Transformées de Laplace.

Programme de Lars Fredericksen, adapté par Philippe Fortin

Le programme sur les transformées de Laplace, pour les calculatrices TI-*n*spire, est disponible ici : ETS_specfunc.tns

Il a été écrit initialement par Lars Fredericksen, ltf@post8.tele.dk, pour la TI-92; M. Fredericksen l'a légèrement modifié pour les versions suivantes de la calculatrice, TI-92Plus et Voyage-200. Le programme a ensuite été adapté pour la TI-*n*spire par Philippe Fortin, du Lycée Louis Barthou, à Pau.

Ce fichier doit être placé dans le dossier Mylib, soit de la calculatrice ou du logiciel sur l'ordinateur.

Ce programme contient des fonctions qui servent à résoudre des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles, à coefficients constants. Il n'y a pas de limite à l'ordre des équations différentielles. Les fonctions du programme peuvent aussi résoudre la plupart des équations intégrales, et la plupart des équations intégro-différentielles. La méthode utilisée est la transformée de Laplace.

Ce programme sert aussi à calculer des transformées de Laplace et des transformées inverses.

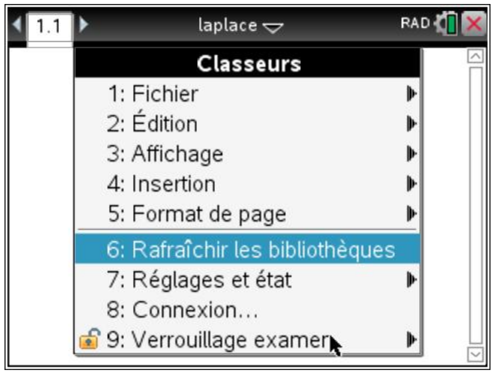
---

raccourci de bibliothèque

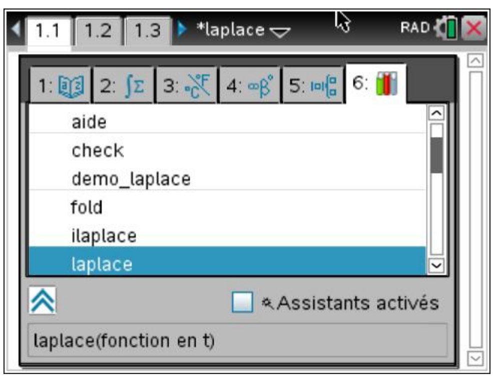
Il faut installer ETS_specfunc.tns sur notre calculatrice et sur notre logiciel dans MyLib.

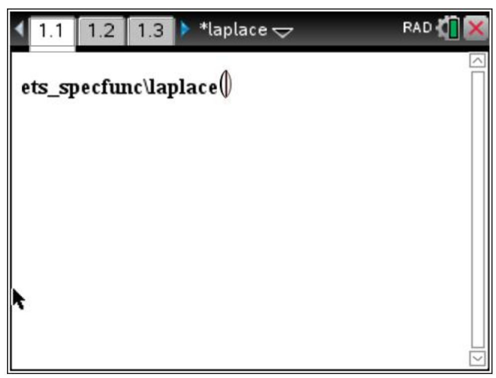
Puis il faut rafraîchir les librairies. Pour ce faire, à partir de n'importe quel classeur on peut commander doc▾-6 : Rafraîchir les bibliothèques.

On pourra alors utiliser les fonctions de ce programme à partir de tous nos classeurs.



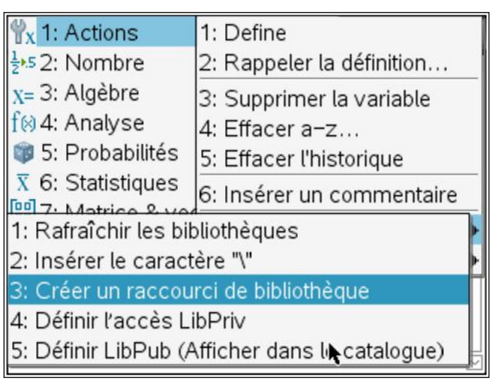
Il faut passer par 📖-6, choisir « ETS_specfunc » puis descendre jusqu'à la fonction voulue; on voit alors dans la ligne d'édition ets_specfunc\notre fonction. Par exemple, si on veut la transformée de Laplace d'une fonction, on descend jusqu'à la ligne « laplace »; sur la ligne d'édition il sera écrit ets_specfunc\laplace().

