Nspire CAS en MAT265 : fonctions particulièrement utiles

Michel Beaudin
michel.beaudin@etsmtl.ca
21 décembre 2022

Nspire CAS possède déjà une commande « deSolve » pour résoudre les équations différentielles du premier ordre et du deuxième ordre; les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta sont déjà programmées et le mode graphique d'équations différentielles permet de visualiser le champ de pente d'une équation du premier ordre et le champ de direction pour les systèmes du premier ordre. Les fonctions additionnelles suivantes proviennent des fichiers ETS_specfunc.tns et Kit_ETS_MB.tns. Ce dernier utilise des fonctions du premier ainsi que du fichier Kit_ETS_FH.tns. Pour avoir accès aux fonctions suivantes – ainsi qu'à plusieurs autres non illustrées ici −, il faut enregistrer dans MyLib les 3 fichiers et rafraîchir les bibliothèques.

Trois fonctions importantes de la librairie ETS_specfunc

Nom de la fonction	**Description**
laplace(*f*)	Donne la transformée de Laplace de l'expression *f*, la variable utilisée devant nécessairement être *t*. Utilisez $u(t)$ pour la fonction échelon-unité et $\delta(t)$ pour la "fonction" delta de Dirac. La réponse est une expression en *s*.
ilaplace(*F*)	Donne la transformée de Laplace inverse d'une expression *F* dont la variable doit être *s*. La réponse est une expression en *t*.
solved(*edo*, {*y*(*t*), *co_ini*})	Résout, par transformées de Laplace, l'équation différentielle *edo* contenant la fonction inconnue $y(t)$ avec ses conditions initiales *co_ini*.

Une description de la librairie ETS_specfunc est donnée dans le texte de Chantal Ttrottier. Une description de toutes les fonctions (pas seulement en MAT265) de ma librairire Kit_ETS_MB (avec quelques références à Kit_ETS_FH) est donnée ici avec des exemples.

Exemple 1 : calculons des transformées directes et inverses de Laplace. Voir les figures 1 et 2.

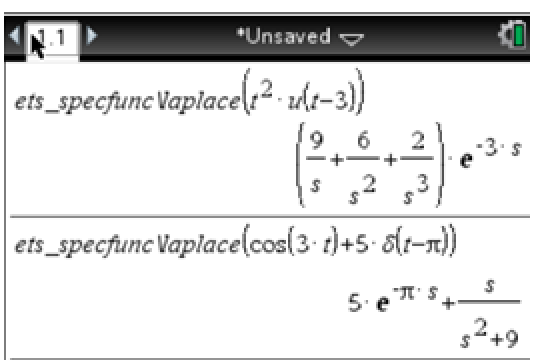

Figure1

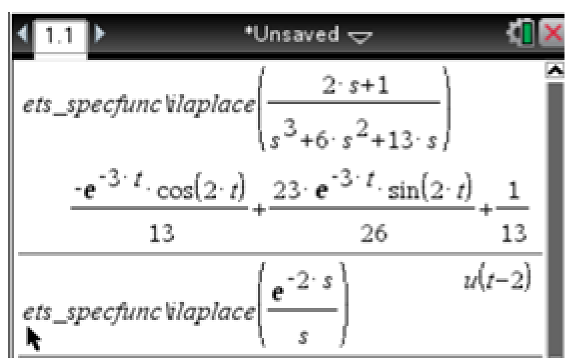

Figure 2

Notez la puissance de la fonction « ilaplace » puisque pour inverser à la main $\frac{2s+1}{s^3+6s^2+13s}$, il faut faire des fractions partielles et compléter un carré.

Exemple 2 : le « deSolve » de Nspire CAS est limité à l'ordre 1 et l'ordre 2. La fonction « solved » peut faire mieux : ordre supérieur à 2 et membre de droite contenant des fonctions « $u(t)$ » et « $\delta(t)$ » par exemple. La figure 3 montre la résolution de l'É.D. $y''' + 8y = \sin(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$ ainsi que la résolution de l'É.D. $y' + 3y = 5\delta(t-2),\ y(0) = 0.$

