École de technologie supérieure
Service des enseignements généraux

MAT144
Introduction aux mathématiques du génie

Notes de cours

1re Partie

Par Kathleen Pineau
et Valérie Gouaillier

Rédigé en août 2017
Révisé en mai 2022

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Table des matières

Avant-propos

L'objectif de ce document est d'offrir un support pédagogique aux étudiants et aux enseignants du cours *Introduction aux mathématiques du génie* de l'École de technologie supérieure. Ce cours de mise à niveau mathématique vise à préparer l'étudiant pour ses études en génie et, en particulier, pour le cours de calcul différentiel et intégral qui suivra.

Ces notes de cours ont été développées de manière à rappeler de façon progressive les concepts de base du secondaire. On porte une attention particulière aux difficultés langagières, [1] et [4], par le biais d'exemples et d'exercices de reformulation ou qui demandent un va-et-vient entre différents langages : symbolique, graphique et numérique.

Il convient de préciser que, dans le cadre de ce cours, tous les étudiants et tous les enseignants travaillent avec le même outil technologique, la calculatrice TI-Nspire CX CAS ou son équivalent sur ordinateur, facilitant, de ce fait, le passage d'un langage à l'autre.

À l'étudiant

Dans ce document, les encadrés gris servent à attirer votre attention sur un aspect particulier du propos. Il s'agit d'une mise en valeur, d'une mise en garde, d'un rappel ou d'une consigne.

Dans les exemples, certaines actions sont laissées au lecteur (*faites-le*) pour vous encourager à agir en parallèle à votre lecture. À la fin des exemples, vous rencontrerez parfois *Validation.* où il est question de vérifier si le résultat est cohérent ou *Quoi écrire ?* qui illustre comment consigner par écrit un résultat obtenu à l'aide de la calculatrice.

Les exercices de musculation algébrique des chapitres 1, 2 et 3 sont de nature algébrique et de type drill (méthode d'entrainement basée sur la réalisation répétitive d'un même type d'exercices) sur les thèmes de la simplification, de la factorisation et de la résolution d'équations. Vous les faites après avoir fait ceux du chapitre, lorsque vous sentez le besoin de pratiquer davantage les techniques.

Si vous avez des commentaires ou des suggestions, faites-moi signe. Ils sont toujours appréciés.

Remerciements

Je voudrais remercier tous ceux et celles qui ont contribué à la réalisation de ces notes de cours.

En particulier, j'aimerais remercier Mme Valérie Gouaillier, maître d'enseignement, pour sa collaboration au recueil, par des échanges sur le contenu, sa contribution à des exemples et exercices, ainsi qu'à la révision de différentes versions de l'ouvrage.

Merci à Mme Karima Mahni, chargée de cours, pour les exercices de musculation algébrique. Je remercie aussi Mme Mahni, ainsi que Mme Annie Lacasse, maître d'enseignement, pour leur participation à la révision de certains chapitres.

Je suis reconnaissante à MM. Marc Boulé et Alain Hénault, maîtres d'enseignement en sciences, pour leur disponibilité et pour avoir inspiré ou validé les exemples et exercices relevant du génie et des sciences.

Finalement, j'aimerais remercier Mme Geneviève Savard, maître d'enseignement, d'avoir généreusement partagé le fruit de son travail. La facture de ces notes de cours découle du code qu'elle a produit pour celles de MAT145.

Logiciels

L'ensemble du document a été rédigé avec l'éditeur de texte TeXnicCenter et le logiciel MikTex, une version Windows du traitement de texte scientifique TEX de Donald Knuth et de son préprocesseur LATEX de Leslie Lamport. La plupart des graphiques ont été produits à l'aide du gratuiciel GeoGebra ou directement en LATEX à l'aide de PSTricks.

Kathleen Pineau, Maître d'enseignement, mai 2022

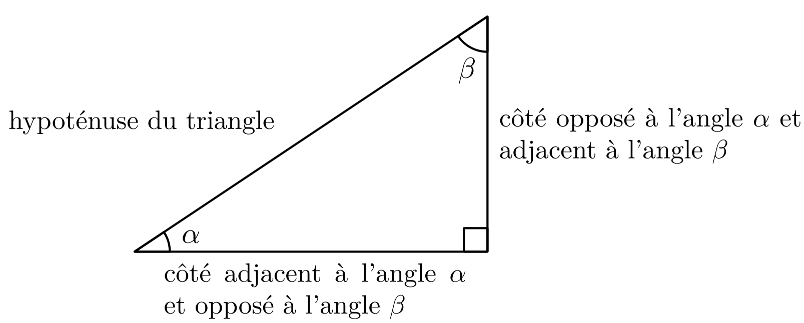
Chapitre 8

Les fonctions trigonométriques

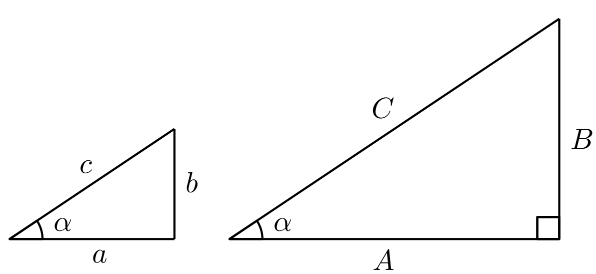
La trigonométrie (du grec trígonos, triangulaire, et métron, mesure) est une branche des mathématiques qui traite des relations entre les longueurs et les angles dans un triangle.

8.1 Les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle

On désigne les côtés d'un triangle rectangle en fonction de leur position par rapport aux angles. L'**hypoténuse** est le côté qui fait face à l'angle droit. Le **côté opposé** à un angle aigu est le côté qui lui fait face alors que le **côté adjacent** à cet angle est celui qui forme l'angle avec l'hypothénuse.



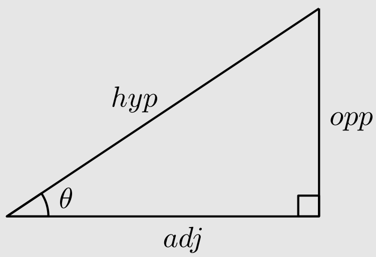
Depuis plus de 2000 ans, on sait que dans le plan, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et que deux triangles semblables ont des côtés correspondants proportionnels.



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

Ces propriétés des triangles semblables font en sorte que les rapports trigonométriques suivants ne dépendent que de l'angle et non du triangle rectangle dans lequel il est plongé.

Définition 8.1 Les rapports trigonométriques
Si on désigne par *hyp* la longueur de l'hypoténuse, par *opp* la longueur du coté opposé à l'angle θ et par *adj* la longueur du côté adjacent à l'angle θ, alors les six rapports trigonométriques sont donnés par les rapports suivants.



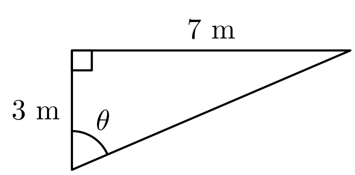
$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp} \qquad \cot(\theta) = \frac{adj}{opp} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

$$\cos(\theta) = \frac{adj}{hyp} \qquad \sec(\theta) = \frac{hyp}{adj} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{opp}{adj} \qquad \csc(\theta) = \frac{hyp}{opp} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Attention ! Les abréviations utilisées pour désigner les rapports trigonométriques de la tangente, de la cotangente et de la cosécante ne sont pas les mêmes en français qu'en anglais. En français, on note ces rapports par tg, cotg et cosec alors qu'en anglais on utilise tan, cot et csc. À des fins pratiques, l'auteure a priorisé la notation anglaise, que l'on retrouve dans la plupart des logiciels de calcul symbolique.

Exemple 8.1
Évaluez les six rapports trigonométriques de l'angle θ ci-dessous.



Solution :
L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit et, par Pythagore, on trouve que sa longueur est

$$\sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}62 \text{ m}.$$

Le côté opposé à l'angle θ est de 7 m et son côté adjacent est de 3 m. Ainsi,

$$\sin(\theta) = \frac{7 \cancel{\text{ m}}}{\sqrt{58} \cancel{\text{ m}}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \approx 0{,}919 \qquad \cos(\theta) = \frac{3 \cancel{\text{ m}}}{\sqrt{58} \cancel{\text{ m}}} = \frac{3\sqrt{58}}{58} \approx 0{,}394$$

$$\tan(\theta) = \frac{7 \cancel{\text{ m}}}{3 \cancel{\text{ m}}} \approx 2{,}333 \qquad \cot(\theta) = \frac{3 \cancel{\text{ m}}}{7 \cancel{\text{ m}}} \approx 0{,}429$$

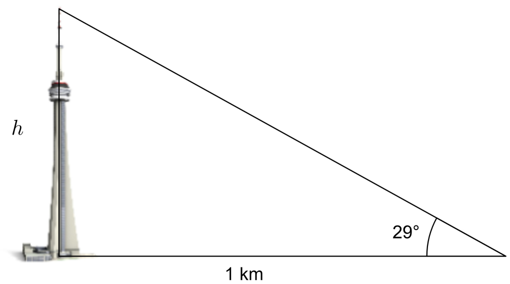
$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{58} \cancel{\text{ m}}}{3 \cancel{\text{ m}}} \approx 2{,}539 \qquad \csc(\theta) = \frac{\sqrt{58} \cancel{\text{ m}}}{7 \cancel{\text{ m}}} \approx 1{,}088$$

Attention ! Comme les unités se simplifient, on remarque que les rapports trigonométriques donnent des nombres réels sans unités.

On s'intéressera plus particulièrement au sinus, cosinus et à la tangente puisque les trois derniers rapports trigonométriques peuvent être obtenus facilement comme les inverses (sous la multiplication) des trois premiers.

Exemple 8.2

Lorsqu'on observe la tour du CN d'une distance de un kilomètre, l'angle d'élévation mesuré à partir du sol est de 29°. Déterminez, au mètre près, la hauteur de la tour.



Solution :

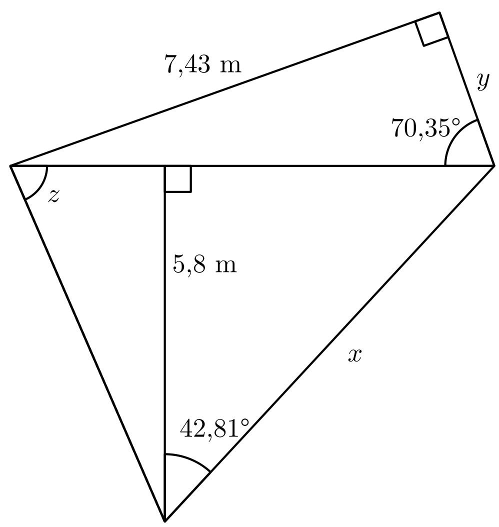
Puisqu'on cherche la longueur du côté opposé à l'angle de 29°, tout en connaissant la longueur de son côté adjacent, on utilise la tangente.

$$\tan(29°) = \frac{h \text{ km}}{1 \text{ km}}$$

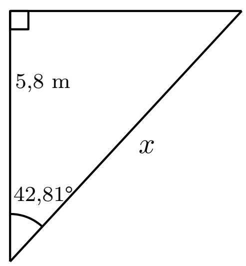
Ainsi, la hauteur cherchée est de h km $= \tan(29°) \cdot 1$ km $\approx 0{,}554$ km. La hauteur de la tour est donc d'environ 554 m.

Exemple 8.3

Déterminez les valeurs des inconnues x, y et z.