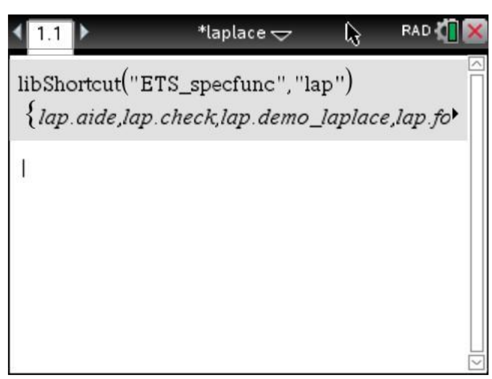




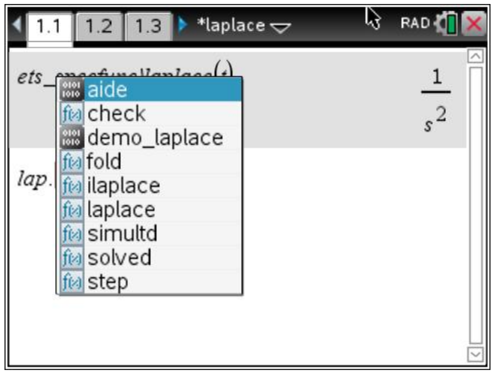
Puisqu'on utilisera vraisemblablement ce programme assez régulièrement, on peut créer un raccourci. Ouvrez le classeur dans lequel vous voulez travailler. Puis menu-1-7-3 pour créer un raccourci de bibliothèque.

On complète l'instruction en indiquant le nom de la bibliothèque entre guillemets, ETS_specfunc, et celui du raccourci souhaité, entre guillemets aussi; ici on a donné le nom lap, pour Laplace.





À l’avenir, pour avoir accès à toutes les fonctions qui sont présentées plus bas, il nous suffira d’écrire « lap. »; en écrivant le point il y a un menu déroulant qui apparaît, avec toutes les fonctions disponibles. Il faut bien sûr travailler dans le classeur et aussi dans l’activité où on a créé ce raccourci.



Pour toutes explications sur les bibliothèques et les raccourcis, consultez le texte « Librairies publiques (rendre certaines fonctions disponibles dans plusieurs classeurs) », du site NSpire de l’ÉTS.

Pour approfondir les concepts d’élaboration d’une librairie publique ou d’une librairie privée, consultez « Bibliothèques de programmes » TI-Nspire_chap17_capes.pdf, qui vient du site www.univers-ti-nspire.com. Notez que ce texte a été écrit pour une ancienne version de la calculatrice TI-*n*spire, mais que les commandes sont encore d’actualité.

---

aide

On peut avoir une brève présentation du programme en choisissant la commande « aide ».

Et on peut avoir une démonstration de l’utilisation des fonctions en choisissant « demo_laplace ».

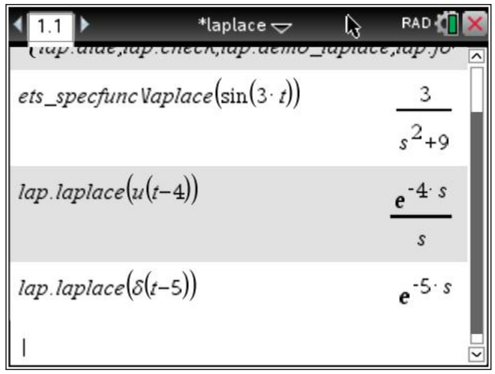
Note : *Au lieu de passer par le raccourci lap. , si on passe par le catalogue* 📖-6-ets_specfunc, *la syntaxe est alors donnée pour chaque fonction; il y a même quelquefois une brève explication*.

