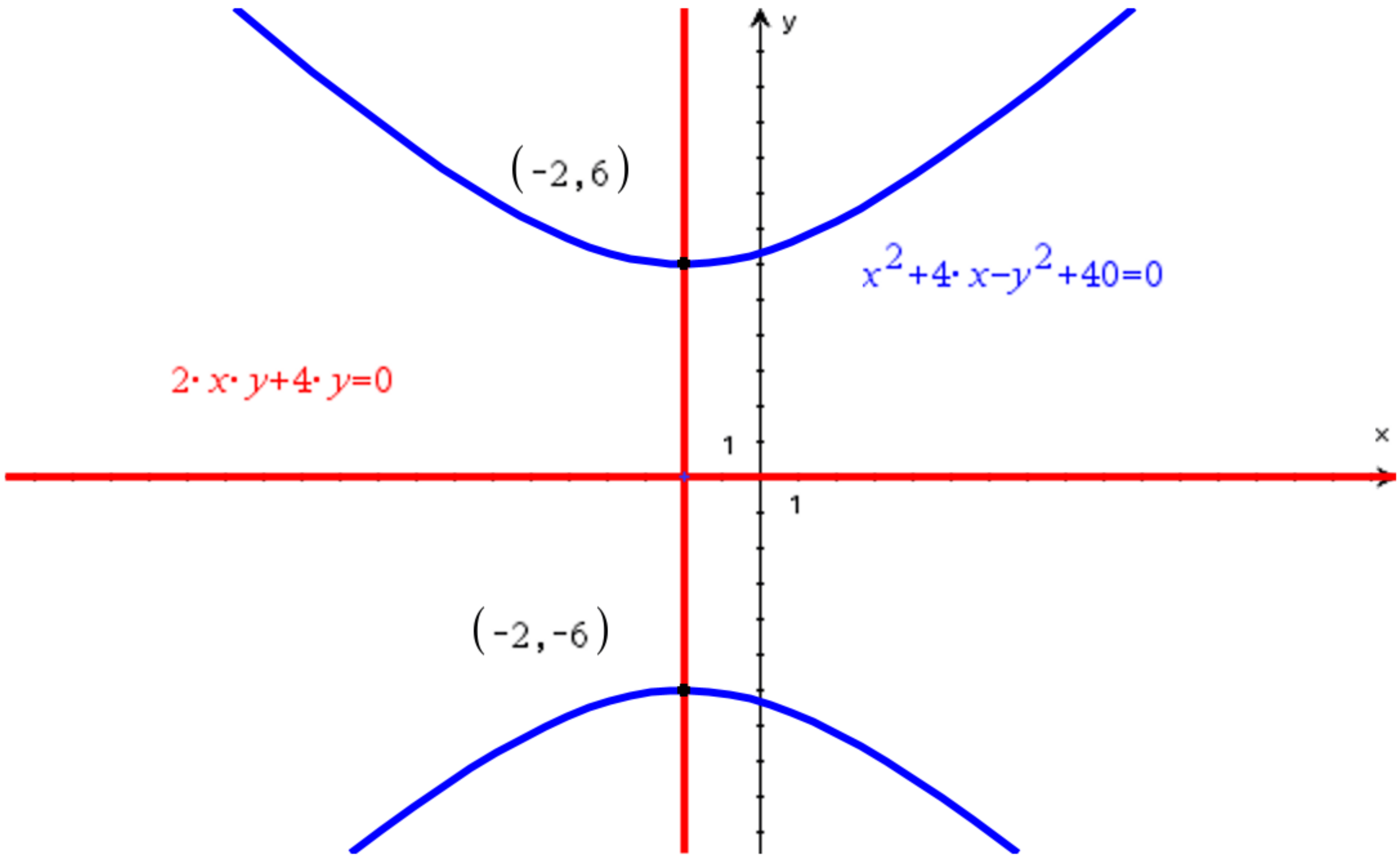
qui se coupent précisément aux points de coordonnées (−2, ±6). Ou encore on trace le graphe 3D définie par l'expression

$\left|x^2+4\cdot x-y^2+40+(2\cdot x\cdot y+4\cdot y)\cdot i\right| \blacktriangleright \sqrt{x^4+8\cdot x^3+2\cdot x^2\cdot\left(y^2+48\right)+8\cdot x\cdot\left(y^2+40\right)+y^4-64\cdot y^2+1600}$

et cette surface touche au plan z = 0 précisément aux points de coordonnées (−2, ±6).