$ed:=\frac{d^3}{dt^3}(y(t))+8\cdot y(t)=\sin(t):co\_i:=\{y(t),0,1,2\}$ $\qquad \{y(t),0,1,2\}$

ets_specfunc\solved(*ed*,*co_i*)

$$y(t)=\frac{-5\cdot e^{t}\cdot\cos(\sqrt{3}\cdot t)}{156}+\frac{49\cdot\sqrt{3}\cdot e^{t}\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot t)}{156}+\frac{\cos(t)}{65}+\frac{8\cdot\sin(t)}{65}+\frac{1}{60\cdot(e^{t})^{2}}$$

$$\mathrm{propFrac}\left(y(t)=\frac{-5\cdot e^{t}\cdot\cos(\sqrt{3}\cdot t)}{156}+\frac{49\cdot\sqrt{3}\cdot e^{t}\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot t)}{156}+\frac{\cos(t)}{65}+\frac{8\cdot\sin(t)}{65}+\frac{1}{60\cdot(e^{t})^{2}}\right)$$

$$y(t)=\frac{-5\cdot e^{t}\cdot\cos(\sqrt{3}\cdot t)}{156}+\frac{49\cdot\sqrt{3}\cdot e^{t}\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot t)}{156}+\frac{e^{-2\cdot t}}{60}+\frac{\cos(t)}{65}+\frac{8\cdot\sin(t)}{65}$$

$sol1:=ets\_specfunc\backslash solved\left(\frac{d}{dt}(y(t))+3\cdot y(t)=5\cdot\delta(t-2),\{y(t),0\}\right)$

$$y(t)=\frac{5\cdot e^{6}\cdot u(t-2)}{(e^{t})^{3}}$$

propFrac(*sol1*)

$$y(t)=5\cdot e^{6-3\cdot t}\cdot u(t-2)$$

Figure 3

Quelques fonctions utiles de la librairie Kit_ETS_MB

Note : les fonctions « cir_rc », « cir_rl », « ressort », « convolap » et « circuit_rlc » utilisent la libraire ETS_specfunc : c'est pour cela que la variable indépendante n'est pas incluse puisque ce doit être nécessairement « *t* ». Pour les circuits *RL* et *RC*, cela permettra de les revisiter avec des sources continues par morceaux, voire des impulsions.

Nom de la fonction	Description
cir_rc(*R*, *C*, *E*, *vo*) *cir_rl*(*R*, *L*, *E*, *io*)	Trouve la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$ dans un circuit *RC*, source $E(t)$ avec tension initiale v_0. Donc résout $R\cdot C\cdot {v_C}' + v_C = E(t).$ Trouve le courant $i(t)$ dans un circuit *RL*, source $E(t)$ avec courant initial i_0. Donc résout l'É.D. $L\cdot\frac{di}{dt}+R\cdot i=E(t).$
solpart(y1, y2, r, x)	Trouve une solution particulière à l'É.D. $y''(x)+p(x)\,y'(x)+q(x)\,y(x)=r(x)$ par la méthode de variation des paramètres; y_1 et y_2 sont les 2 solutions de l'équation complémentaire.

convolap(x, h)	Convolution des signaux $x(t)$ et $h(t)$.
ressort(m, b, k, f, yo, vo)	Résolution de $m\,y''(t)+b\,y'(t)+k\,y(t)=f(t)$. Ici yo et vo sont les conditions initiales (e.g. position, vitesse).
circuit_rlc(R, L, C, E, vo, io)	Trouve la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$ dans un circuit *RLC*, source $E(t)$, tension (v_0) et courant (i_0) initiaux donnés. Donc résout l'É.D. $L\cdot C\cdot v_C''+R\cdot C\cdot v_C'+v_C=E(t)$.
u_to_piece(f, x)	Transforme l'expression f de variable x en fonction par morceaux dès que la définition suivante est faite : $u(t):=\dfrac{1+\operatorname{sign}(t)}{2}$. L'expression f provient d'une réponse obtenue par transformée de Laplace et contient des fonctions échelons.
taylor_ode1(r, x, y, xo, yo, n)	Polynôme de Taylor d'ordre n pour $y'=r(x,y),\, y(x_0)=y_0$.
taylor_ode2(r, x, y, v, xo, yo, vo, n)	Polynôme de Taylor d'ordre n pour $y''=r(x,y,y'),\, y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=v_0$. Ici v désigne y'.
fourier(f, t, $t1$, $t2$, n)	Se simplifie en la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier du signal périodique f, de variable t et de période $t2-t1$.
de_syst(**A**, **g**, to, **yo**)	Résout le système du premier ordre $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{g}(t),\,\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0$. **Utilisez** « t » comme variable indépendante.