---

laplace

Avertissement : *Pour utiliser ce programme de Laplace, il est essentiel que certaines variables soient libres. Les noms de variables s, t et u sont utilisés par le programme; donc il ne faut pas leur donner une valeur ou une signification. Si jamais on avait enregistré quelque chose dans une de ces variables, on se ferait avertir d’effacer la variable en question, ou bien le programme ne répondrait pas bien; on peut recevoir le message « can’t transform this ». Au besoin, utilisez la commande « DelVar » pour effacer le contenu des variables s, t et u.*

On obtient la transformée de Laplace d’une fonction en t en demandant laplace(notre fonction). C’est important que la variable indépendante utilisée soit t; on n’a pas le choix. L’expression de notre fonction peut contenir des constantes et des paramètres, quels qu’ils soient. On ne peut pas utiliser la lettre s car elle est utilisée dans les calculs.



On appelle la fonction en passant par « ets_specfunc\ » ou bien par le raccourci qu'on vient de créer « lap. ».

Fonctions spéciales, qui peuvent être utilisées dans ce programme :

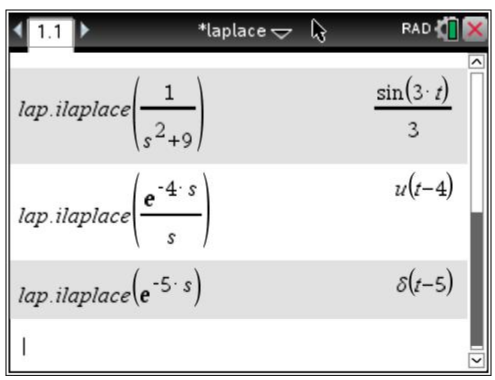
La fonction échelon-unité (Heaviside) : $\text{laplace}\left(u\left(t-a\right)\right)=\dfrac{e^{-as}}{s}$.

La fonction Delta de Dirac : $\text{laplace}\left(\delta\left(t-a\right)\right)=e^{-as}$.

---

ilaplace

Pour obtenir la transformée inverse d'une fonction en *s*; la syntaxe est ilaplace(notre fonction). Ici encore, on n'a pas le choix pour le nom de la variable, c'est *s* qu'on <u>doit</u> utiliser.



---

solved

Cette commande est utilisée pour résoudre des équations différentielles et même des équations intégro-différentielles, ce qui n'arrive pas dans le cours d'équations différentielles MAT-265.

Le programme effectue les mêmes opérations que ce que nous faisons à la main : il prend la transformée de Laplace de l'équation, il résout l'équation linéaire obtenue, et finalement il prend la transformée inverse pour donner la solution dans le domaine du temps.

En principe, solved peut résoudre des équations différentielles de n'importe quel ordre.

La syntaxe est solved(équation, {fonction de la variable indépendante, conditions initiales}).

L'équation est une équation différentielle; ça pourrait aussi être une équation intégrale ou intégro-différentielle. Les dérivées sont données en utilisant l'opérateur « dérivée » et les intégrales sont données avec l'opérateur « intégrale ».

« fonction » est la fonction $f(t)$ pour laquelle on cherche une solution. Il faut toujours écrire *f* avec sa variable : $f(t)$.

Les conditions initiales sont dans l'ordre $f(0), f'(0), f''(0),...$; donc d'abord la fonction évaluée à 0, puis la dérivée première, la dérivée seconde, etc.

Exemple 1 : Soit à résoudre l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=\sin(2t)$, avec les conditions initiales $x(0)=1$ et $x'(0)=3$.

Il faut écrire $\text{solved}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+5x(t)=\sin(2t),\{x(t),1,3\}\right)$.

Remarquez, par exemple, qu'on a écrit $5x(t)$ et non pas $5x$.

En effet on n'écrit jamais *x* mais bien toujours $x(t)$; il faut toujours indiquer que *x* est une fonction et qu'elle dépend de *t*.

$lap.solved\left(\frac{d^2}{dt^2}(x(t))+2\cdot\frac{d}{dt}(x(t))+5\cdot x(t)=\sin(2\cdot t),\{x(t),1,3\}\right)$	$x(t)=\left(\frac{21}{17\cdot e^{t}}-\frac{4}{17}\right)\cdot\cos(2\cdot t)+\left(\frac{35}{17\cdot e^{t}}+\frac{1}{17}\right)\cdot\sin(2\cdot t)$
$x(t)=\left(\frac{21}{17\cdot e^{t}}-\frac{4}{17}\right)\cdot\cos(2\cdot t)+\left(\frac{35}{17\cdot e^{t}}+\frac{1}{17}\right)\cdot\sin(2\cdot t)$	$x(t)=\left(\frac{21\cdot e^{-t}}{17}-\frac{4}{17}\right)\cdot\cos(2\cdot t)+\left(\frac{35\cdot e^{-t}}{17}+\frac{1}{17}\right)\cdot\sin(2\cdot t)$

C'est une bonne idée de ramener la réponse dans la ligne d'édition, ▲-enter-enter, pour faire « simplifier » et ainsi obtenir une forme plus concise avec les exponentielles au numérateur.