z
x
y


z
x
y



y
$\left(-2,6\right)$
$x^2+4\cdot x-y^2+40=0$
$2\cdot x\cdot y+4\cdot y=0$
1
x
1
$\left(-2,-6\right)$

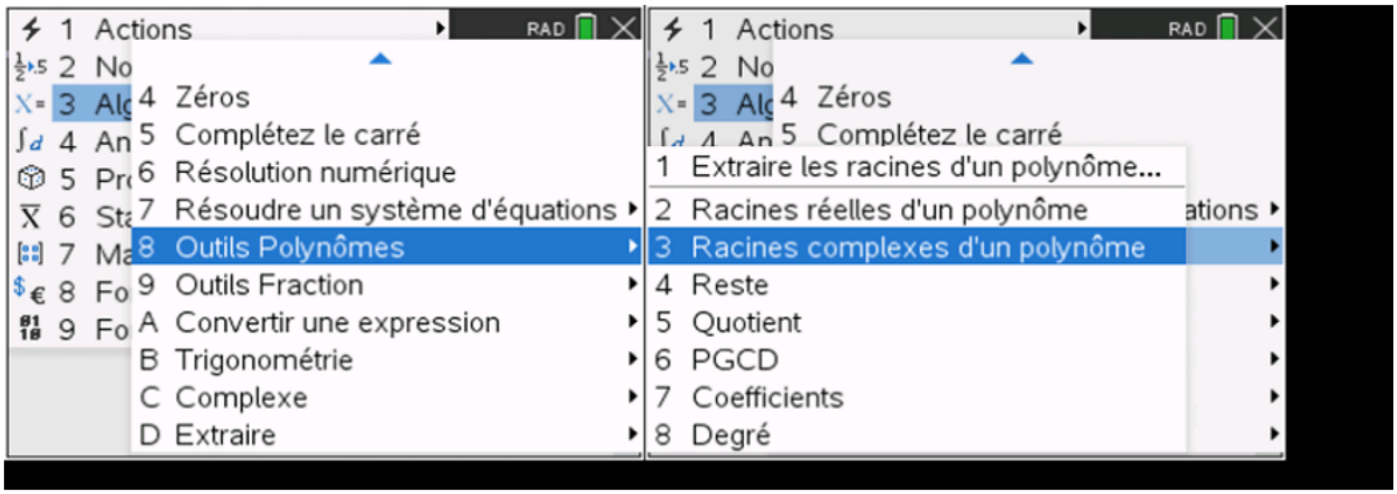
Remarque: l'équation

$$x^2 - 2\cdot x + 1 = 0$$

en est une du second degré et ses deux solutions sont 1 et 1 (racine "double"). Mais la commande "solve" ou la commande "zeros" ne donnent que 1:

$\text{solve}\left(x^2-2\cdot x+1=0,x\right) \blacktriangleright x=1$ $\qquad$ $\text{zeros}\left(x^2-2\cdot x+1,x\right) \blacktriangleright \{1\}$

Pour avoir 1 et 1, on doit recourir aux commandes du menu "Outils Polynômes".



$\text{polyRoots}\left(x^2-2\cdot x+1,x\right) \blacktriangleright \{1,1\}$

Exemple : si *n* est un entier positif, le théorème fondamental de l'algèbre implique qu'une équation polynomiale de degré *n* possède exactement *n* racines, possiblement multiples, possiblement complexes. Et si le polynôme est à coefficients réels, alors les racines complexes arrivent toujours en paires conjuguées. Considérons le pôlynome suivant de degré cinq (que nous avons fabriqué à partir d'un choix de ses racines !). Appelons le polynôme "*p1*(*x*)" et regardons ce qui se passe avec les différentes commandes:

$$\mathbf{p1}(x):=\frac{x^5}{8}-\frac{5\cdot x^4}{4}+\frac{11\cdot x^3}{4}+17\cdot x^2-71\cdot x+68 \;\blacktriangleright\; \mathit{Done}$$

On s'attend à trouver 5 racines et si des complexes apparaissent, il doit y en avoir un nombre pair (puisque le polynôme est à coefficients réels):

$$\text{solve}(\mathbf{p1}(x)=0,x) \;\blacktriangleright\; x=-4 \text{ or } x=2$$

Il manque les racines complexes et on ne voit pas que 2 est une racine double.

$$\text{cSolve}(\mathbf{p1}(x)=0,x) \;\blacktriangleright\; x=5+3\cdot \boldsymbol{i} \text{ or } x=5-3\cdot \boldsymbol{i} \text{ or } x=-4 \text{ or } x=2$$

On ne voit toujours pas que 2 est une racine double.

$$\text{polyRoots}(\mathbf{p1}(x),x) \;\blacktriangleright\; \{-4,2,2\}$$

On ne voit pas les racines complexes.

$$\text{cPolyRoots}(\mathbf{p1}(x),x) \;\blacktriangleright\; \{-4,2,2,5-3\cdot \boldsymbol{i},5+3\cdot \boldsymbol{i}\}$$

Là, les 5 racines (même celles multiples) sont présentes !