Exemple 3 : le « deSolve » utilise la méthode de variation des paramètres pour résoudre une É.D. du second ordre mais souvent la solution affichée a été transformée par des identités et l'utilisateur peut avoir de la difficulté à comparer avec la réponse de la solution particulière qu'il a trouvée à la main par cette méthode. La fonction « solpart » permet de se vérifier. Par exemple, soit l'É.D. $y''+4y=\sin(3x)$. Avec la méthode des coefficients indéterminés, on trouverait rapidement la solution particulière $-\dfrac{\sin(3x)}{5}$; mais voici ce que donnent le « deSolve » et la fonction « solpart » :

deSolve(y''+4· y=sin(3· x),x,y)	$y=c1\cdot\cos(2\cdot x)+c2\cdot\sin(2\cdot x)-\dfrac{\sin(x)\cdot\left(4\cdot(\cos(x))^2-1\right)}{5}$
kit_ets_mb\solpart(cos(2· x),sin(2· x),sin(3· x),x)	$\dfrac{-\sin(2\cdot x)\cdot\cos(5\cdot x)}{20}+\dfrac{\cos(2\cdot x)\cdot\sin(5\cdot x)}{20}-\dfrac{\sin(x)\cdot\cos(2\cdot x)}{4}-\dfrac{\cos(x)\cdot\sin(2\cdot x)}{4}$

Figure 4

Le lecteur pourra vérifier que chacune des 2 solutions particulières affichées, autant celle provenant du « deSolve » qui est $-\dfrac{\sin(x)\left(4\cos^2 x-1\right)}{5}$ que celle donnée par la fonction « solpart », sont identiques à $-\dfrac{\sin(3x)}{5}$! Il suffit de faire « texpand » à la différence des 2 réponses pour constater que c'est 0.

Exemple 4 : « convoler » un signal $x(t)$ avec $\delta(t-a)$ a l'effet d'une translation : $x(t)*\delta(t-a)=x(t-a)$ (donc la « fonction » de Dirac est l'élément neutre de la convolution). Vérifions dans le cas suivant :

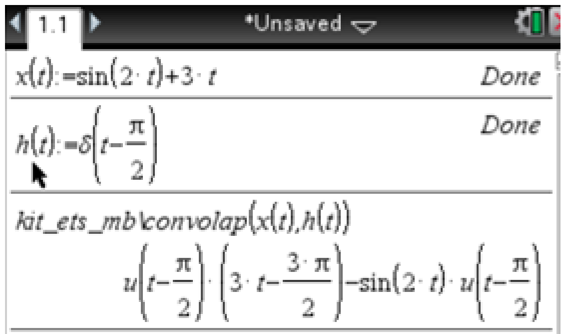

Figure 5

Exemple 5 : soit le problème de masse-ressort modélisé par le problème aux valeurs initiales $2y''+y'+2y=f(t),\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$ avec $f(t)=\begin{cases}1, & \text{si } 5<t<20\\ 0, & \text{ailleurs}\end{cases}$. Notez, à la figure 6, que l'on a utilisé la fonction échelon-unité « $u(t)$ » pour définir $f(t)$, appelée « input ».