Exemple 2 : Résolvons $\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=f(t)$, où la fonction $f(t)$ est définie comme suit :

$$f(t)=\begin{cases}3 & \text{si } 0\le t<6\\ 0 & \text{si t}\ge 6\end{cases},$$

avec les conditions initiales $x(0)=0$ et $x'(0)=2$.

Il faut d'abord traduire $f(t)=3(u(t)-u(t-6))$, puis on utilise la syntaxe pour la calculatrice :

$$\text{solved}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=3(u(t)-u(t-6)),\{x(t),0,2\}\right)$$

$$\text{lap.solved}\left(\frac{d^2}{dt^2}(x(t))+5\cdot\frac{d}{dt}(x(t))+6\cdot x(t)=3\cdot(u(t)-u(t-6)),\{x(t),0,2\}\right)$$

$$x(t)=\frac{\frac{3\cdot e^{12}\cdot u(t-6)}{2}+\frac{u(t)}{2}}{(e^t)^2}+\frac{-e^{18}\cdot u(t-6)-u(t)}{(e^t)^3}-\frac{u(t-6)}{2}+\frac{u(t)}{2}$$

$$\text{propFrac}\left(x(t)=\frac{\frac{3\cdot e^{12}\cdot u(t-6)}{2}+\frac{u(t)}{2}}{(e^t)^2}+\frac{-e^{18}\cdot u(t-6)-u(t)}{(e^t)^3}-\frac{u(t-6)}{2}+\frac{u(t)}{2}\right.▸$$

$$x(t)=\frac{3\cdot e^{12-2\cdot t}\cdot u(t-6)}{2}-e^{18-3\cdot t}\cdot u(t-6)+\frac{e^{-2\cdot t}\cdot u(t)}{2}-e^{-3\cdot t}\cdot u(t)-\frac{u(t-6)}{2}+\frac{u(t▸}{2}$$

Ici nous avons utilisé la commande « PropFrac », accessible par $\boxed{\text{menu}}$-$\boxed{3}$-$\boxed{9}$-$\boxed{1}$, pour avoir les exponentielles au numérateur, sans qu'elles soient séparées l'une de l'autre : par exemple e^{12-2t} et non pas $e^{-2t}\cdot e^{12}$.

On peut aussi écrire $x(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}+\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{u}(t)+\left(\frac{3}{2}e^{12-2t}-e^{18-3t}-\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{u}(t-6)$, en regroupant manuellement les fonctions-échelon.

Exemple 3 : Résolvons une équation différentielle, $\frac{dx}{dt}+5x=\cos(t)$, sans condition initiale.

$$\text{lap.solved}\left(\frac{d}{dt}(x(t))+2\cdot x(t)=\cos(t),\{x(t)\}\right)$$

$$x(t)=\frac{2\cdot\cos(t)}{5}+\frac{\sin(t)}{5}+\frac{x0-\frac{2}{5}}{(e^t)^2}$$

$$x(t)=\frac{2\cdot\cos(t)}{5}+\frac{\sin(t)}{5}+\frac{x0-\frac{2}{5}}{(e^t)^2}$$

$$x(t)=\left(x0-\frac{2}{5}\right)\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{2\cdot\cos(t)}{5}+\frac{\sin(t)}{5}$$

$x(t)=\frac{2}{5}\cos(t)+\frac{1}{5}\sin(t)+\left(x_0-\frac{2}{5}\right)e^{-2t}$, où x_0 est la condition initiale inconnue.

---

simultd

On utilise cette fonction pour résoudre un système d'équations différentielles. Comme pour « solved », le programme prend la transformée de Laplace de chaque équation, résout le système d'équations linéaires et calcule la transformée inverse de ce qui a été obtenu.

