

Dérivation (linéarité, règles du produit, du quotient et des fonctions composées)

Si c et d sont des constantes, si u et v sont des fonctions de la variable x , alors

1. $(cu + dv)' = cu' + dv'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(v(u(x)))' = v'(u(x)) u'(x)$

La règle 4 s'écrit aussi sous la forme $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx}$. Pour une équation implicite $f(x, y) = 0$, on pourra utiliser la formule qui fait appel à des dérivées partielles : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$. Ou bien dériver par rapport à x en n'oubliant pas que y dépend de x .

Quelques formules de dérivation

La dérivée d'une constante est 0 : $c' = 0, c \in \mathbb{R}$. Si u est une fonction de la variable x , si a est une constante non nulle, alors les dérivées par rapport à x des fonctions usuelles sont données par les formules suivantes.

1. $(u^n)' = n u^{n-1} u' \Rightarrow (x^n)' = n x^{n-1}$
2. $(e^u)' = e^u u' \Rightarrow (e^{ax})' = a e^{ax}$
3. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u} \Rightarrow (\ln(ax))' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin(u))' = \cos(u) u' \Rightarrow (\sin(ax))' = a \cos(ax)$
5. $(\cos(u))' = -\sin(u) u' \Rightarrow (\cos(ax))' = -a \sin(ax)$
6. $(\tan(u))' = \sec^2(u) u' \Rightarrow (\tan(ax))' = a \sec^2(ax)$
7. $(\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow (\arcsin(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$
8. $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2} \Rightarrow (\arctan(ax))' = \frac{a}{1+a^2x^2}$

Intégration (linéarité, intégration par parties, Théorème Fondamental du Calcul)

Dans ce qui suit, f et g désignent des fonctions de la variable x , c et d désignent des constantes. Dans la formule 4, on suppose f continue par morceaux et bornée sur l'intervalle $[a, b]$, F désigne une primitive continue de f sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$: donc $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de f .

1. $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$
2. $\int (c f(x) + d g(x)) dx = c \int f(x) dx + d \int g(x) dx$
3. $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$
4. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ (TFC)

Quelques formules d'intégration

Dans les formules 4 à 8 plus bas, a désigne une constante non nulle. La lettre x désigne la variable d'intégration tandis C, C_1 et C_2 désignent des constantes arbitraires – possiblement complexes. Elles sont ajoutées puisque deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent par une constante.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0 \\ \ln(x) + C_2, & x > 0 \end{cases}$
4. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$
5. $\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$
6. $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$
7. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} du = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
8. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Remarque : dans la formule 8, le domaine (réel) de la primitive $\frac{1}{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ est l'intervalle $|x| < a$. Une autre primitive, avec domaine (réel) $|x| > a$, est donnée par $\frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + C_1$.