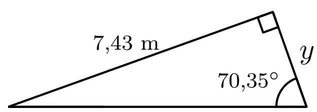
Solution :
On a toute l'information nécessaire pour déterminer la valeur x.



On cherche la longueur de l'hypoténuse, connaissant la longueur du côté adjacent à l'angle 42,81°. On utilise donc le cosinus.

$$\cos(42{,}81°) = \frac{5{,}8}{x} \iff x = \frac{5{,}8}{\cos(42{,}81°)} \approx 7{,}91 \text{ m}$$

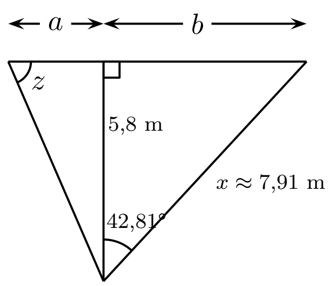
On peut aussi trouver y.



Avec un angle aigu et les deux côtés de l'angle droit, on utilise la tangente.

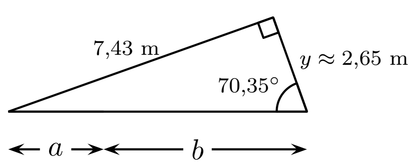
$$\tan(70{,}35°) = \frac{7{,}43}{y} \iff y = \frac{7{,}43}{\tan(70{,}35°)} \approx 2{,}65 \text{ m}$$

Pour trouver z, on utilise d'abord les deux triangles inférieurs et ensuite le triangle supérieur.



Posons a, la longueur du côté adjacent à l'angle z et b, la longueur du côté opposé à l'angle 42,81°. On utilise la tangente pour trouver b.

$$\tan(42{,}81°) = \frac{b}{5{,}8} \iff b = 5{,}8\tan(42{,}81°) \approx 5{,}37 \text{ m}$$

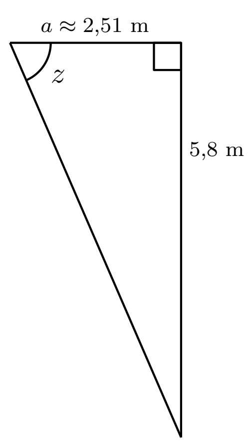


Pour trouver a, on doit déterminer la longueur totale de l'hypoténuse $a + b$ et lui soustraire la valeur $b \approx 5{,}37$ m.

$$\cos(70{,}35°) = \frac{y}{a+b} \iff a + b = \frac{y}{\cos(70{,}35°)} \approx \frac{2{,}65}{0{,}336} \approx 7{,}88 \text{ m}$$

Ainsi, $a \approx 7{,}88 - 5{,}37 \approx 2{,}51$ m.

On peut maintenant trouver la valeur z.



Puisqu'on connaît les longueurs des côtés adjacent et opposé à z,

$$\tan(z) \approx \frac{5{,}8}{2{,}51} \approx 2{,}31.$$

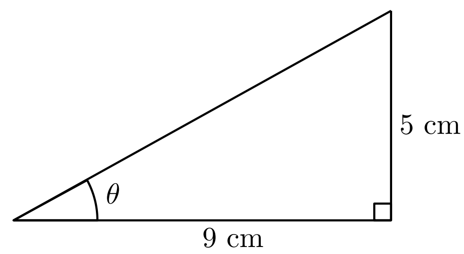
Pour trouver l'angle z dont la tangente est environ 2,31, on utilise la réciproque de la fonction tangente.

$$z = \tan^{-1}(2{,}31) \approx 66{,}5°$$

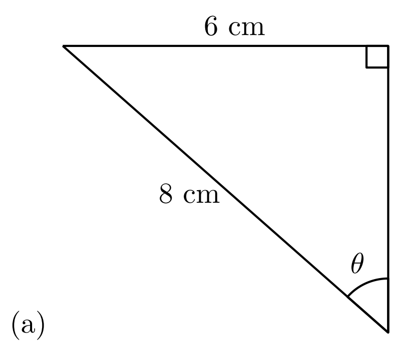
Les fonctions réciproques seront vues en détail à la section 8.5.

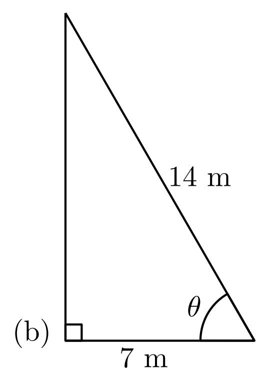
Exercices

8.1 Déterminez la longueur de l'hypoténuse du triangle ci-dessous et évaluez les six rapports trigonométriques de l'angle θ illustré. *Vous n'avez pas à déterminer cet angle,seulement à trouver les rapports trigonométriques qui s'y rapportent.*



8.2 Évaluez les trois rapports trigonométriques $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$ de l'angle θ illustré.

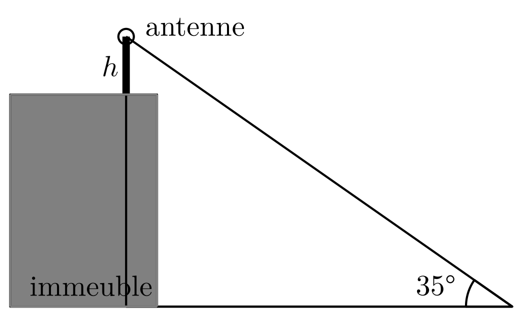




8.3 Montrez que les égalités suivantes sont bien fausses en calculant les valeurs impliquées à l'aide d'une calculatrice.

(a) $\sin(60°) \neq 2 \cdot \sin(30°)$ (b) $\dfrac{\tan(60°)}{\tan(30°)} \neq \tan(2°)$ (c) $\sin^2(5°) \neq \sin(25°)$

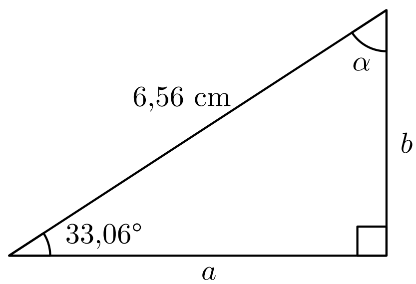
8.4 Une antenne est située sur le toit d'un immeuble de 55 m de hauteur. Un observateur situé à 92 m du pied de l'immeuble mesure un angle de 35° entre la base de l'immeuble et le haut de l'antenne. Sachant que l'antenne est située à 8 m du bord de l'immeuble, déterminez la hauteur h de l'antenne.



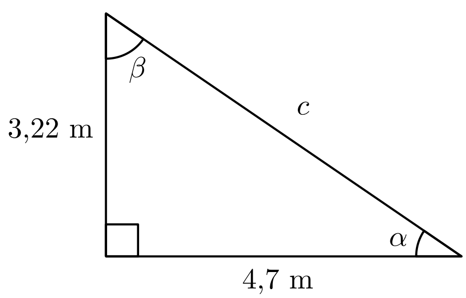
8.5 Le plus haut pylône d'Hydro Québec, qui s'élève de 175 m, traverse le fleuve Saint-Laurent près de la centrale Tracy. À quelle distance doit-on l'observer afin que l'angle d'élévation mesuré à partir du sol soit de 30° ?

8.6 Résolvez le triangle suivant pour a, b et α.

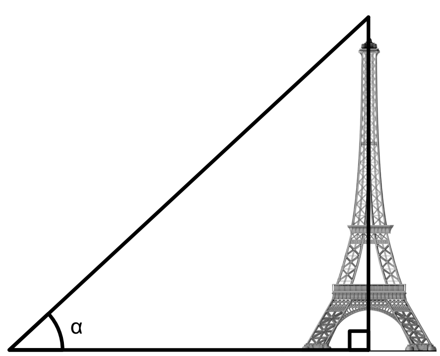
> **Attention !** Résoudre un triangle consiste à déterminer toutes les longueurs des côtés et mesures d'angles à partir des longueurs et des mesures connues.



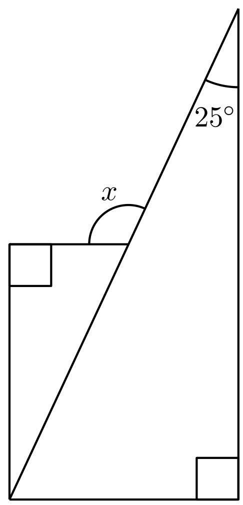
8.7 Résolvez le triangle suivant pour c, α et β.



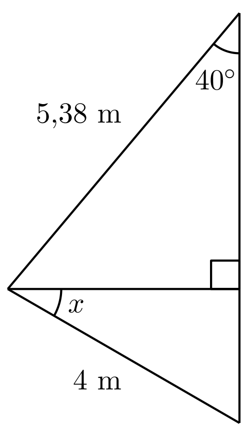
8.8 En voyage à Paris, vous observez la tour Eiffel à une distance de 350 m. La tour Eiffel a une hauteur de 324 m. Quel est l'angle d'élévation α de la tour si on le mesure à partir du sol ?



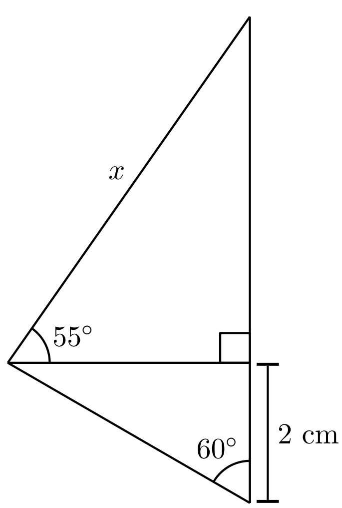
8.9 Déterminez la valeur inconnue x.



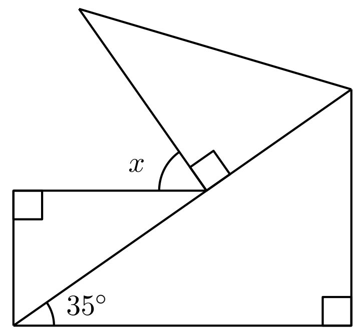
(a)



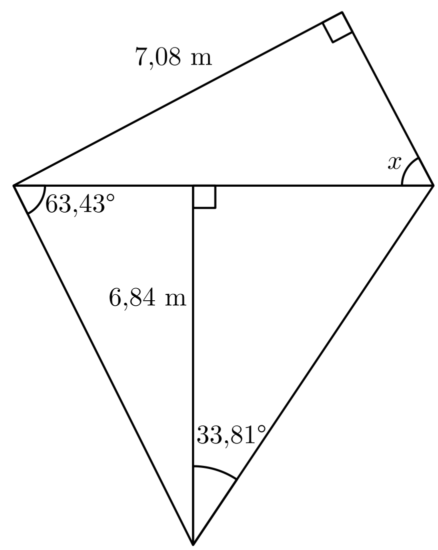
(b)



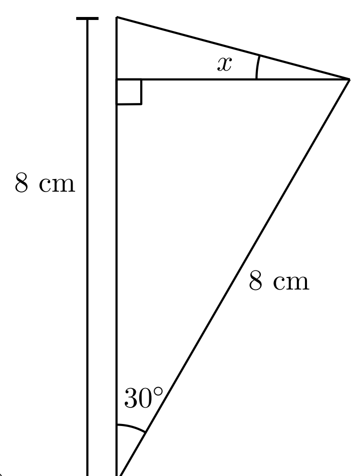
(c)



(d)