Au départ, on s'assure des **réglages** suivants:

▶ La calculatrice/logiciel doit TOUJOURS être en Angle: radians. Vous savez que la dérivée de la fonction sin(x) est cos(x).

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) \blacktriangleright \cos(x)$$

Si la réponse affichée sur votre calculatrice est plutôt

$$\frac{\pi \cdot \cos(x)}{180}$$

c'est parce que votre calculatrice est en mode Angle=degrés!

On convertira en degrés comme suit: disons qu'on cherche l'angle entre les vecteurs [2,4] et [−3, 5] en utilisant la formule suivante:

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}([2\ \ 4],[-3\ \ 5])}{\text{norm}([2\ \ 4])\cdot 7\cdot \text{norm}([-3\ \ 5])}\right) \blacktriangleright \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{170}}{170}\right)$$

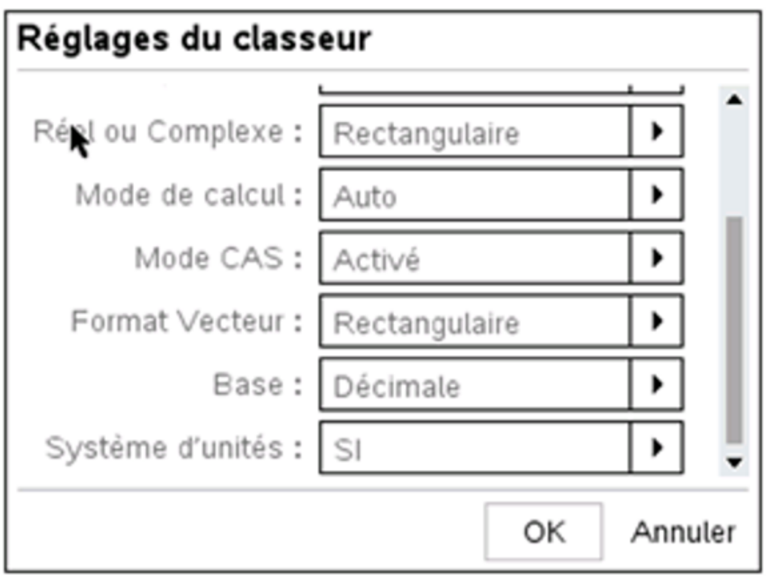
On transforme cette réponse en "degrés décimaux" par la commande ▶DD (on applique ctrl Enter pour avoir une valeur approchée):

$$\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{170}}{170}\right)\right)\blacktriangleright DD \ \blacktriangleright 85.6013°$$

▶ Le mode de calcul est à Auto. Si l'on veut se "débarrasser" des décimales, la commande "exact" placée devant l'expression servira. Si l'on veut immédiatement du numérique, on fait Ctrl Enter ou encore on placera "approx" devant:

$$\text{exact}(1.51) \;\blacktriangleright\; \frac{151}{100} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \;\blacktriangleright\; \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{approx}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \;\blacktriangleright\; 0.707107$$

▶ À l'interne, tous les calculs sont faits avec 14 chiffres de précision. Il ne sert donc à rien d'inonder votre écran de trop de décimales! "Afficher chiffres: Flottant 6" est amplement suffisant. Évidemment, en finances , "Fixe2" serait le choix.



▶ Le format vecteur est rectangulaire mais on sait qu'on peut convertir.

