Démonstration des expressions des coefficients de poussée et de puissance et de la valeur de la limite de Betz
Module 11 – Énergie solaire

On cherche à retrouver les expressions des vitesses induites (u et u_1) et des coefficients de poussée C_T et de puissance C_P de la théorie de quantité de mouvement unidimensionnelle en utilisant le volume de contrôle défini par les lignes pointillées de la figure 1 suivante :

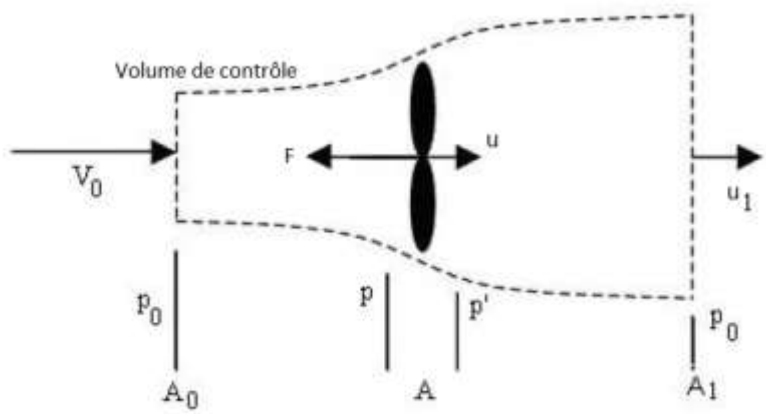


Fig. 1: Ecoulement axial de l'air

<u>Hypothèse :</u>
- L'écoulement est totalement axial (pas de mouvement de rotation)
- L'écoulement est incompressible
- La vitesse du vent est constante loin du plan du rotor
- L'écoulement est rotationellement symétrique
- L'air passe à travers le rotor sans frottement

Conservation de la masse

$$\rho VA = cte$$
$$V_0 A_0 = uA = u_1 A_1$$

Théorème de variation de la quantité de mouvement / conservation de la quantité de mouvement

Le problème présente un nombre discret d'entrée/sortie avec des vitesses unidirectionnelles donc l'équation est :

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \rho \vec{V} dV\right) + \sum (\dot{m}_i \vec{V}_i)_{out} - \sum (\dot{m}_i \vec{V}_i)_{in}$$

Cette équation exprime globalement le fait que la force résultante sur un volume de contrôle fixe est égale au taux de variation de quantité de mouvement dans le volume de contrôle plus la différence entre les flux entrée/sortie de la quantité de mouvement à travers la surface de contrôle.

En supprimant la variation temporelle et en appliquant l'équation selon x on obtient :

$$T = \dot{m}(V_0 - u_1) = \rho u A (V_0 - u_1) \qquad (1)$$

On applique maintenant l'équation de Bernoulli en amont et en aval du rotor :

$$\begin{cases} p_0 \ + \dfrac{1}{2}\rho {V_0}^2 = p + \dfrac{1}{2}\rho u^2 \\ p' \ + \dfrac{1}{2}\rho u^2 = p_0 + \dfrac{1}{2}\rho {u_1}^2 \end{cases}$$

En combinant ces deux expressions on obtient :

$$p - p' = \frac{1}{2}\rho\left({V_0}^2 - {u_1}^2\right)$$

Sachant que l'équation (1) peut également s'écrire :

$$T = A(p - p')$$

Donc,

$$T = \frac{1}{2}A\rho\left({V_0}^2 - {u_1}^2\right) \qquad (2)$$

Avec les équations (1) et (2) on a :

$$u = \frac{1}{2} * \frac{{V_0}^2 - {u_1}^2}{V_0 - u_1} = \frac{1}{2} * \frac{(V_0 - u_1)(V_0 + u_1)}{V_0 - u_1} = \frac{V_0 + u_1}{2} \qquad (3)$$

La vitesse de l'écoulement de l'air à travers le rotor est la moyenne des deux vitesses, celle en amont et celle en aval du rotor.

En introduisant le facteur d'interférence/induction axial a, défini comme la fraction de diminution de la vitesse du vent, entre celle de l'écoulement libre en amont du rotor et celle traversant le plan du rotor :

$$\boxed{u = (1 - a)V_0}$$

Avec l'équation (3) :

$$\boxed{u_1 = (1 - 2a)V_0}$$

On définit alors la puissance extraite du vent comme :

$$P = \frac{1}{2}\dot{m}\left({V_0}^2 - {u_1}^2\right) = \frac{1}{2}\rho V A\left({V_0}^2 - {u_1}^2\right) \quad (4)$$

En substituant les expressions de u et de u_1 dans les équations (2) et (4) :

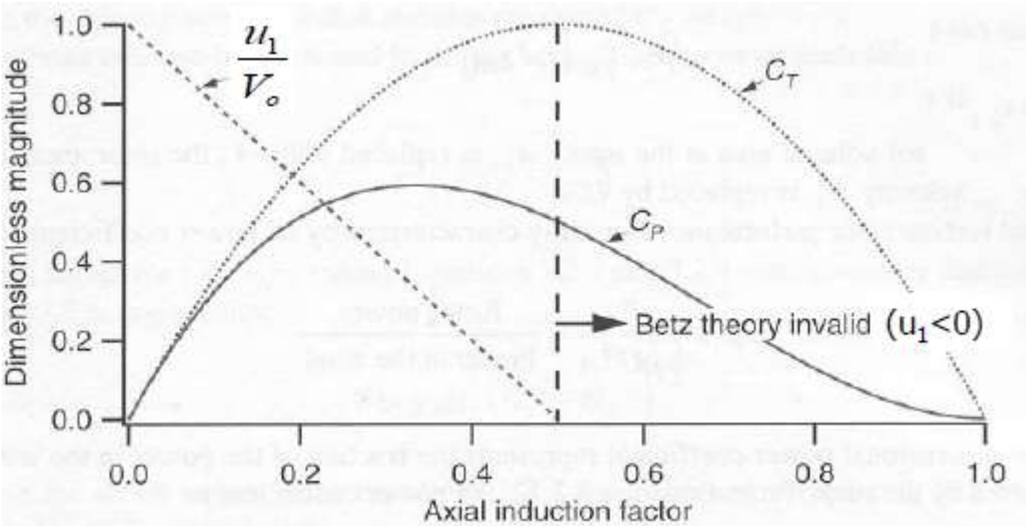
$$\boxed{\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}\rho A {V_0}^2 * 4a(1 - a) \\ P = \dfrac{1}{2}\rho A {V_0}^3 * 4a(1 - a)^2 = Tu \end{cases}}$$

On définit les coefficients de poussée et de puissance comme :

$$\begin{cases} C_T = \dfrac{T}{\frac{1}{2}\rho A {V_0}^2} \\ C_P = \dfrac{P}{\frac{1}{2}\rho A {V_0}^3} \end{cases}$$

Donc on calcul :

$$\boxed{\begin{cases} C_T = 4a(1 - a) \\ C_P = 4a(1 - a)^2 \end{cases}}$$



A partir de cette expression on peut calculer le coefficient de puissance maximale théorique pour une éolienne en prenant la dérivée de C_P par rapport à a égal à zéro :

$$\frac{\partial C_p}{\partial a} = 4(1-3a^2) = 0$$

Donc :

$$a = \frac{1}{3}$$

Et

$$C_p = \frac{16}{27} = 0{,}59259$$

C'est la limite de Betz.