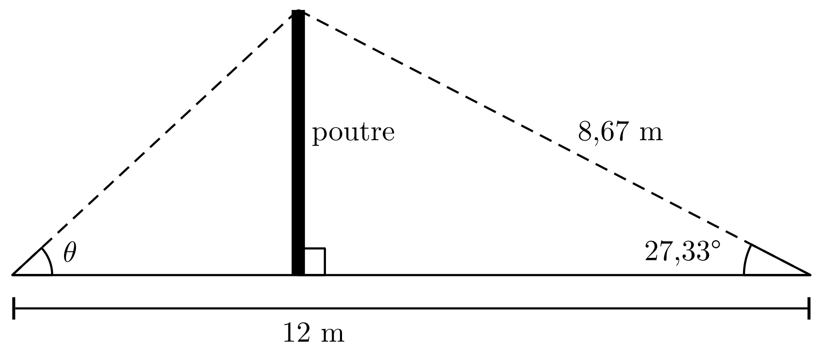


(e)

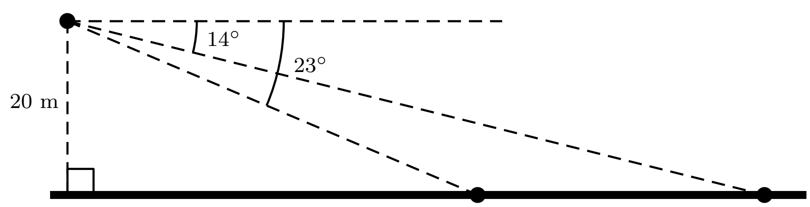


(f)

8.10 On attache des câbles qui serviront de haubans selon le croquis suivant. Déterminez la valeur de l'angle θ.

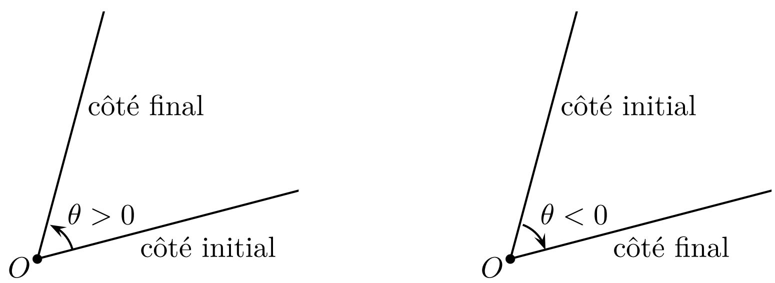


8.11 Un arpenteur géomètre aperçoit deux points directement devant lui. Ces deux points sont à une distance de 20 m en dessous du point d'observation. Quelle est la distance qui sépare les deux points si les angles de dépression sont respectivement 14° et 23° ?



8.2 Les unités de mesure d'angles

Un angle est caractérisé par deux demi-droites de même sommet O. Afin de déterminer la mesure de cet angle, il est pratique de considérer qu'une des demi-droites est engendrée par la rotation de l'autre autour du sommet O. La mesure de l'angle est représenté par un nombre positif si la rotation s'effectue dans le sens antihoraire et par un nombre négatif si la rotation s'effectue dans le sens horaire.



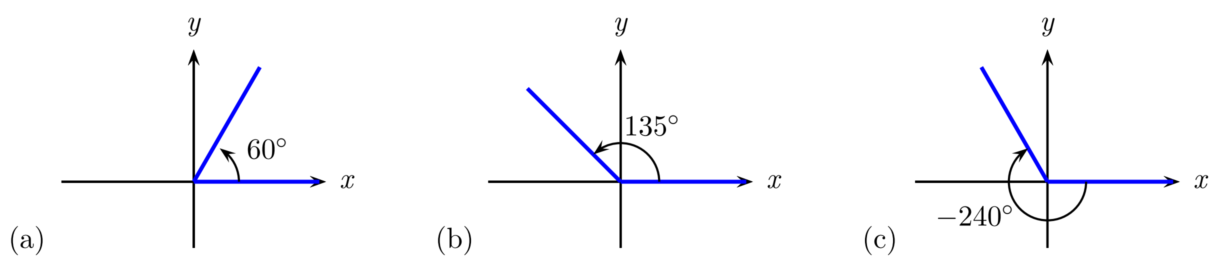
Dans un système de coordonnées rectangulaires, un angle est dit en **position standard** si son sommet est situé à l'origine et son côté initial est placé le long de l'axe horizontal.

Exemple 8.4

Représentez chacun des angles suivants en position standard dans le plan cartésien.

(a) $60°$ (b) $135°$ (c) $-240°$

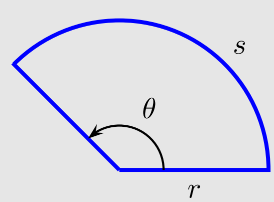
Solution :



Les unités de mesure d'angles les plus couramment utilisées sont les degrés et les radians.

Définition 8.2 La mesure d'un angle en **radians** est définie comme le rapport entre la longueur de l'arc du cercle (notée s) et la longueur du rayon de ce cercle (notée r), où chacune de ces longueurs est exprimée dans la même unité. Par conséquent, lorsqu'on divise s par r pour obtenir la mesure en radians de l'angle, les unités des deux longueurs se simplifient et on se retrouve avec une mesure qui n'a pas d'unités.

$$\theta = \frac{s}{r}$$



Exemple 8.5

Déterminez la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon r qui intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur s donnée. Illustrez.

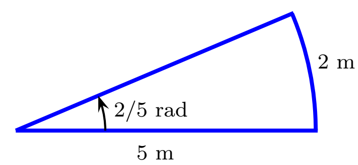
(a) $r = 5$ m et $s = 2$ m (b) $r = 12$ m et $s = 12$ m (c) $r = 5$ cm et $s = 22$ cm

Solution :

(a) Selon la définition, la mesure de l'angle en radians est

$$\frac{s}{r} = \frac{2\ \cancel{\text{m}}}{5\ \cancel{\text{m}}} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \text{ rad.}$$

Puisque les mètres se simplifient, rad nous rappelle simplement qu'il s'agit d'un angle.

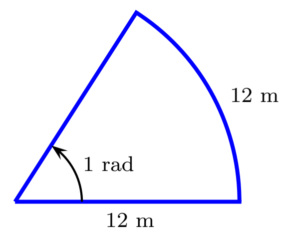


(b) La mesure de l'angle en radians est

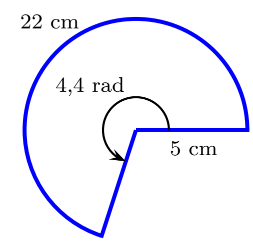
$$\frac{s}{r} = \frac{12\ \cancel{\text{m}}}{12\ \cancel{\text{m}}} = 1 \text{ rad.}$$

Lorsque la longueur de l'arc est égale à celle du rayon, l'angle au centre est

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ rad} = \frac{r}{r} \text{ rad} = 1 \text{ rad.}$$

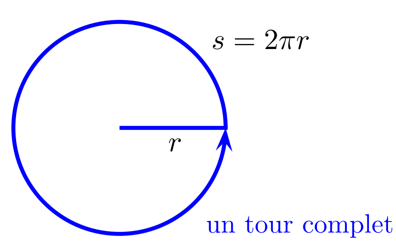


(c) $\dfrac{s}{r} = \dfrac{22\ \cancel{\text{cm}}}{5\ \cancel{\text{cm}}} = 4{,}4$ rad



Lorsque la longueur de l'arc s correspond à la circonférence d'un cercle de rayon r, $s = 2\pi r$ et l'angle correspondant est de 360° ou 2π rad.

$$360° = \frac{2\pi r}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi \text{ rad}$$



On en déduit qu'il y a $\frac{180}{\pi}^{\circ} \approx 57°$ dans un radian.

$$2\pi \text{ rad} = 360° \iff 1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi}^{\circ} \iff 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}^{\circ} \approx 57°$$

Et, qu'il y a $\frac{\pi}{180}$ rad $\approx 0{,}1745$ rad dans 1°.

$$360° = 2\pi \text{ rad} \iff 1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \iff 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}1745 \text{ rad}$$

Exemple 8.6

Exprimez en radians chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la quatrième décimale.

(a) $45°$ (b) $270°$ (c) $-60°$ (d) $52°$

Solution :

On utilise l'égalité $\boxed{1° = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad}}$ pour traduire les mesures d'angles de degrés à radians.

(a) $45° = 45 \cdot 1° = 45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{45\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \approx 0{,}7854 \text{ rad}$

(b) $270° = 270 \cdot 1° = 270 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{270\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \approx 4{,}7124 \text{ rad}$

(c) $-60° = -60 \cdot 1° = -60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{60\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} \approx -1{,}0472 \text{ rad}$

(d) $52° = 52 \cdot 1° = 52 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{52\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{45} \text{ rad} \approx 0{,}9076 \text{ rad}$

Exemple 8.7

Exprimez en degrés chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront parfois en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la deuxième décimale.

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{3\pi}{4}$ (c) -3π (d) 3

Solution :

On utilise l'égalité $\boxed{1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}}$ pour traduire les mesures d'angles de radians à degrés.

(a) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} = 150°$

(b) $-\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = -\frac{3\pi}{4} \cdot 1 \text{ rad} = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -135°$

(c) $-3\pi \text{ rad} = -3\pi \cdot 1 \text{ rad} = -3\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = -540°$

(d) $3 \text{ rad} = 3 \cdot 1 \text{ rad} = 3 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{540°}{\pi} \approx 171{,}89°$

La figure 8.1 de la page 13, montre des angles très utilisés en trigonométrie qu'on appelle les angles remarquables. Ils sont représentés en position standard et sont donnés à la fois en degrés et en radians.

Pourquoi utiliser les radians lorsqu'on connaît les degrés ?

Lorsqu'on connaît le rayon d'un mouvement circulaire, la définition du radian permet de traduire la mesure d'un angle en une longueur :

$$\theta = \frac{s}{r} \Longleftrightarrow s = r\theta$$

Exemple 8.8

Un satellite de communication est à 35 920 km en altitude et demeure au-dessus d'un point de l'équateur. Si le rayon de la Terre est environ 6 371 km, quelle est la vitesse du satellite ?

Solution :
Pour que le satellite demeure au-dessus du même point de l'équateur, il doit faire le tour de la Terre une fois par 24 heures (en plus de rester à la même altitude). Puisqu'il y a 2π rad dans un tour et que le rayon du cercle décrivant le mouvement du satellite est $6\,371 + 35\,920 = 42\,291$ km, le satellite parcourt

$$2\pi \text{ rad} \cdot (6\,371 + 35\,920) \text{ km} = 2\pi \text{ rad} \cdot 42\,291 \text{ km} \approx 265\,722 \text{ km}.$$

La vitesse du satellite est alors $\frac{265\,722 \text{ km}}{24 \text{ h}} \approx 11\,071{,}8$ km/h.