▸ Au niveau universitaire, la "branche principale" de la racine n−ième doit être celle du format complexe (rectangulaire) et non réel. Cela a d'immenses avantages:

1) L'intégrale de 1/x se simplifie alors en ln(x) comme il se doit.

$$\int \frac{1}{x}\, dx \quad ▸ \ln(x)$$

2) La "racine n−ième" d'un nombre *négatif* où "n" est un entier *impair* s'affichera comme un nombre complexe! Ainsi "la" racine cubique de −8 n'est pas −2 (comme à la petite école) mais plutôt le nombre complexe 1 + i· √3:

$$\sqrt[3]{-8} \quad ▸ 1+\sqrt{3}\cdot i$$

Pourquoi cela ? Pour la simple et bonne raison que lorsqu'on résout l'équation x^3 = −8, il y a 3 solutions (dans les complexes). Faisons−le à la main en premier: on commence par décomposer en facteurs en se rappelant la formule de factorisation de la somme de deux cubes:

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 4\right) = 0$$

En effet,

$$\text{factor}\left(a^3+b^3,a\right) \quad ▸ (a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)$$

Maintenant, on applique la formule du second degré au facteur quadratique:

$$x^2-2\cdot x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4\cdot(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 2\cdot\sqrt{-3}}{2} =$$

$$1 \pm \sqrt{-3}$$

Mais

$$\sqrt{-1} = i \quad ▸ \text{true}$$

Donc les 3 solutions de notre équation sont

$$-2, \quad 1+i\cdot\sqrt{3}, \quad 1-i\cdot\sqrt{3}$$

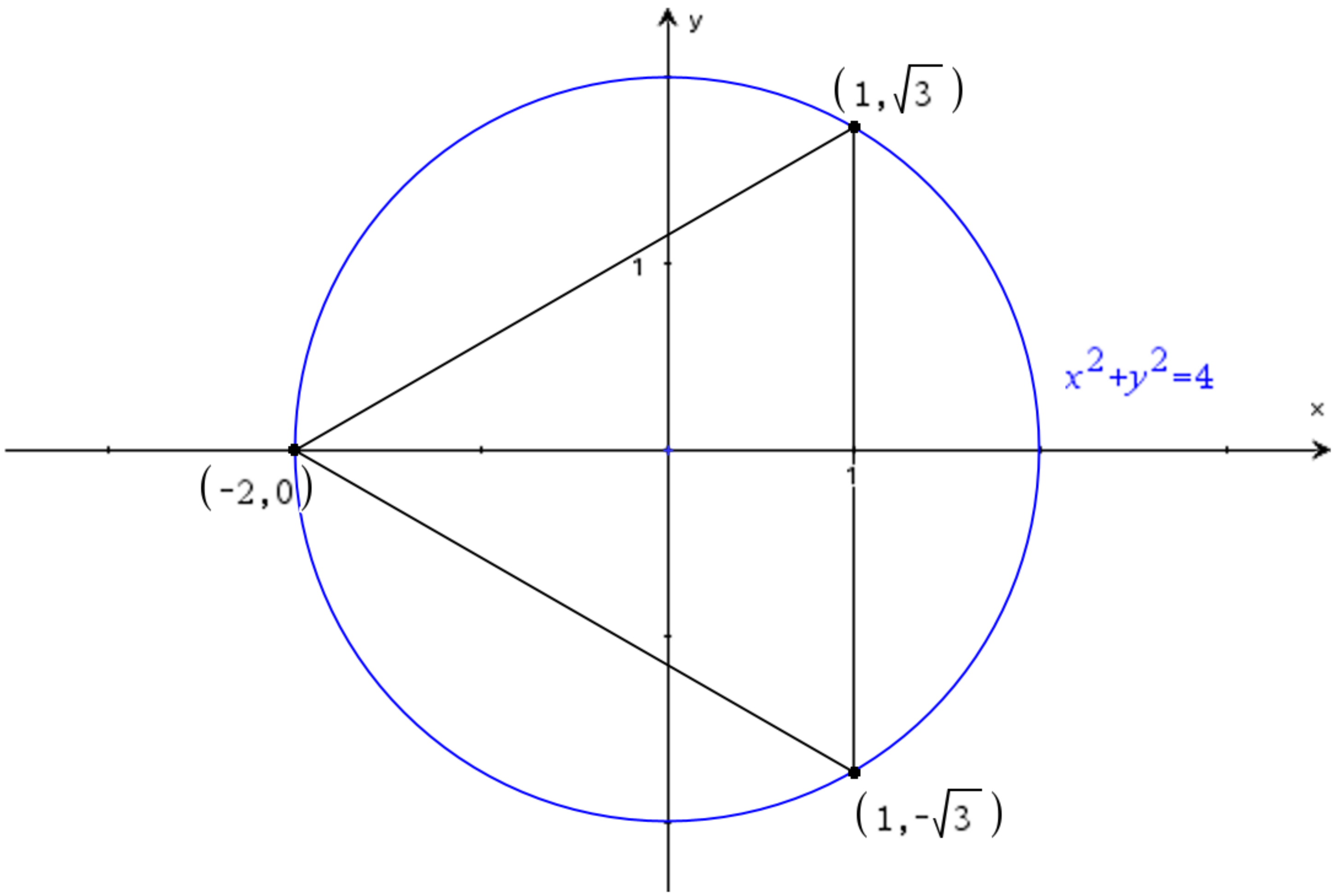
Cela est confirmé par la commande "csolve" (ici les 3 racines sont distinctes et simples):

