AVERTISSEMENT

Cet examen de pratique vous est fourni à titre d'exemple. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans l'examen que vous aurez. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient se retrouver dans votre examen. La durée de chaque partie de votre examen pourrait différer de cet examen de pratique. L'examen que vous passerez pourrait être plus court ou plus long, plus facile ou plus difficile.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – MAT265

EXAMEN FINAL DE PRATIQUE – PARTIE I

École de technologie supérieure | Version du 11.07.2024

DOCUMENTATION PERMISE

- Un résumé personnel de trois feuilles 8½ × 11, recto verso.
- Une table de règles et formules de dérivation et d'intégration (1 page).
- L'aide-mémoire d'algèbre et de trigonométrie (2 pages).
- La table de transformées de Laplace (2 pages) et la table de séries de Fourier (2 pages).
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre sur le questionnaire (de l'espace sera laissé en conséquence).
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (4 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE I (35 points)

(13) **1.** Calculez la transformée de Laplace des fonctions suivantes. N'oubliez pas d'indiquer les *propriétés utilisées* dans la **table de transformées de Laplace**.

(a) $f(t) = \left(t\,e^{-3t}\right)^2$

(b) $g(t) = \begin{cases} 2t-1, & 0 \le t < 2 \\ 5-t, & 2 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$

Écrivez d'abord la fonction g donnée ci-dessus comme une combinaison linéaire de fonctions échelon-unité $u(t-a)$ puis utilisez cette expression pour trouver sa transformée de Laplace.

---

(12) **2.** Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes. N'oubliez pas d'indiquez les *propriétés utilisées* dans la **table de transformées de Laplace**.

(a) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2-s-56}$

(b) $G(s) = \dfrac{5s}{s^2+14s+58}$

(c) $H(s) = \dfrac{s-1}{s^2+14s+49}$

---

(10) **3.** Indiquez si chacun des énoncés suivants est **Vrai** ou **Faux**. Vous devez justifier votre réponse à l'aide d'un calcul, d'un théorème, d'une propriété ou d'un contre-exemple.
Une bonne réponse sans justification ne vaut aucun point.

(a) Si $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$ et $\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = G(s)$, alors $\mathscr{L}\left\{f(t) - g(t)\right\} = F(s) - G(s)$.

(b) Dans l'intervalle $3 \le t \le 4$, la fonction $y(t) = 4u(t) + t\,u(t-5)$ correspond simplement à la fonction $y(t) = 4 + t$.

(c) Pour le problème $(x^2+16)y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, la solution en série de puissances possède un rayon de convergence égal à 16.

(d) Soit un circuit RLC où sont branchés en série une bobine (inducteur), une résistance, un condensateur et une source de type sinusoïdal. Alors les conditions initiales (tension initiale du condensateur et courant initial) n'affectent pas l'*amplitude* du courant en régime permanent.

(e) Une fonction périodique impaire ne contient aucun terme en cosinus mais peut contenir un terme constant.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – MAT265

EXAMEN FINAL DE PRATIQUE – PARTIE II

École de technologie supérieure — Version du 11.07.2024

DOCUMENTATION PERMISE

- Un résumé personnel de trois feuilles 8½ × 11, recto verso.
- Une table de règles et formules de dérivation et d'intégration (1 page).
- L'aide-mémoire d'algèbre et de trigonométrie (2 pages).
- la table de transformées de Laplace (2 pages) et la table de séries de Fourier (2 pages).
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre sur le questionnaire (de l'espace sera laissé en conséquence).
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (4 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE II (65 points)

---

(15) **1.** Un ressort a une constante de rappel de 4 N/m. On y suspend un objet ayant une masse de ½ kg. On considère une force d'amortissement avec un coefficient d'amortissement qui vaut 2 N·s/m. Une force extérieure est appliquée sur la masse, celle-ci est modélisée par $f(t) = 5\sin(t)u(t) + 16\delta(t-4)$ N . À $t = 0$, on descend l'objet 50 cm sous le point d'équilibre et on le relâche.

(a) En utilisant $g = 9.81$ m/s^2, déterminez l'étirement subi par le ressort lorsqu'on a accroché l'objet à son extrémité.

(b) Posez l'équation différentielle de ce système masse-ressort et trouvez $y(t)$, la position de l'objet à l'instant t. Utilisez la commande `solved()` de la librairie `ETS_specfunc` ou la fonction `ressort()` de la librairie `kit_ets_mb`.