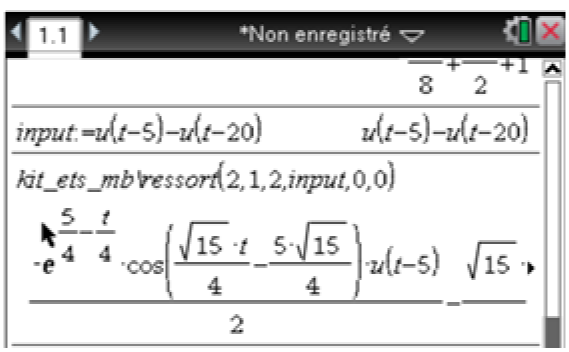

Figure 6

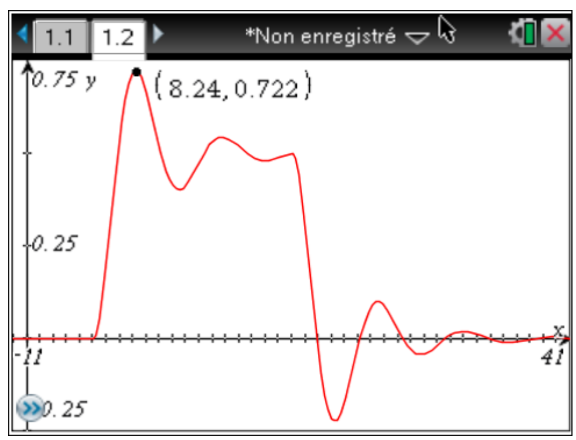

Figure 7

Pour tracer le graphique de la figure 7, on doit savoir que Nspire CAS ne comprend pas ce qu'est « $u(t)$ » dans une fenêtre graphique. Donc, <u>après</u> avoir obtenu la solution, on a défini $u(t)$: $\dfrac{1+\operatorname{sign}(t)}{2}\to u(t)$.

Pour la programmation de cette fonction : en appliquant la transformée de Laplace et ensuite la transformée inverse à l'équation différentielle $m\,y''(t)+b\,y'(t)+k\,y(t)=f(t),\quad y(0)=y_0,\,y'(0)=v_0,$ on trouve la solution $y(t)=\text{ilaplace}\left(\dfrac{m\,s\,yo+m\,vo+b\,yo+\text{laplace}(f)}{m\,s^2+b\,s+k}\right).$

Exemple 6 : trouvons le courant en régime permanent dans un circuit RLC si la source (en volts) est donnée par $E(t)=150\sin(10t)$ et si R = $10\,\Omega$, L = 1H et C = 250×10^{-6} F.

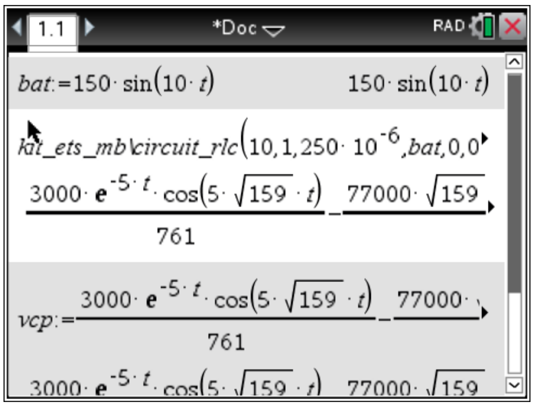

Figure 8

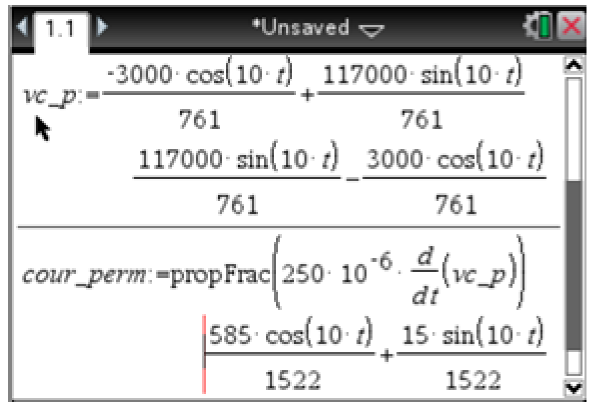

Figure 9

La fonction « circuit_rlc » donnant la tension aux bornes du condensateur, on n'a conservé que la partie en régime permanent (sinus et cosinus seulement) et utilisé le fait que $i(t)=C\cdot v_C{}'(t).$ Puisque que l'É.D. d'un circuit RLC est $LC\,v_C''(t)+RC\,v_C'(t)+v_C=E(t),v_C(0)=v_{c0},i(0)=i_0,$ et que $v_C'(0)=\dfrac{i(0)}{C},$ alors on a posé : $\text{ressort}\left(LC,RC,1,E,vco,\dfrac{io}{C}\right)\ \to\ \text{circuit\_rlc}(R,\ L,\ C,E,vco,io).$

Exemple 7 : voici un exemple où l'on voit le polynôme de Taylor d'ordre 5 de la solution en séries de chacune des 2 É.D. suivantes :

$$y'+3y=x^2,y(0)=2\ \text{ et }\ (2x+5)y''+2y'-xy=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$$