$$\text{cSolve}\left(x^3=-8,x\right) \quad ▸ x=1-\sqrt{3}\cdot i \text{ or } x=1+\sqrt{3}\cdot i \text{ or } x=-2$$

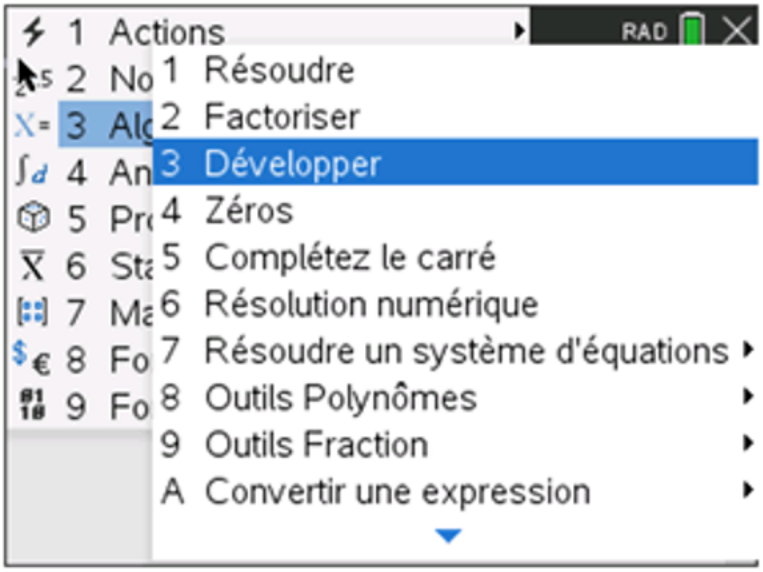
$$\text{solve}\left(x^3=-8,x\right) \quad ▸ x=-2$$

On sait qu'un nombre complexe a + b·i peut être vu comme étant le point (a, b) du plan. Allons placer les 3 solutions trouvées dans un plan (voir page suivante):

La première qu'on rencontre lorsqu'on part de la partie positive de l'axe des x (l'axe "réel") et qu'on tourne dans le *sens contraire des aiguilles d'une montre* ("sens direct") est 1+i· √3 et non −2. Voilà le pourquoi du choix.


y
$(1,\sqrt{3})$
1
$x^2+y^2=4$
x
$(-2,0)$
1
$(1,-\sqrt{3})$

Remarque : dans le cours de MAT265, vous allez utiliser la commande "expand" ("développer") très souvent :



Vos professeurs pourront vous l'expliquer en détails. Il est possible – voire même souhaitable – que vous deviez faire à la main certains calculs dans lesquels des nombres complexes vont intervenir. Les remarques qui suivent pourront être utiles.

Dans Nspire, une variable non déclarée est considérée réelle et non complexe. On le voit d'ailleurs ici:

$\sqrt{x^2} \blacktriangleright |x|$

Ou encore :

$\frac{1}{x+i} \triangleright \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \cdot i$

Par contre, ajouter le symbole "_" après une variable fait en sorte que Nspire la considère complexe. On le voit ici:

$\sqrt{x\_^2} \triangleright \sqrt{x\_^2}$ $\qquad$ $\frac{1}{x\_+i} \triangleright \frac{1}{x\_+i}$

Cette dernière remarque pourra s'avérer utile aux étudiants d'ÉLÉ dont les professeurs ne semblent pas connaître la commande "expand" ou qui −ce qui est tout à fait justifiable− exigent que les étudiants fassent les fractions partielles à la main. Donnons un exemple.