Une approche générale
La vitesse moyenne d'un objet est donnée par $v = s/t$ où s est la distance parcourue et t est le temps de parcours. Lorsqu'un objet a un mouvement circulaire, la distance parcourue correspond à la longueur de l'arc du cercle tracé par le déplacement. Ainsi, en divisant les deux membres de l'équation $s = r\theta$ par t on obtient

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = \frac{\theta}{t} \cdot r,$$

où $\frac{\theta}{t}$ est la *vitesse angulaire*. On la désigne habituellement par ω.
Puisque $\omega = \frac{\theta}{t}$,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = \frac{\theta}{t} \cdot r \iff v = \omega r.$$

La vitesse linéaire est donc obtenue en effectuant le produit de la vitesse angulaire avec le rayon du mouvement.
Dans cet exemple, puisqu'il y a 2π rad dans chacun des tours, la vitesse angulaire du satellite est

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}} \approx 0{,}2618 \text{ rad/h},$$

et sa vitesse linéaire est

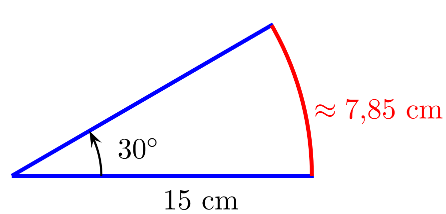
$$0{,}2618 \text{ rad/h} \cdot 42\,291 \text{ km} \approx 11\,071{,}8 \text{ km/h}.$$

Exemple 8.9
Déterminez la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle de rayon donné par chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes et ensuite, arrondies à la deuxième décimale. Illustrez en dessinant l'arc correspondant à la mesure de l'angle.

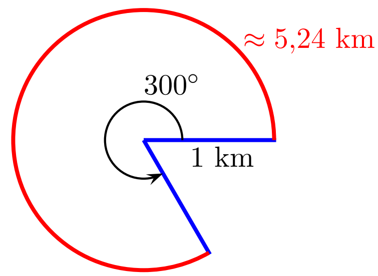
(a) Rayon = 15 cm et $\theta = 30°$
(b) Rayon = 1 km et $\theta = 300°$

Solution :

(a) $30° = \frac{\pi}{6}$ rad, la longueur de l'arc est donc $s = r \cdot \theta = (15 \text{ cm}) \cdot (\frac{\pi}{6} \text{ rad}) = \frac{5\pi}{2}$ cm $\approx 7{,}85$ cm.



(b) $300° = \frac{5\pi}{3}$ rad, la longueur de l'arc est donc $s = r \cdot \theta = (1 \text{ km}) \cdot (\frac{5\pi}{3} \text{ rad}) \approx 5{,}24$ km.



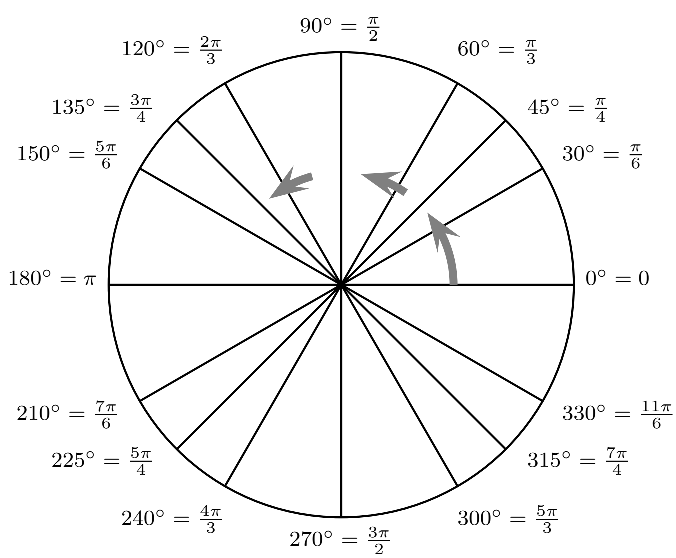


FIGURE 8.1 – Angles remarquables

Exercices

8.12 Représentez chacun des angles suivants en position standard dans le plan cartésien.

(a) 45° (b) 210° (c) 390° (d) −170°

8.13 Trouvez un angle entre 0° et 360° dont le côté final est identique à celui de l'angle donné. *On suppose que tous les angles sont en position standard.*

(a) 390° (b) −225° (c) 480° (d) −60°

8.14 Déterminez la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon r qui intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur s donnée. Illustrez.

(a) $r = 15$ cm et $s = 45$ cm
(b) $r = 5$ m et $s = 30$ m
(c) $r = 8$ mm et $s = 12$ mm
(d) $r = 1$ km et $s = 300$ m

8.15 Exprimez en radians chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la quatrième décimale.

(a) $30°$ (b) $120°$ (c) $180°$ (d) $-225°$ (e) $15°$ (f) $-98°$

8.16 Exprimez en degrés chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront parfois en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la deuxième décimale.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{11\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{5}$ (e) 10 (f) $-5{,}2$

8.17 Déterminez la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle de rayon donné par chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes et ensuite, arrondies à la deuxième décimale. Illustrez en dessinant l'arc correspondant à la mesure de l'angle.

(a) Rayon $= 5$ m et $\theta = 135°$
(b) Rayon $= 8$ mm et $\theta = 240°$

8.18 Lorsqu'un pneu de vélo de 650 mm de diamètre extérieur tourne de $120°$ autour de son centre, le vélo avance de quelle distance ?

8.19 Une section de voie ferrée circulaire doit tourner de $15°$ sur une distance de 10 km. Quel est le rayon de la voie ?

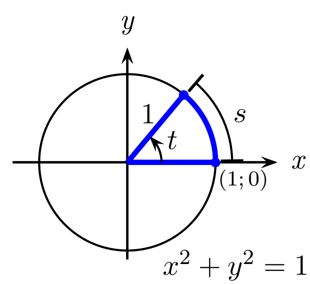
8.20 Les pales d'une éolienne mesurent 28 m et tournent à une vitesse de 2 tours/min.

(a) Quelle est la vitesse linéaire d'un point situé à l'extrémité d'une des pales ?
(b) Quelle est la vitesse linéaire d'un point situé à 10 m du centre du système de pales ?
(c) Calculez le rapport entre les vitesses trouvées en (a) et en (b). Pouvez-vous généraliser ce résultat ?

8.3 Le cercle trigonométrique

Afin de généraliser les rapports trigonométriques vus au début du chapitre, on utilise le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré à l'origine dans le plan cartésien. Ce cercle ainsi qu'un angle t en position standard sont illustrés ci-dessous.

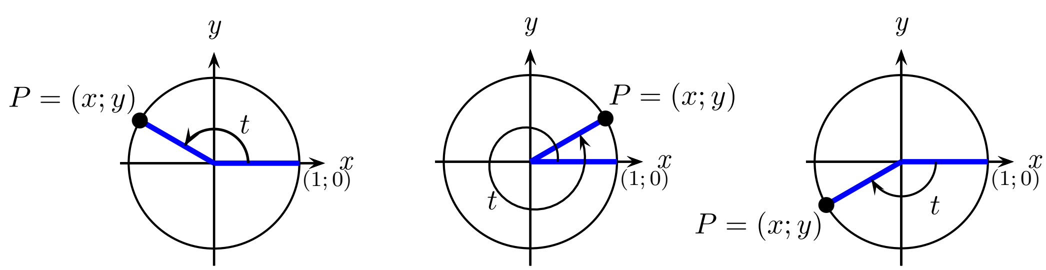


Dans le cercle trigonométrique, la mesure de l'angle en radians est égale à la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle. En effet, on peut utiliser la formule $s = r \cdot \theta$ vue à la section précédente pour s'en convaincre. En posant $\theta = t$, on trouve

$$s = r \cdot t = 1 \cdot t = t.$$

La longueur de l'arc sur le cercle trigonométrique et la mesure de l'angle en radians sont donc représentés par le même nombre réel.

À un angle t correspond un unique point $P(t) = (x; y)$ sur le cercle tel que $x^2 + y^2 = 1$.



En particulier, les points trigonométriques remarquables illustrés à la figure 8.2, sont les points associés aux angles remarquables de la figure 8.1.

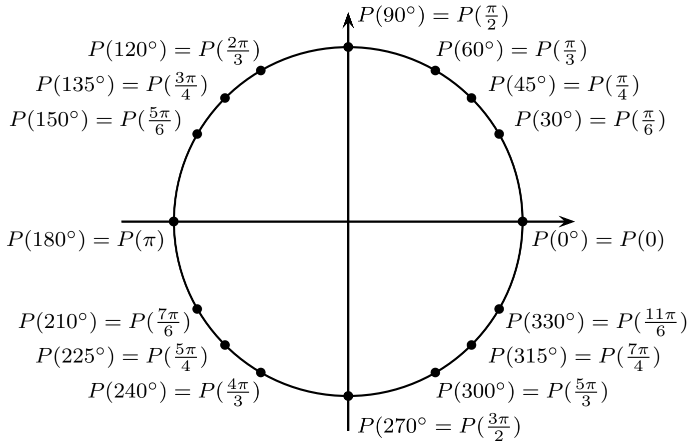


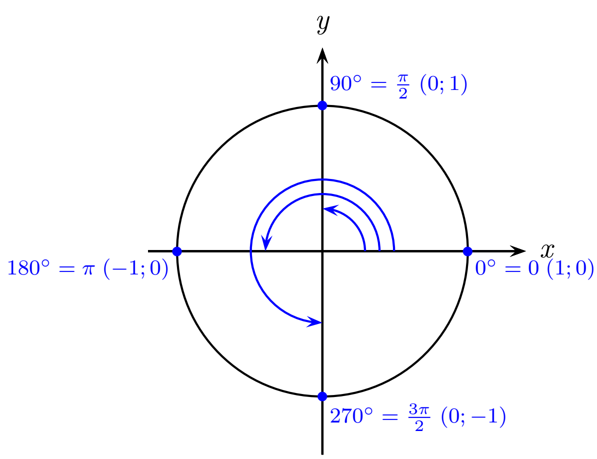
Figure 8.2 – Points remarquables sur le cercle trigonométrique

Exemple 8.10

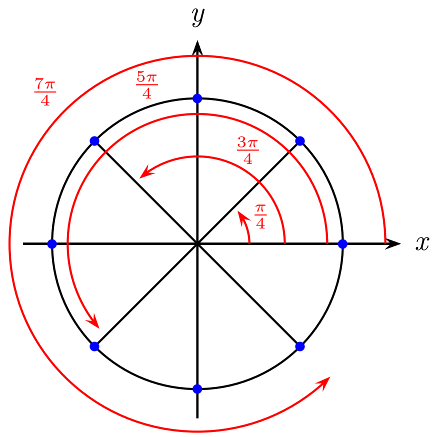
Déterminez les coordonnées de tous les points trigonométriques remarquables.

Solution :

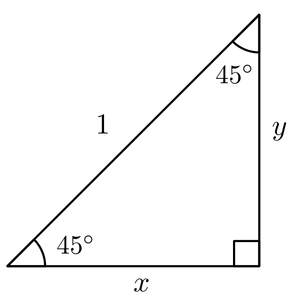
Le cercle trigonométrique est divisé en 8 arcs de même longueur qui correspondent aux angles remarquables $0° = 0$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $135° = \frac{3\pi}{4}$, $180° = \pi$, $225° = \frac{5\pi}{4}$, $270° = \frac{3\pi}{2}$ et $315° = \frac{7\pi}{4}$. Se rappelant que le cercle trigonométrique est centré en $(0;0)$ et est de rayon 1, on trouve facilement les coordonnées des points aux intersections avec les axes.