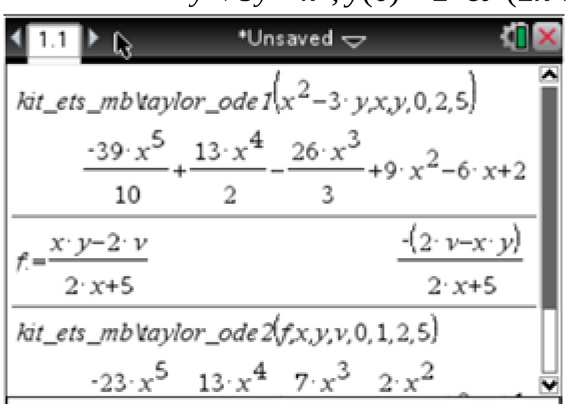

Figure 10

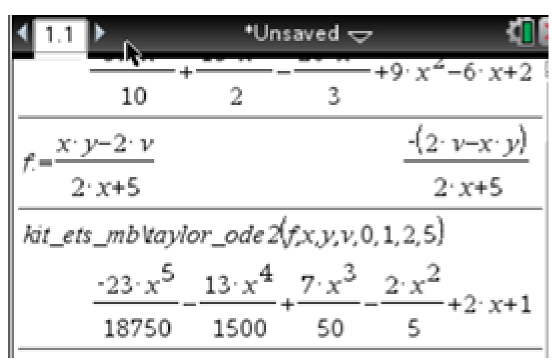

Figure 11

L'idée derrière les deux fonctions précédentes est de permettre à l'utilisateur de vérifier sa réponse obtenue à la main après avoir trouvé la formule de récurrence et produit une somme partielle de la solution en séries. Leur définition fait appel à la règle de dérivation en chaîne de façon récursive, ce qui peut expliquer la lenteur sur la calculatrice si *n* est élevé! Il est donc recommandé d'utiliser sur la calculatrice une valeur de « *n* » assez petite (4, 5, 6 par exemple). Rappelons pourquoi l'on utilise la règle de dérivation en chaîne pour définir chacune de ces fonctions. Illustrons avec l'É.D. d'ordre 1 $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. La série de Taylor de la solution $y(x)$, autour du point $x = x_0$, est $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$

Il faut calculer les dérivées successives de $y(x)$. On connaît déjà y' puisque $y' = f(x, y)$. Mais alors,

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left(f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \ldots\ldots..$$

On voit que les calculs, à la main, deviendraient très rapidement monstrueux.

Exemple 8 : séries de Fourier. Notez que notre fonction « fourier » utilise la fonction « integral_mcx_d » contenue dans la librairie Kit_ETS_FH : dans le cas d'un signal défini par morceaux, cela permet de trouver, en mode exact, la valeur de chacun des coefficients de Fourier. La figure 12 montre une somme partielle de Fourier d'ordre 5 du signal périodique

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x)$$

(donc de période $P = 2$). La figure 13 montre le graphe avec celui du signal.

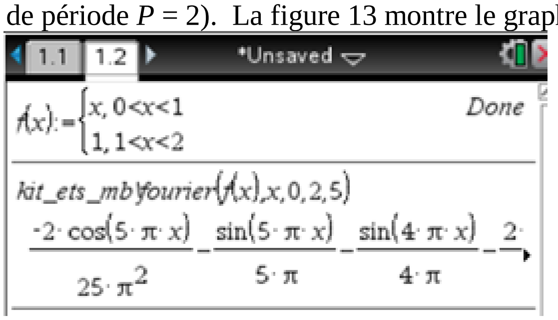

Figure 12

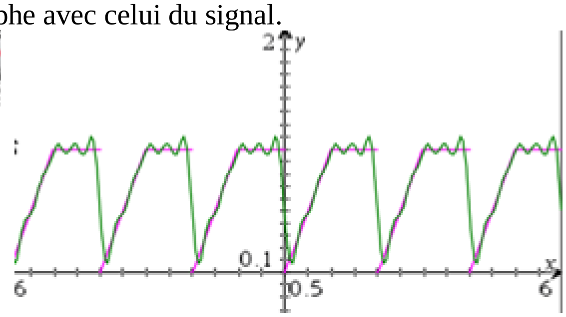

Figure 13

Exemple 9 : résolvons le système d'É.D. du premier ordre suivant : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y + e^{2t}, & x(0) = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 1, & y(0) = 0 \end{cases}$

Figure 14

La solution est donc $x(t) = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{9}{2}e^{t} + 3, y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + 2$.