Deux règles doivent être respectées. Premièrement, il doit y avoir le même nombre d'équations que d'inconnues (fonctions inconnues). Deuxièmement, les fonctions inconnues doivent toutes dépendre d'une seule variable, *t*.

La syntaxe de cette commande est

$$\text{Simultd}\left(\begin{bmatrix} \textit{équation}1 \\ \textit{équation}2 \\ \cdots \end{bmatrix},\begin{bmatrix} f1(\text{var}) & f1(0) & f1'(0) & \cdots \\ f2(\text{var}) & f2(0) & f2'(0) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\right)$$

Les équations sont données avec l'opérateur dérivée.

$f1(var), f1(0), f1'(0), ..., f2(var), ...$ sont les fonctions et leurs conditions initiales.

<u>Exemple 4</u> : Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+5x+3y=e^{-t} \qquad \text{et} \qquad 2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x+y=3,$$

avec les conditions initiales $x(0)=2,\ y(0)=1$.

Nous écrirons $\text{simultd}\left(\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt}+\frac{dy(t)}{dt}+5x(t)+3y(t)=e^{-t} \\ 2\frac{dx(t)}{dt}+\frac{dy(t)}{dt}+x(t)+y(t)=3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x(t) & 2 \\ y(t) & 1 \end{bmatrix}\right)$

La première matrice est un vecteur qui contient les équations; c'est un vecteur 2×1 (2 lignes, 1 colonne) puisque nous avons 2 équations. La seconde matrice contient les fonctions et leurs conditions initiales; son format est 2 lignes (les 2 équations) et 2 colonnes, parce que nous avons une seule condition initiale par fonction inconnue.

$$lap.simultd\left(\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(x(t))+\frac{d}{dt}(y(t))+5\cdot x(t)+3\cdot y(t)=\mathbf{e}^{-t} \\ 2\cdot\frac{d}{dt}(x(t))+\frac{d}{dt}(y(t))+x(t)+y(t)=3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x(t) & 2 \\ y(t) & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} x(t)=\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{3}-\frac{11}{6\cdot(\mathbf{e}^{t})^2}-\frac{9}{2} \\ y(t)=\frac{-25\cdot\mathbf{e}^{t}}{2}+\frac{1}{2\cdot\mathbf{e}^{t}}+\frac{11}{2\cdot(\mathbf{e}^{t})^2}+\frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t)=\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{3}-\frac{11}{6\cdot(\mathbf{e}^{t})^2}-\frac{9}{2} \\ y(t)=\frac{-25\cdot\mathbf{e}^{t}}{2}+\frac{1}{2\cdot\mathbf{e}^{t}}+\frac{11}{2\cdot(\mathbf{e}^{t})^2}+\frac{15}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(t)=\frac{-11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{6}+\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{3}-\frac{9}{2} \\ y(t)=\frac{\mathbf{e}^{-t}}{2}+\frac{11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{2}-\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{2}+\frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t)=\frac{-11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{6}+\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{3}-\frac{9}{2} \\ y(t)=\frac{\mathbf{e}^{-t}}{2}+\frac{11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{2}-\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{2}+\frac{15}{2} \end{bmatrix}[1\ \ 1] \qquad x(t)=\frac{-11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{6}+\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{3}-\frac{9}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x(t)=\frac{-11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{6}+\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{3}-\frac{9}{2} \\ y(t)=\frac{\mathbf{e}^{-t}}{2}+\frac{11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{2}-\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{2}+\frac{15}{2} \end{bmatrix}[2\ \ 1] \qquad y(t)=\frac{\mathbf{e}^{-t}}{2}+\frac{11\cdot\mathbf{e}^{-2\cdot t}}{2}-\frac{25\cdot\mathbf{e}^{t}}{2}+\frac{15}{2}$$

On obtient le résultat dans une matrice : la première ligne donne la première fonction, la deuxième ligne donne la deuxième fonction.

On peut extraire la $n^{\text{ème}}$ ligne en demandant « (la matrice)[n , 1] »; c'est ce que nous avons fait pour avoir $x(t)$ et $y(t)$ séparément.

