AVERTISSEMENT

Cet examen de pratique vous est fourni à titre d'exemple. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans l'examen que vous aurez. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient se retrouver dans votre examen. La durée de chaque partie de votre examen pourrait différer de cet examen de pratique. L'examen que vous passerez pourrait être plus court ou plus long, plus facile ou plus difficile.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – MAT265

EXAMEN INTRA DE PRATIQUE – PARTIE I

École de technologie supérieure | Version du 03.01.2023

DOCUMENTATION PERMISE

- Aucune calculatrice **pour la première partie de l'examen**.
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.
- Les étudiants seront informés par leur enseignant de la documentation permise.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier supplémentaire d'examen*** (cahier blanc) et non sur le questionnaire.
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (5 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE I (35 points)

(12) **1.** En justifiant vos réponses, classifiez chacune des équations différentielles suivantes comme *linéaire*, *séparable*, *linéaire et séparable* ou *ni l'une ni l'autre*. À cet effet, rappelons qu'une équation différentielle du premier ordre est dite *linéaire* (resp. *séparable*) si elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \qquad \left(\text{resp.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}\right).$$

(a) $y'(x) = 2y(x) + 1$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - 2y^2 = 3$

(c) $\dfrac{dy}{dt} + t^2 y = t$

(d) $z\dfrac{dz}{dy} = \cos(3y) - 2z$

---

(12) **2.** Vérifiez si l'expression ou la fonction donnée est bien solution de l'équation différentielle qui l'accompagne :

(a) $y(x) = \sin(3x)$ et $y''(x) + 4y(x) = 0$

(b) $y = (x+10)\,e^x$ et $y' - y = e^x$

(c) $y = t^{3/2}$ et $4t^2 y'' - 3y = 0$

---

(11) **3.** Considérons le problème

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 1,\ y(0) = 1.$$

(a) Avant même de résoudre, pourquoi peut-on affirmer qu'il existe une solution unique définie au voisinage du point (0, 1) ?

(b) Vérifiez que la fonction $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$ est bien une solution du problème.

(c) Montrez comment cette solution a été trouvée en utilisant le fait que la solution générale de l'équation différentielle $y' + p(x)\,y = q(x)$ est donnée par

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx + C\right) \quad \text{avec} \quad \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}.$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – MAT265

EXAMEN INTRA DE PRATIQUE – PARTIE II

École de technologie supérieure — Version du 03.01.2023

DOCUMENTATION PERMISE

- Aucune calculatrice **pour la première partie de l'examen**.
- Une calculatrice TI, **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.
- Les étudiants seront informés par leur enseignant de la documentation permise.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier supplémentaire d'examen*** (cahier blanc) et non sur le questionnaire.
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (5 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE II (65 points)

(15) **4.** Considérons l'équation différentielle d'ordre un suivante avec condition initiale :

$$\frac{dy}{dx} = 3y + \sin(2x),\ y(0) = 1\,.$$

(a) Utilisez la solution retournée par la commande `deSolve()` de votre calculatrice et utilisez-la pour trouver la valeur de $y(0.5)$.

(b) Appliquez la méthode d'Euler en $n = 5$ étapes pour trouver une valeur approchée de $y(0.5)$.

(c) Si $y_0(x) = 1$, trouvez la valeur de $y(1.5)$ en uitlisant la seconde itération de Picard (donc calculez $y_2(1.5)$).

(d) Les figures 1 et 2 montrent chacune un champ de pentes avec la courbe générée par la méthode d'Euler. En *justifiant* votre réponse, lequel des deux graphiques est sûrement le champ de l'équation différentielle étudiée dans cette question ? La figure 1 ou la figure 2 ?