Exemple : calculons à la main le développement en fractions partielles de la fonction suivante :

$\mathbf{fo}(s) := \frac{2 \cdot s - 3}{s^2 + 6 \cdot s + 5} \triangleright \mathit{Done}$

La commande "expand" donne le résultat immédiatement :

$\mathrm{expand}(\mathbf{fo}(s), s) \triangleright \frac{13}{4 \cdot (s+5)} - \frac{5}{4 \cdot (s+1)}$

À la main, on aurait fait ceci : puisque le dénominateur se factorise en deux facteurs linéaires distincts, alors on poserait (voir les notes de cours de MAT265, volume 2, annexe A.3)

$$\frac{2 \cdot s - 3}{s^2 + 6 \cdot s + 5} = \frac{2 \cdot s - 3}{(s+5) \cdot (s+1)} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+1}$$

On pourrait très bien remplacer "*s*" successivement par deux nombres du domaine de la fonction *fo*, disons 0 et 1 et résoudre le système de deux équations à deux inconnues qui en résulterait et on trouverait la valeur de *A* et de *B*. Cela est complètement inutile puisque

$$\frac{(s+5) \cdot (2 \cdot s - 3)}{s^2 + 6 \cdot s + 5} = \frac{A \cdot (s+5)}{s+5} + \frac{B \cdot (s+5)}{s+1}$$

Le système Nspire applique alors la règle de l'Hospital et trouve que *A* = 13/4. Nous, on n'a qu'à simplifier le facteur *s* + 5 et substituer ensuite *s* par −5 pour se débarrasser du "*B*" :

$$\frac{2 \cdot s - 3}{s+1} = = A + \frac{B \cdot (s+5)}{s+1} \Big| s = -5$$

Cela donne

$$A = \frac{2\cdot(-5)-3}{-5+1} = \frac{-13}{-4} = \frac{13}{4}.$$

Le même genre de truc donne immédiatement la valeur de B.

Exemple : quel est le développement en fractions partielles de la fonction suivante ?

$$\mathbf{go}(s):=\frac{2\cdot s-3}{s^2+6\cdot s+13} \quad \blacktriangleright \textit{Done}$$

La commande "expand" restant dans les réels, elle ne fait que "couper en deux" la fraction :

$$\text{expand}(\mathbf{go}(s),s) \quad \blacktriangleright \quad \frac{2\cdot s}{s^2+6\cdot s+13}-\frac{3}{s^2+6\cdot s+13}$$

Les étudiants verront qu'en complétant le carré du dénominateur, ils retrouveront des formes incluses dans les tables. Mais si l'on tient absolument à faire des fractions partielles complexes, alors on peut s'y prendre comme suit. On factorise (dans les complexes) le dénominateur :

$$\text{cFactor}(\mathbf{go}(s),s) \quad \blacktriangleright \quad \frac{2\cdot s-3}{(s-(-3+2\cdot \boldsymbol{i}))\cdot(s+3+2\cdot \boldsymbol{i})}$$

On écrit alors pour des constantes *k1* et *k2* **et en écrivant** *s_* et non *s* :

$$\frac{2\cdot s\_-3}{(s\_-(-3+2\cdot \boldsymbol{i}))\cdot(s\_+3+2\cdot \boldsymbol{i})}=\frac{k1}{s\_-(-3+2\cdot \boldsymbol{i})}+\frac{k2}{s\_+3+2\cdot \boldsymbol{i}}$$

La méthode précédente (dite "cover-up") permet de trouver *k1* et *k2*. Trouvons *k1*:

$$k1=\frac{2\cdot s\_-3}{(s\_+3+2\cdot \boldsymbol{i})}\Big|s\_=-3+2\cdot \boldsymbol{i}$$

Donc

$$k1=\frac{2\cdot s\_-3}{s\_+3+2\cdot \boldsymbol{i}}\Big|s\_=-3+2\cdot \boldsymbol{i} \quad \blacktriangleright \quad k1=1+\frac{9}{4}\cdot \boldsymbol{i}$$

On verrait que *k2* est le conjugué de *k1*. Donc

$$k2=1-\frac{8}{4}\cdot \boldsymbol{i} \quad \blacktriangleright \quad k2=1-2\cdot \boldsymbol{i}$$

On vérifie si nos valeurs sont bonnes en écrivant simplement (sans ajout du symbole "_") :

$$\frac{1+\frac{9}{4}\cdot \boldsymbol{i}}{s-(-3+2\cdot \boldsymbol{i})}+\frac{1-\frac{9}{4}\cdot \boldsymbol{i}}{s+3+2\cdot \boldsymbol{i}} \quad \blacktriangleright \quad \frac{2\cdot s-3}{s^2+6\cdot s+13}$$