Pour trouver les coordonnées des points correspondants aux autres multiples de $45° = \frac{\pi}{4}$,

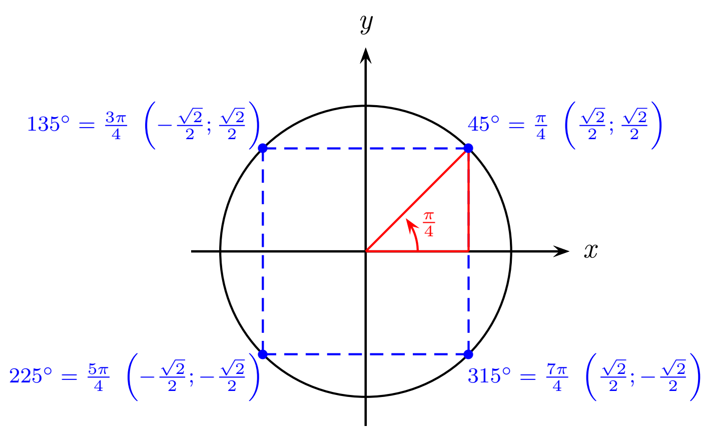


on considère le triangle isocèle dont l'hypoténuse est de longueur 1.

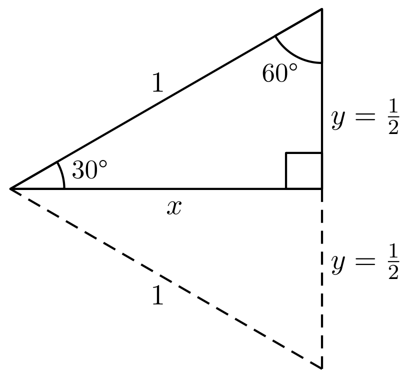


$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 1 && \text{par Pythagore}\\
x^2 + x^2 &= 1 && \text{on substitue } y = x\\
2x^2 &= 1 && \text{on réduit}\\
x &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} && \text{on résout pour } x \text{, sachant que } x > 0\\
x &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} && \text{on rationalise le dénominateur,}\\
& && \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Par symétries, on en déduit les coordonnées des points $P(45°) = P\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $P(135°) = P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $P(225°) = P\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ et $P(315°) = P\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ illustrés ci-dessous.

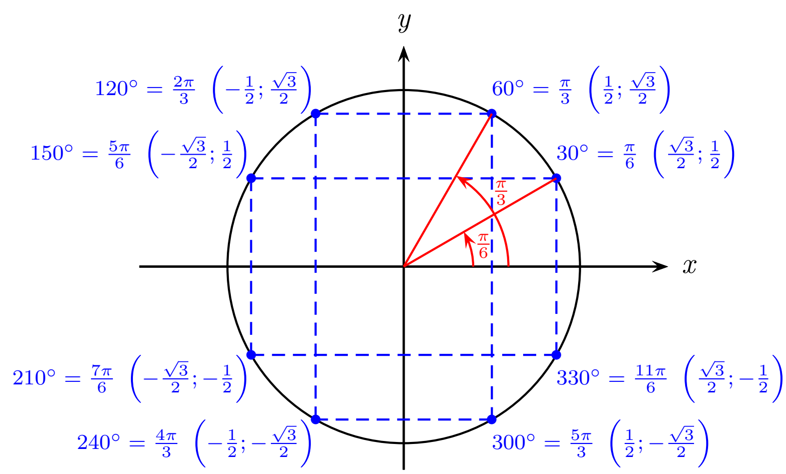


Le cercle trigonométrique est aussi divisé en 12 arcs de même longueur qui correspondent aux angles remarquables 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ et 2π. Les coordonnées manquantes se déduisent de $P(30°) = P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $P(60°) = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Pour déterminer les coordonnées des points $P(30°) = P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $P(60°) = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on considère le triangle équilatéral suivant.



$$\begin{aligned}
x^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= 1 && \text{on utilise le théorème de Pythagore}\\
x^2 + \tfrac{1}{4} &= 1 && \text{on évalue le carré}\\
x^2 &= \tfrac{3}{4} && \text{on isole } x^2\\
x &= \sqrt{\tfrac{3}{4}} && \text{on résout pour } x \text{, sachant que } x > 0\\
x &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} && \text{on applique le radical sur la fraction}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(30°) = P\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ et $P(60°) = P\left(\frac{\pi}{3}\right) = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$. Par symétries, on obtient les coordonnées des autres points.



Toutes les coordonnées correspondantes aux angles remarquables sont regroupées à la figure 8.3.

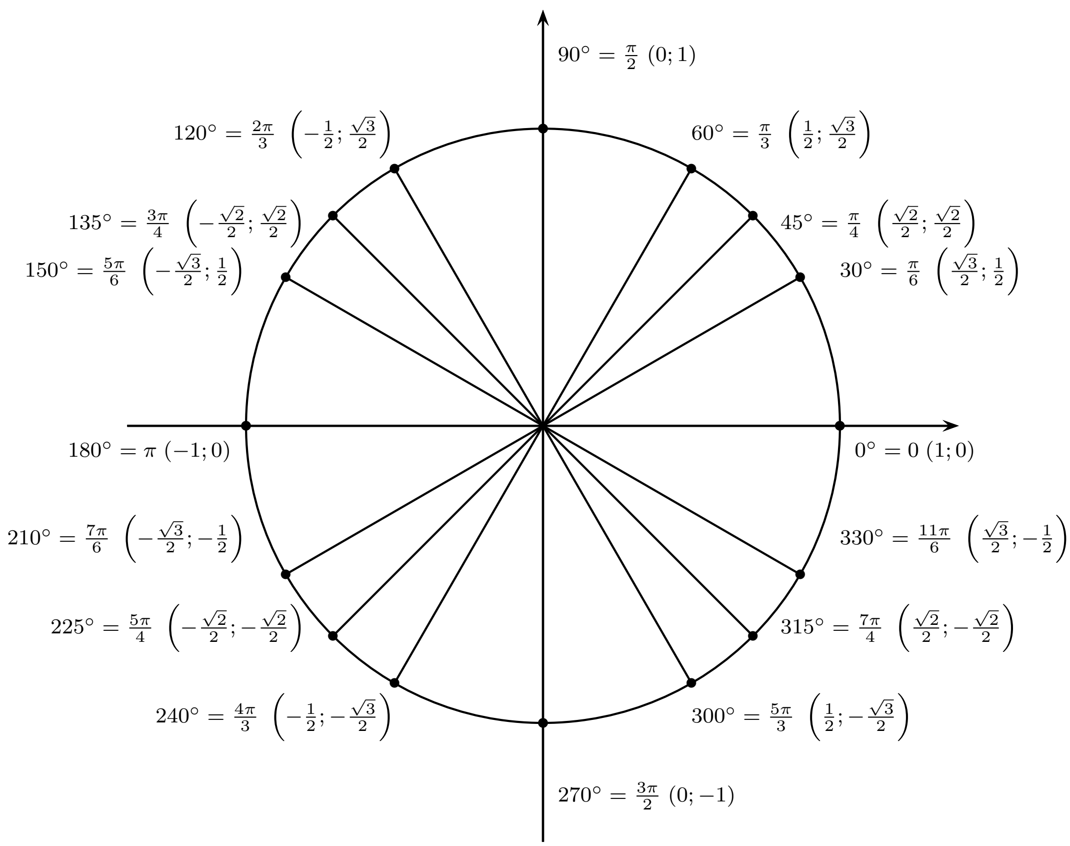


FIGURE 8.3 – Le cercle trigonométrique

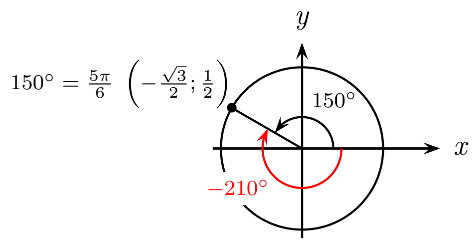
Exemple 8.11

Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les coordonnées du point P aux valeurs d'angles données.

(a) $t = -210°$ (b) $t = -\frac{\pi}{3}$ (c) $t = \frac{11\pi}{4}$

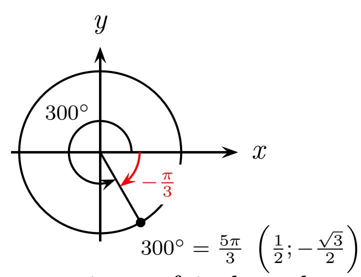
Solution :

(a) Étant négatif, $-210°$ signifie que la rotation s'effectue dans le sens horaire. Il s'agit d'un angle dont le côté final est identique à celui de l'angle remarquable $150°$. Les coordonnées du point sont donc $P(-210°) = P(150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

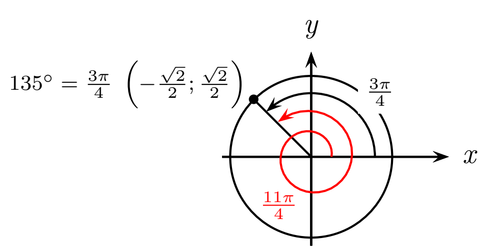


Attention ! Les coordonnées des points sont identiques $P(-210°) = P(150°)$, mais les angles ne le sont pas, $-210° \neq 150°$.

(b) L'angle étant négatif, $t = -\frac{\pi}{3} = -60°$, la rotation se fait dans le sens horaire. Il s'agit d'un angle dont le côté final est identique à celui de l'angle remarquable $\frac{5\pi}{3} = 300°$. Les coordonnées du point sont donc $P\left(-\frac{\pi}{3}\right) = P(-60°) = P(300°) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



(c) L'angle est positif, $t = \frac{11\pi}{4} = 495°$, la rotation se fait donc dans le sens antihoraire. Il s'agit d'un angle dont le côté final est identique à celui de l'angle remarquable $\frac{3\pi}{4} = 135°$. Les coordonnées du point sont donc $P(\frac{11\pi}{4}) = P(495°) = P(135°) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



À un angle t correspond un unique point $P(t) = (x; y)$ sur le cercle trigonométrique, mais un point du cercle trigonométrique peut correspondre à un nombre infini d'angles différents.

Exemple 8.12

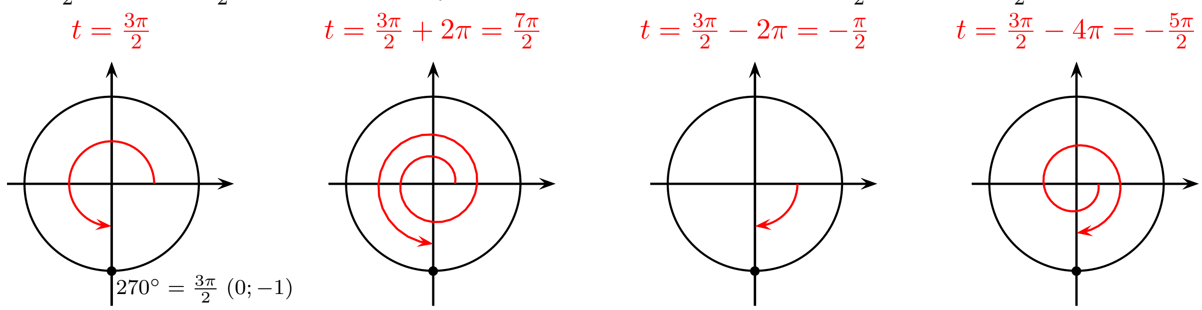
Trouvez quatre valeurs d'angle $t \in \mathbb{R}$ dont le côté final passe par le point donné.