(c) Dessinez une esquisse montrant bien la solution $y(t)$ dans les 30 premières secondes. *Ajustez la fenêtre pour voir la fonction dans l'intervalle* $-6 \le y \le 6$ et utilisez au besoin la commande `propfrac()` avant de faire votre graphique.

(d) Déterminez l'instant t où l'étirement du ressort sera maximal et donnez la valeur de cet étirement.

(e) Déterminez l'amplitude et la période du mouvement en régime permanent.

---

(15) **2.** Considérons un circuit électrique où sont branchés en série une résistance $R = 2\ \Omega$, une bobine $L = 0.25$ H et un condensateur $C = 0.01$ F et une source, en volt, donnée par $E(t) = 5\sin(2t)$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le courant commence à circuler. On considère que le condensateur a une tension initiale nulle. Les conditions initiales sont donc $v_C(0) = 0$ et $i(0) = 0$.

(a) Posez l'équation différentielle de ce circuit.

(b) Utilisez la commande `solved()` de la librairie `ETS_specfunc` ou la fonction `circuit_rlc()` de la librairie `kit_ets_mb` pour trouver la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$.

(c) Déterminez l'amplitude de $v_C(t)$ en régime permanent.

(d Déterminez l'amplitude du *courant* en régime permanent.

---

(15) **3.** Utilisez une série de puissances pour trouver la solution à cette équation différentielle :

$$\left(x^2-4\right)y'' + 2y' + 5y = 0, \quad \text{avec} \quad y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = 3\,.$$

(a) Donnez la formule de récurrence qui permet de calculer les coefficients de la série.

(b) Exprimer la solution en développant la série avec les 5 premiers coefficients non-nuls en donnant votre réponse sous forme exacte.

(c) Déterminez l'intervalle de convergence de la série.

(d) Évaluez $y(1.4)$ en utilisant la solution trouvée en **(b)**.

(e) Améliorez la précision de votre évaluation de $y(1.4)$ en utilisant maintenant un polynôme d'ordre 10, ensuite d'ordre 20 et finalement d'ordre 30. Utilisez l'éditeur de suites ou la fonction `seqGen()`.

(f) Avec Runge-Kutta (BS23), donnez l'estimé demandé avec la tolérance d'erreur tol = 0,001 (la valeur par défaut) et également avec tol = 0,0001 et tol = 0,00001.

Paramètres pour Runge-Kutta (BS23) sur la TI-Nspire
Tolérance d'erreur : Utilisez les valeurs demandées Champ : Aucun Début de tracé : 0 Fin de tracé : 2 Pas de tracé : 0.1

---

(20) **4.** Soit la fonction $f(x)$, périodique de période 2. Son graphique est illustré à la figure 1.

(a) Calculez les **coefficients de Fourier** de cette fonction périodique en utilisant les formules intégrales.

(b) Écrivez la série de Fourier pour la fonction $f(x)$ avec les 5 premiers termes non nuls de la série.

(c) À l'aide de la **table de séries de Fourier**, trouvez encore la série de Fourier de la fonction $f(x)$.

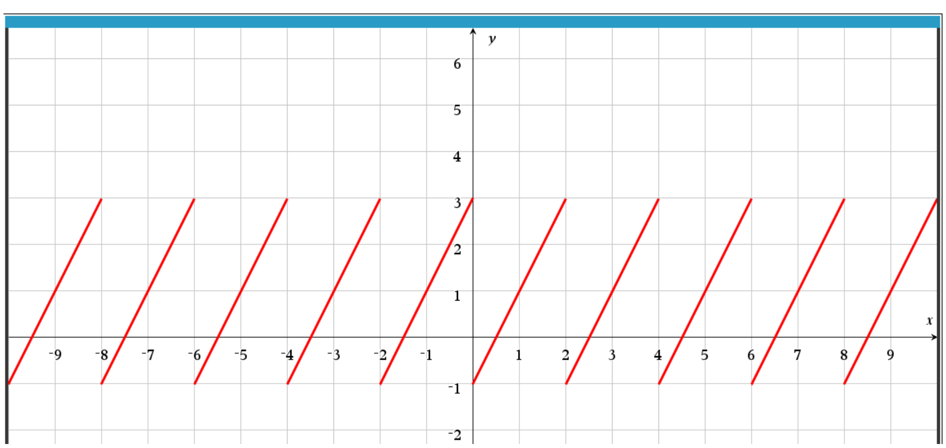

FIGURE 1 – Fonction périodique $f(x)$ de la question 7

Bon examen!