Le résultat obtenu est $x(t) = -\dfrac{11}{6}e^{-2t} + \dfrac{25}{3}e^{t} - \dfrac{9}{2}$, $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{11}{2}e^{-2t} - \dfrac{25}{2}e^{t} + \dfrac{15}{2}$.

---

check

Cette fonction a été construite pour vérifier la justesse des résultats obtenus par solved et simultd.

Il y a certains cas où ces fonctions donnent des faux résultats.

Notez bien que pour le type d'équations rencontrées en MAT-265, on obtient toujours la bonne réponse; donc la commande « check » ne nous servira pas beaucoup.

$$lap.solved\left(\frac{d}{dt}(x(t))+2\cdot x(t)=\cos(t),\{x(t)\}\right) \qquad x(t)=\frac{2\cdot\cos(t)}{5}+\frac{\sin(t)}{5}+\frac{x0-\frac{2}{5}}{\left(e^{t}\right)^{2}}$$

$$lap.check\left(\frac{d}{dt}(x(t))+2\cdot x(t)=\cos(t),x(t)=\frac{2\cdot\cos(t)}{5}+\frac{\sin(t)}{5}+\frac{x0-\frac{2}{5}}{\left(e^{t}\right)^{2}}\right) \qquad 0$$

$$lap.simultd\left(\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}(x(t))+\frac{d}{dt}(y(t))+5\cdot x(t)+3\cdot y(t)=e^{-t}\\ 2\cdot\frac{d}{dt}(x(t))+\frac{d}{dt}(y(t))+x(t)+y(t)=3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x(t) & 2\\ y(t) & 1\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix}x(t)=\frac{25\cdot e^{t}}{3}-\frac{11}{6\cdot\left(e^{t}\right)^{2}}-\frac{9}{2}\\ y(t)=\frac{-25\cdot e^{t}}{2}+\frac{1}{2\cdot e^{t}}+\frac{11}{2\cdot\left(e^{t}\right)^{2}}+\frac{15}{2}\end{bmatrix}$$

$$lap.check\left(\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}(x(t))+\frac{d}{dt}(y(t))+5\cdot x(t)+3\cdot y(t)=e^{-t}\\ 2\cdot\frac{d}{dt}(x(t))+\frac{d}{dt}(y(t))+x(t)+y(t)=3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x(t)=\frac{25\cdot e^{t}}{3}-\frac{11}{6\cdot\left(e^{t}\right)^{2}}-\frac{9}{2}\\ y(t)=\frac{-25\cdot e^{t}}{2}+\frac{1}{2\cdot e^{t}}+\frac{11}{2\cdot\left(e^{t}\right)^{2}}+\frac{15}{2}\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

La syntaxe est check(équation, solution obtenue par solved). On écrit l'équation de la même façon que pour la commande solved. Dans le cas d'un système, la syntaxe est semblable : check(système d'équations dans une matrice, solution obtenue par simultd). Remarquez qu'on ne donne pas les conditions initiales.

La réponse doit être 0 (zéro); sinon, la solution est probablement fausse. Résolvez à la main!

Dans les exemples présentés plus haut, les réponses sont bonnes.

---

fold

La commande « fold » calcule la convolution de deux fonctions.

Pour calculer $f(t)*g(t)$, la syntaxe à employer est $\text{fold}\left(f(t),g(t)\right)$.

Cette fonction utilise le fait que si $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions d'ordre exponentiel, continues par morceaux sur $[0;\infty[$ et qu'elles possèdent les transformées de Laplace $F(s)$ et $G(s)$ respectivement, alors la transformée inverse de $F(s)\cdot G(s)$ est $f(t)*g(t)$.

Exemple : Soit $f(t)=t$ et $g(t)=\sin(2t)$, de sorte que $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$ et $G(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$. On cherche la convolution de t avec $\sin(2t)$, ce qui revient à chercher la transformée inverse du produit $F(s)\cdot G(s)=\dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}$.

$lap.fold(t,\sin(2\cdot t))$	$\frac{t}{2}-\frac{\sin(2\cdot t)}{4}$
$lap.ilaplace\left(\frac{1}{s^2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right)$	$\frac{t}{2}-\frac{\sin(2\cdot t)}{4}$

On a vérifié cette solution avec ilaplace. On a bel et bien la même réponse.

Chantal Trottier

25 septembre 2016