(a) $P(t) = (0; -1)$ (b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

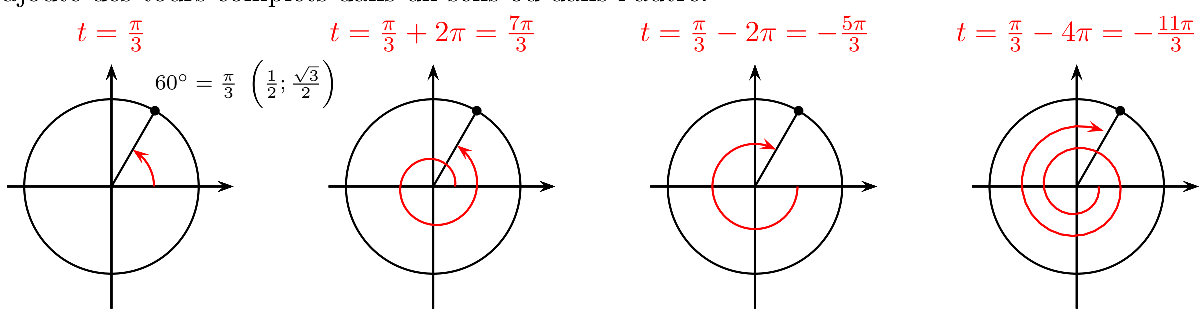
Solution :

Il y a nombre infini d'angles qui ont le même côté final.

(a) Directement du cercle trigonométrique, on trouve $t = \frac{3\pi}{2}$. Pour obtenir d'autres angles, on peut ajouter une rotation d'un tour complet dans un sens $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2}$, ou dans l'autre $t = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$. On peut aussi y soustraire plus d'un tour, $t = \frac{3\pi}{2} - 4\pi = -\frac{5\pi}{2}$.



(b) On trouve d'abord $t = \frac{\pi}{3}$ à partir du cercle trigonométrique. Pour obtenir d'autres angles, on ajoute des tours complets dans un sens ou dans l'autre.



Quatre des angles possibles sont donc $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{7\pi}{3}$, $t = -\frac{5\pi}{3}$ et $t = -\frac{11\pi}{3}$.

Comme on vient de le voir, à un angle t correspond un unique point $P(t) = (x; y)$ sur le cercle trigonométrique, mais à un point du cercle trigonométrique peut correspondre un nombre infini d'angles différents. Il suffit de parcourir le cercle en faisant un certain nombre de tours complets dans un sens ou dans l'autre à partir du point P. On utilise alors la notation

$$P(t) = P(t + k \cdot 2\pi) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Dans cette notation, $k \in \mathbb{Z}$ est un compteur de tours, c'est-à-dire que le côté final de l'angle fait un tour complet dans le sens antihoraire lorsque k est positif, et horaire lorsque k est négatif. C'est d'ailleurs pour cette raison que les fonctions trigonométriques, que l'on verra à la prochaine section, sont aussi appelées des *fonctions circulaires*.

Exercices

8.21 Déterminez la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle trigonométrique par chacun des angles suivants.

(a) $\theta = 30°$ (b) $\theta = 300°$ (c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (d) $\theta = 4$

8.22 Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle remarquable t, déterminez les coordonnées du point P aux valeurs d'angles données.

(a) $t = \frac{\pi}{3}$ (c) $t = \frac{7\pi}{4}$ (e) $t = -\frac{5\pi}{4}$

(b) $t = 270°$ (d) $t = \pi$ (f) $t = -510°$

8.23 Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle remarquable t, déterminez la valeur $t \in [0; 2\pi]$ satisfaisant l'énoncé.

Attention ! Lorsqu'on stipule $t \in [0; 2\pi]$, l'angle attendu est en radians.

(a) $P(t) = (1; 0)$ (c) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (e) $P(t) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (d) $P(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ (f) $P(t) = (0; 1)$

8.24 Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle remarquable t, déterminez la valeur $t \in [-2\pi; 0]$ satisfaisant l'énoncé.

(a) $P(t) = (-1; 0)$ (c) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (e) $P(t) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

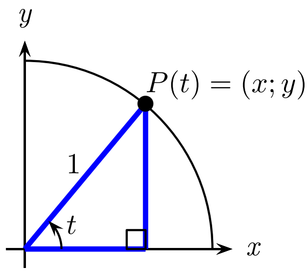
(b) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (d) $P(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ (f) $P(t) = (0; -1)$

8.25 Trouvez quatre valeurs d'angle $t \in \mathbb{R}$ dont le côté final passe par le point donné.

(a) $P(t) = (0; -1)$ (b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$

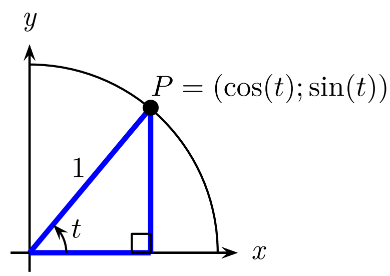
8.4 Les fonctions trigonométriques

Dans le cas où un angle t est aigu, on peut déterminer les coordonnées du point $P(t)$ sur le cercle trigonométrique à l'aide des rapports dans les triangles rectangles.



$$\cos(t) = \frac{adj}{hyp} = \frac{x}{1} = x$$
$$\sin(t) = \frac{opp}{hyp} = \frac{y}{1} = y$$

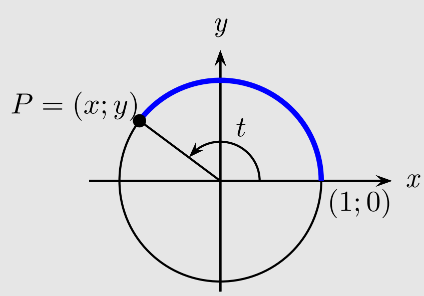
L'abscisse du point P est alors donnée par $\cos(t)$ et l'ordonnée par $\sin(t)$.



Les six rapports trigonométriques peuvent maintenant être interprétés en fonction des coordonnées du point correspondant sur le cercle trigonométrique, généralisant ainsi les rapports dans un triangle rectangle vus au début du chapitre.

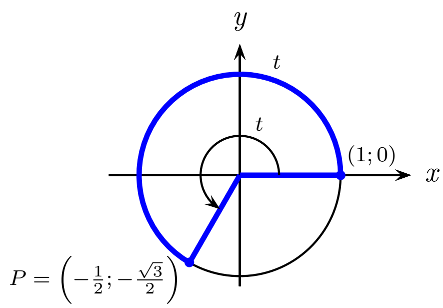
Définition 8.3 Si t est un nombre réel et $P(t) = (x; y)$ est un point sur le cercle trigonométrique correspondant à l'angle t, alors

$$\sin(t) = y \qquad \csc(t) = \frac{1}{y}, \text{ si } y \neq 0$$
$$\cos(t) = x \qquad \sec(t) = \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0$$
$$\tan(t) = \frac{y}{x}, \text{ si } x \neq 0 \qquad \cot(t) = \frac{x}{y}, \text{ si } y \neq 0$$



Exemple 8.13

Sachant que $P = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t déterminez les valeurs des six fonctions trigonométriques sans trouver l'angle t.



Solution :
L'abscisse de P correspond à $\cos(t)$ et son ordonnée à $\sin(t)$. On détermine la valeur des autres fonctions à l'aide de ces coordonnées.

$$\sin(t) = y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc(t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(t) = x = -\frac{1}{2} \qquad \sec(t) = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\tan(t) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot(t) = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exemple 8.14

À l'aide du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (c) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Solution :

(a) Le sinus d'un angle $t \in \mathbb{R}$ est l'ordonnée du point correspondant, $P(t)$, sur le cercle trigonométrique. Puisque $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Le cosinus d'un angle est l'abscisse du point correspondant, $P(t)$, sur le cercle trigonométrique. Puisque $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Puisque $\tan(t) = \dfrac{y}{x}$ et $P\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alors

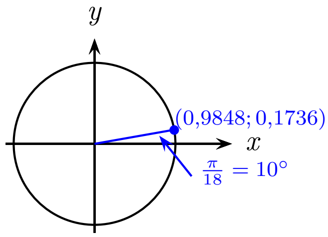
$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Exemple 8.15

Sachant que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx 0{,}1736$ et $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx 0{,}9848$, à l'aide du cercle trigonométrique et des arguments de symétrie, déterminez les valeurs suivantes.

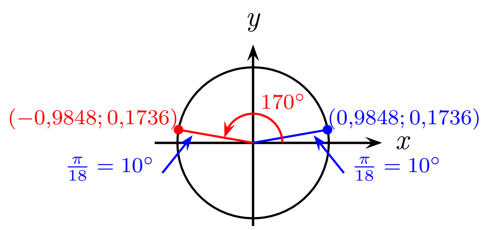
(a) $\sin(170°)$ (b) $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ (c) $\cos(-80°)$ (d) $\tan\left(\frac{5\pi}{9}\right)$

Solution :
Pour mieux s'y retrouver, on place l'information donnée dans le cercle trigonométrique et on convertit l'angle $\frac{\pi}{18}$ en degrés.

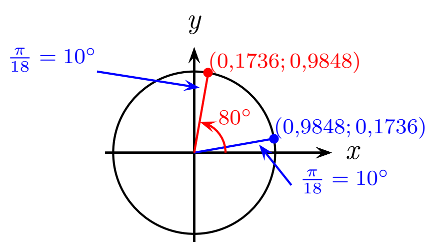


$$\frac{\pi}{18} \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 10^\circ$$

(a) Puisque $170^\circ = 180^\circ - 10^\circ$, $\sin(170^\circ) \approx 0{,}1736$.

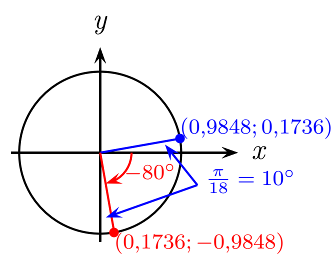


(b) On a $\frac{4\pi}{9}$ rad $= \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 80^\circ$.

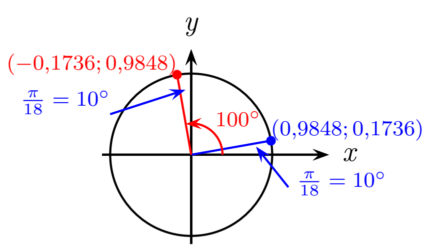


Puisque les coordonnées cherchées sont inversées par rapport à celles du point donné, $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \sin(80^\circ) \approx 0{,}9848$.

(c) On a $\cos(-80^\circ) \approx 0{,}1736$.



(d) On a $\frac{5\pi}{9}$ rad $= \frac{5\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 100^\circ$ et donc $\tan\left(\frac{5\pi}{9}\right) = \tan(100^\circ) \approx \frac{0{,}9848}{-0{,}1736} \approx -5{,}6728$.

