

## A.5 Table des séries de base

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + \dots \quad u \in ]-1; 1[$$

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \dots \quad u \in ]-\infty; \infty[$$

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \frac{u^9}{9!} - \dots \quad u \in ]-\infty; \infty[$$

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \frac{u^8}{8!} - \dots \quad u \in ]-\infty; \infty[$$

$$\arctan(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} - \dots \quad u \in ]-1; 1[$$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \dots \quad u \in ]-1; 1[$$

$$(1+u)^k = 1 + \frac{k}{1!}u + \frac{k(k-1)}{2!}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}u^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}u^n + \dots \quad u \in ]-1; 1[$$

### Test du rapport

Soit la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

On calcule le rapport  $R$  entre deux termes successifs de la série lorsque  $n \rightarrow \infty$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

et on en conclut que

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  converge si  $R < 1$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  diverge si  $R > 1$
3. on ne peut rien conclure si  $R = 1$ .

Lorsque  $R < 1$ , le test du rapport nous permet de déterminer l'intervalle de convergence d'une série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  où les termes  $u_n$  dépendent d'une variable  $x$ .