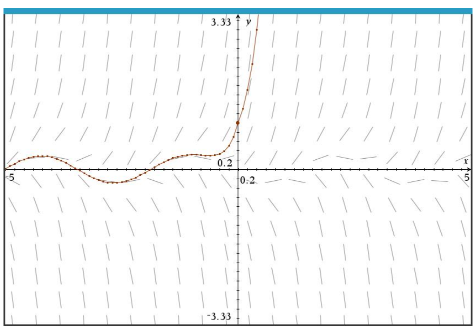

FIGURE 1 – Champ de pentes

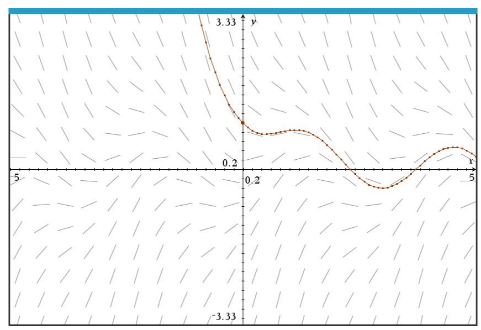

FIGURE 2 – Champ de pentes

(15) **5.** Pour cette question, *indiquez* les équations différentielles que vous aurez fait résoudre en spécifiant clairement le sens positif du déplacement que vous aurez choisi. Dans vos calculs, utilisez $g = 9.81$ m/s^2.

(a) Un objet de 80 kg est en chute libre depuis une hauteur de 2 000 m avec une vitesse initiale nulle. La force de résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse avec une constante de proportionnalité égale à 15 N·s/m. Quel temps mettra-t-il pour toucher le sol ?

(b) Un second objet tombe d'une hauteur de 2 500 m et sa masse est de 75 kg. Dans un milieu où la force de résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse avec une constante de proportionnalité égale à $\frac{1}{8}$ kg/m. Quel temps mettra-t-il pour toucher le sol ?

(15) **6.** Considérons un circuit électrique où sont branchés en série une résistance $R = 20\ \Omega$ et un condensateur $C = 1/100$ F avec une source, en volts, donnée par

$$E(t) = 100e^{-t} + 30\sin(t)\ .$$

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le courant commence à circuler. On considère que le condensateur a une tension initiale de 0 volts donc $v_C(0) = 0$.

(a) Posez l'équation différentielle de ce circuit.

(b) Faites résoudre cette équation différentielle (commande `deSolve( )` ou fonction `cir_rc()` de la librairie `kit_ets_mb`) pour trouver la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$.

(c) Trouvez la *tension maximale* atteinte aux bornes du condensateur.

(d) Trouvez l'amplitude du *courant en régime permanent.*

---

(15) **7.** Résolvez chacune des équations différentielles suivantes en utilisant la *méthode des coefficients indéterminés.*

Indiquez clairement le candidat proposé (que vous pouvez très bien substituer dans la calculatrice si vous le désirez) et *montrez le système d'équations* que vous aurez fait résoudre afin de trouver les différents coefficients.

(a) $y'' + 9y' + 14y = 2\sin(3x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(b) $y'' + 16y' = x^2 + 5e^{-16x}$

(c) $y''' - y'' + y' - y = -10\cos(2x)$

---

(5) **8.** Indiquez si chacun des énoncés suivants est **Vrai** ou **Faux**. Vous devez justifier votre réponse à l'aide d'un calcul, d'un théorème, d'une définition, d'une propriété ou d'un contre-exemple.
Une bonne réponse sans justification ne vaut aucun point.

(a) L'équation différentielle suivante est d'ordre quatre : $(y'(x))^4 + y(x) = \sin(x)$.

(b) La méthode des coefficients indéterminés se fonctionnera pas pour trouver une solution particulière à l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = \tan(x)$.

(c) Un objet se déplace le long de l'axe des x et sa vitesse à l'instant t est donnée par l'expression $\frac{1}{t^2+1}$. Cet objet part de l'origine à l'instant $t = 0$. Puisque sa vitesse n'est jamais nulle, il franchira **nécessairement** une distance infinie.

(d) Soit un circuit RL où sont branchées en série une résistance, une bobine (inducteur) et une source de type *sinusoïdal.* Alors la condition initiale (le courant initial) n'affecte pas l'*amplitude* du courant en régime permanent.

(e) Une équation du type $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ est appelée *équation aux dérivées partielles.*

Bon examen!