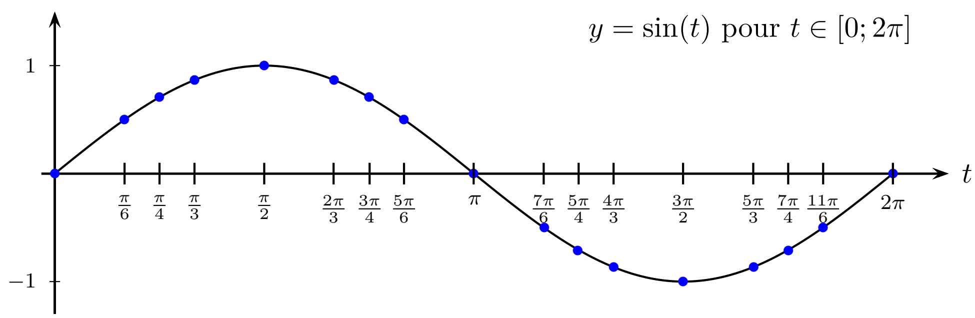


Le graphe de la fonction sinus

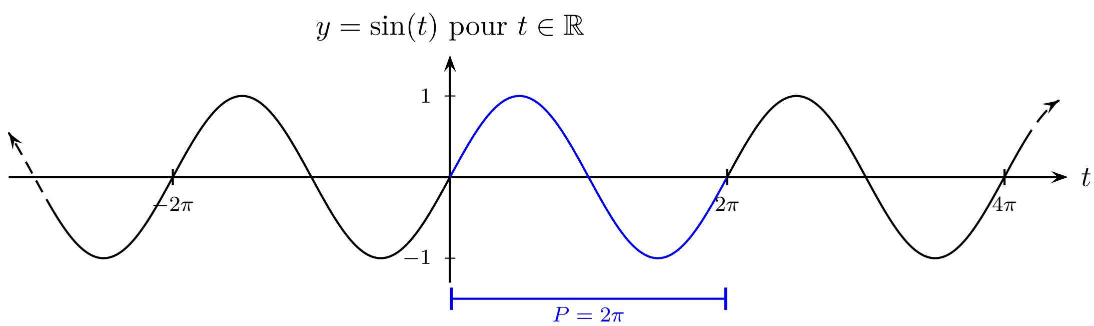
On trace le graphe de la fonction sinus, $y = \sin(t)$, à l'aide des couples $(t; y) = (t; \sin(t))$ évalués aux angles remarquables d'un tour complet du cercle trigonométrique pour $t \in [0; 2\pi]$. On place ensuite les couples obtenus dans le plan cartésien et on relie les points par une courbe lisse.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Attention ! L'ordonnée y du graphe de la fonction sinus est donnée par l'ordonnée du point correspondant à l'angle t du cercle trigonométrique.



Puisque les valeurs du sinus se répètent à chaque tour complet du cercle trigonométrique, que ce soit dans le sens horaire ou antihoraire, on complète le graphe de $\sin(t)$ en répétant la portion de la courbe obtenue pour $t \in [0; 2\pi]$ sur l'ensemble des réels.



Le graphe ci-dessus illustre les propriétés de la fonction sinus :

— $\text{Dom}(\sin(t)) = \mathbb{R}$,
— $\text{Im}(\sin(t)) = [-1; 1]$,
— sa période est $P = 2\pi$,
— la courbe $y = \sin(t)$ est lisse et continue,
— la valeur minimale de $\sin(t)$ est -1 et sa valeur maximale est 1,
— ses zéros sont les multiples entiers de π, c'est-à-dire $t = k \cdot \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

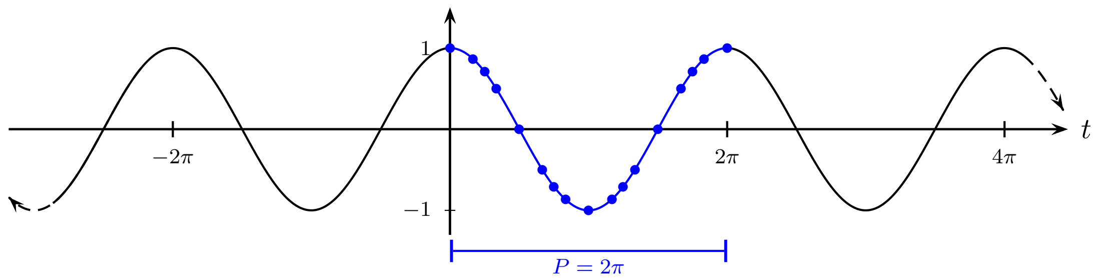
Le graphe de la fonction cosinus

Par une démarche similaire à celle utilisée pour le graphe de la fonction sinus, on trace la courbe $y = \cos(t)$ à l'aide des points $(t; y) = (t; \cos(t))$ pour $t \in [0; 2\pi]$. On complète ensuite le graphe en répétant cette portion de courbe sur l'ensemble des réels.

Attention ! L'ordonnée y du graphe de la fonction cosinus ci-dessous est donnée par l'abscisse, c'est-à-dire le x, du point correspondant à l'angle t sur le cercle trigonométrique.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$y = \cos(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$



Le graphe ci-dessus illustre les propriétés de la fonction cosinus :

— $\mathrm{Dom}(\cos(t)) = \mathbb{R}$,
— $\mathrm{Im}(\cos(t)) = [-1; 1]$,
— sa période est $P = 2\pi$,
— la courbe $y = \cos(t)$ est lisse et continue,
— comme la fonction sinus, la valeur minimale de $\cos(t)$ est -1 et sa valeur maximale est 1,
— ses zéros sont les abscisses des points obtenus en effectuant un certain nombre k de demi-tours qu'on ajoute à l'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Le graphe de la fonction tangente

À la différence des fonctions sinus et cosinus, le graphe de la fonction tangente possède des asymptotes verticales. En effet, puisque

$$\tan(t) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)},$$

la fonction $\tan(t)$ n'est pas définie aux valeurs t pour lesquelles $\cos(t) = 0$. Son domaine est donc

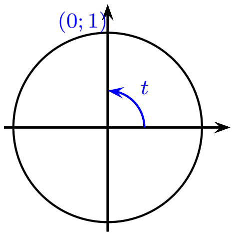
$$\mathrm{Dom}(\tan(t)) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'asymptotes verticales en $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on s'assure que la fonction croît ou décroît sans borne lorsque t tend vers une de ces valeurs.

Lorsque la valeur t est de plus en plus proche de $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079632\ldots$ la valeur de la tangente croît sans borne. On peut s'en convaincre à l'aide d'une table de valeurs,

t	1,57	1,5701	1,5705	1,5707	1,570795	$\to$	$\frac{\pi}{2}^-$
$\tan(t)$	1255,77	1436,11	3374,65	10381,33	753696,99	$\to$	∞

ou à l'aide d'un argument à partir du cercle trigonométrique.



Lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$ par la gauche (par des angles plus petits que $\frac{\pi}{2}$), son sinus tend vers 1 et son cosinus tend vers 0 par des valeurs plus grandes que 0. Ainsi,

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

De la même façon, on peut montrer que lorsque la valeur t est de plus en plus proche de $-\frac{\pi}{2} = -1{,}57079632\ldots$, la tangente décroît sans borne.

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty$$

On trace le graphe de la fonction $y = \tan(t)$ en plaçant d'abord les asymptotes verticales, qui donnent des repères, et les couples $(t; \tan(t))$ évalués aux angles remarquables d'un tour complet du cercle trigonométrique, $t \in [0; 2\pi]$.

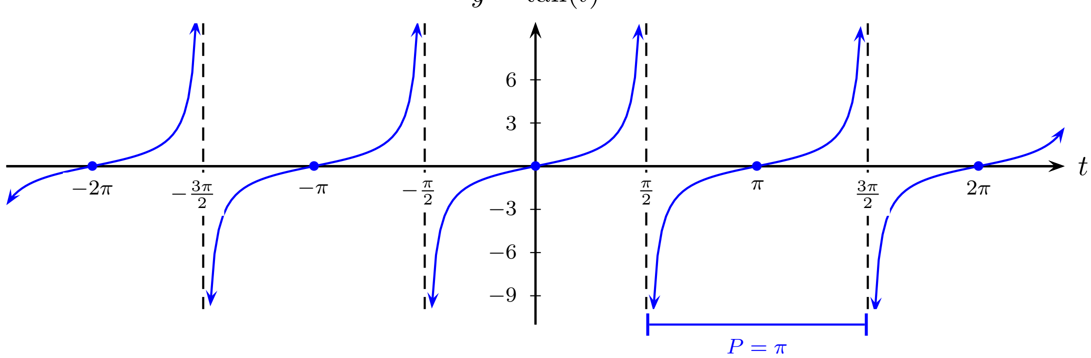
Attention ! Contrairement au sinus et au cosinus, la tangente n'est pas explicitement obtenue du cercle trigonométrique. On doit calculer les rapports entre les ordonnées et les abscisses, $\tan(t) = \frac{y}{x}$, sur le cercle trigonométrique.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

On remarque que les zéros de la fonction $\tan(t)$ sont identiques à ceux du sinus,

$$\tan(t) = 0 \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = 0 \iff \sin(t) = 0,$$

et que sa période est π, et non 2π comme pour les fonctions $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

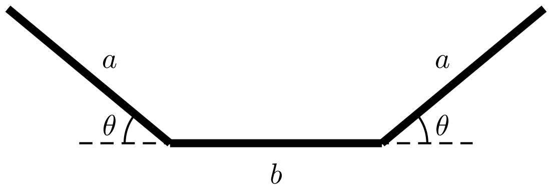


Le graphe ci-dessus illustre les propriétés de la fonction tangente.

- $\mathrm{Dom}(\tan(t)) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\mathrm{Im}(\tan(t)) = \mathbb{R}$,
- sa période est $P = \pi$,
- la courbe $y = \tan(t)$ est lisse,
- la fonction n'a pas de valeur minimale, ni maximale,
- ses zéros sont les multiples entiers de π, $t \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 8.16

En repliant d'un angle θ chaque côté d'une longue feuille de métal, on obtient une gouttière. Une coupe transversale est illustrée ci-dessous.



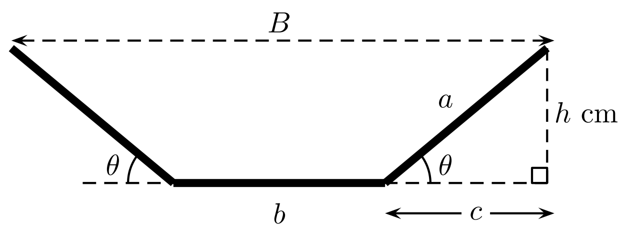
(a) Si la feuille mesure 21 cm en largeur et qu'on la replie au tiers, trouvez une expression qui calcule l'aire A de la section transversale comme une fonction de l'angle θ.

(b) Quel angle maximise l'aire de la section transversale ?

Solution :

(a) On veut calculer l'aire d'un trapèze où B est la longueur de sa plus grande parallèle, b sa plus petite et h est sa hauteur.

> **Attention !** Afin de bien suivre les étapes de construction de l'expression cherchée, on travaille avec les noms associés aux longueurs. On remplacera les valeurs par la suite.



À l'aide du triangle de référence dont l'hypoténuse est de longueur a et dont les côtés sont de longueur c et h, on a

$$\sin(\theta) = \frac{h}{a} \iff h = a\sin(\theta) \text{ et } \cos(\theta) = \frac{c}{a} \iff c = a\cos(\theta).$$

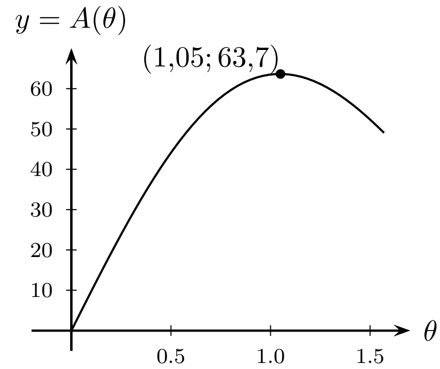
Ainsi, $B = b + 2c = b + 2 \cdot a\cos(\theta)$. L'aire du trapèze est donc

$$\begin{aligned}
\frac{(B+b)\cdot h}{2} &= \frac{(b + 2\cdot a\cos(\theta) + b)\cdot a\sin(\theta)}{2} && \text{on remplace les expressions pour } B \text{ et } h \\
&= \frac{(2b + 2a\cos(\theta))\cdot a\sin(\theta)}{2} && \text{on regroupe les termes semblables} \\
&= \frac{2(b + a\cos(\theta))\cdot a\sin(\theta)}{2} && \text{on met en évidence 2} \\
&= a(b + a\cos(\theta))\sin(\theta) && \text{on simplifie le facteur 2}
\end{aligned}$$

Puisque la feuille est repliée au tiers, $a = b = 7$ cm et

$$A(\theta) = 7(7 + 7\cos(\theta))\sin(\theta) = 49(1 + \cos(\theta))\sin(\theta).$$

(b) Le graphe de la fonction $A(\theta)$ tracée pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, dont l'ordonnée est ajustée à cet intervalle, révèle que l'aire maximale est d'environ 63,7 cm^2 lorsque l'angle est d'environ 1,05 rad $\approx$ 60,16°.



Attention ! À l'aide du calcul différentiel on peut montrer que l'angle qui maximise l'aire est exactement $\frac{\pi}{3} = 1{,}047... = 60°$.

Exercices

8.26 Sachant que $P = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les valeurs des fonctions trigonométriques sans trouver l'angle.

(a) $\sin(t)$ (b) $\cos(t)$ (c) $\tan(t)$ (d) $\cot(t)$ (e) $\sec(t)$ (f) $\csc(t)$

8.27 Sachant que $P(t) \approx (-0{,}7533; -0{,}6374)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les valeurs des fonctions trigonométriques sans trouver l'angle.

(a) $\sin(t)$ (b) $\cos(t)$ (c) $\tan(t)$ (d) $\cot(t)$ (e) $\sec(t)$ (f) $\csc(t)$

8.28 À l'aide du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ (c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ (e) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ (f) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (g) $\cos(0)$ (h) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (i) $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)$ (j) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

8.29 À l'aide du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ (c) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (e) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (f) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (g) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ (h) $\sin(2\pi)$ (i) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (j) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ (k) $\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ (l) $\cos(-10\pi)$

8.30 Sachant que $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx -0{,}3090$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx 0{,}9511$, à l'aide du cercle trigonométrique et des arguments de symétrie, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos(18°)$ (b) $\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)$ (c) $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (d) $\sin(72°)$ (e) $\tan(-108°)$ (f) $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$

8.31 Sans calculatrice, déterminez lequel est le plus grand des deux nombres.

(a) $\sin(2°)$ ou $\cos(2°)$
(b) $\sin(1°)$ ou $\sin(2°)$
(c) $\sin(2°)$ ou $\sin(2)$
(d) $\cos(1°)$ ou $\cos(2°)$
(e) $\cos(1)$ ou $\cos(2)$
(f) $\sin(1)$ ou $\sin(3)$

8.32 À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ (b) $\csc\left(-\frac{35\pi}{2}\right)$ (c) $\sec(585°)$

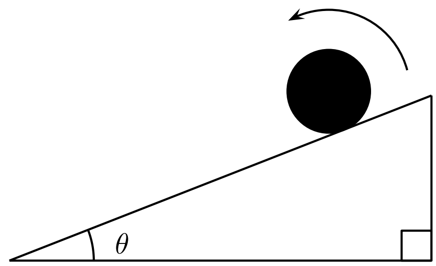
8.33 À l'aide de votre calculatrice, déterminez les valeurs suivantes. Donnez des réponses arrondies à la quatrième décimale et représentez ce à quoi correspondent ces valeurs sur une reproduction du cercle trigonométrique.

(a) $\cos(2{,}1)$ (b) $\sin(-0{,}9)$

8.34 En physique, lorsqu'on néglige la résistance de l'air, on modélise la vitesse v d'une balle qui roule le long d'un plan incliné par

$$v = \frac{5}{7}\,gt\sin(\theta),$$

où g est l'accélération gravitationnelle, t est le temps et θ est l'angle d'inclinaison de ce plan.



Pour estimer la valeur de g à partir de valeurs expérimentales on peut utiliser l'équation équivalente

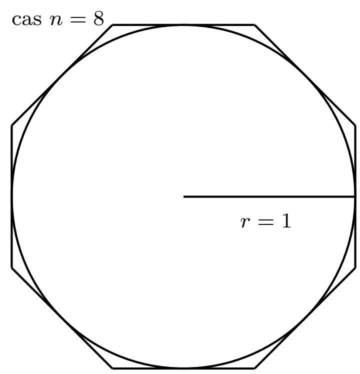
$$g = \frac{7v}{5t\sin(\theta)},$$

et utiliser un plan incliné pour de réduire la vitesse de la balle et ainsi, pouvoir plus facilement la mesurer.

(a) Une balle en acier roule sur un plan incliné de 7°. Après 2 secondes, la balle roule à une vitesse de 1,71 m/s. Déterminez une approximation pour la valeur de g à une décimale.

(b) Si le plan est incliné de 12°, estimez quelle sera la vitesse de la balle après 5 secondes.

8.35 Un polygone régulier à n côtés est circonscrit à un cercle de rayon 1. Le cas où $n = 8$ est illustré ci-dessous.



(a) Montrez que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est donnée par la fonction

$$A(n) = n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(b) Calculez $A(n)$ pour $n = 8$, $n = 100$, $n = 1\,000$ et $n = 10\,000$. *Gardez 6 décimales.*

(c) Émettez une conjecture quant à la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty} A(n)$.

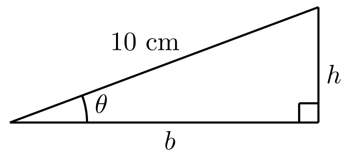
8.36 À midi Jérôme met une pompe en marche qui fait varier le volume d'eau (mesuré en litres) que contient un réservoir. Le volume d'eau contenu dans le réservoir, t heures après la mise en marche de la pompe, est donné par la fonction $V(t) = 6e^{-0,5t}\sin(1{,}7t) + 5$. Dans ce qui suit, répondez au mL près, c'est-à-dire arrondissez à la troisième décimale.

(a) Selon ce modèle, quel est le volume d'eau contenu dans le réservoir à 16 h ?

(b) Calculez $TVM_{[3;6]}$ et donnez ses unités. Que nous dit cette valeur dans le contexte ?

(c) À long terme, le volume d'eau contenu dans le réservoir se stabilise-t-il ? Si oui, vers quel volume ? Expliquez comment ceci se reflète sur le graphe de la fonction volume. Illustrez.

8.37 On considère un triangle droit de hauteur h, de base b et dont l'hypoténuse est de 10 cm. On s'intéresse à l'aire du triangle lorsque l'angle θ varie tout en conservant la même longueur d'hypoténuse.



(a) Déterminez l'aire du triangle comme une fonction de θ.

(b) Déterminez l'angle pour lequel l'aire du triangle est maximale. Que valent alors b et h ?

8.5 Les fonctions trigonométriques réciproques

Pour déterminer la valeur d'un angle lorsqu'on connaît la valeur de son sinus, de son cosinus ou de sa tangente, on fait appel à la réciproque de la fonction, c'est-à-dire à son inverse sous l'opération de composition $\circ$.

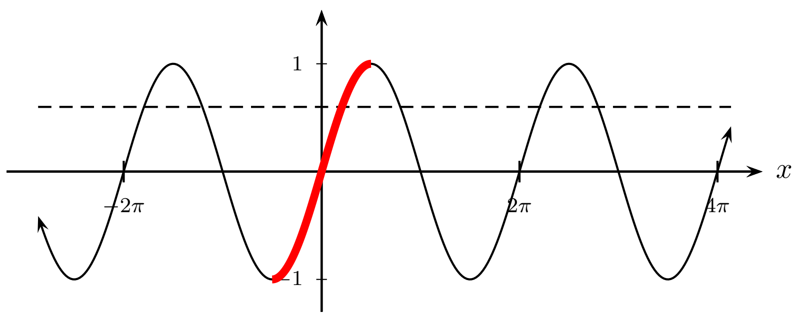
Rappel. Les caractéristiques d'une fonction réciproque

- Si toute droite horizontale intersecte le graphe d'une fonction en au plus un endroit, la fonction est inversible, autrement dit, elle possède une réciproque.
- Si $(a; b)$ est un point du graphe de la fonction f, alors $(b; a)$ est un point du graphe de sa réciproque f^{-1}. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1} est donc obtenu par la réflexion du graphe de la fonction f selon l'axe $y = x$.

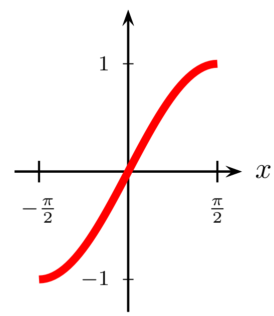
La réciproque de la fonction sinus

On constate que toute droite horizontale entre $y = -1$ et $y = 1$ intersecte le graphe du sinus une infinité de fois. Prise dans son ensemble, la fonction ne possède pas de réciproque. Toutefois, si on restreint le domaine de $\sin(x)$ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, toute droite horizontale entre $y = -1$ et $y = 1$ intersecte le graphe une seule fois.

$y = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$



$y = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$



Cette partie du graphe satisfait le test de l'horizontale et le sinus, restreint à ce domaine, possède alors une fonction réciproque.

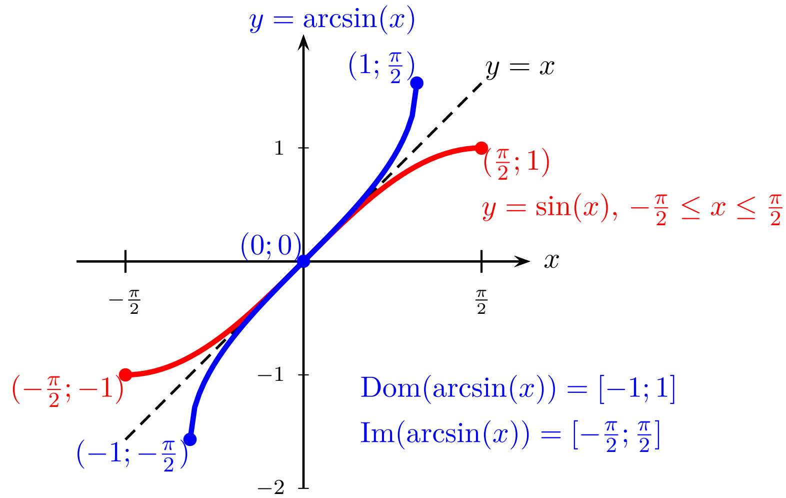
Définition 8.4 La réciproque de la fonction sinus, désignée par $\arcsin(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$, est l'inverse de la fonction $y = \sin(x)$ restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, l'équivalence

$$y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \sin(y) = x,$$

où $y \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ et $x \in [-1; 1]$ signifie que $\arcsin(x)$ est **l'angle de l'intervalle** $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ **dont le sinus est** x.

La fonction arcsin retourne donc toujours une valeur d'angle dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$. On appelle cet intervalle **la branche principale du sinus**.

On obtient le graphe de la fonction $\arcsin(x)$ en reflétant, selon l'axe $y = x$, celui de $\sin(x)$ restreint à sa branche principale.



Exemple 8.17

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

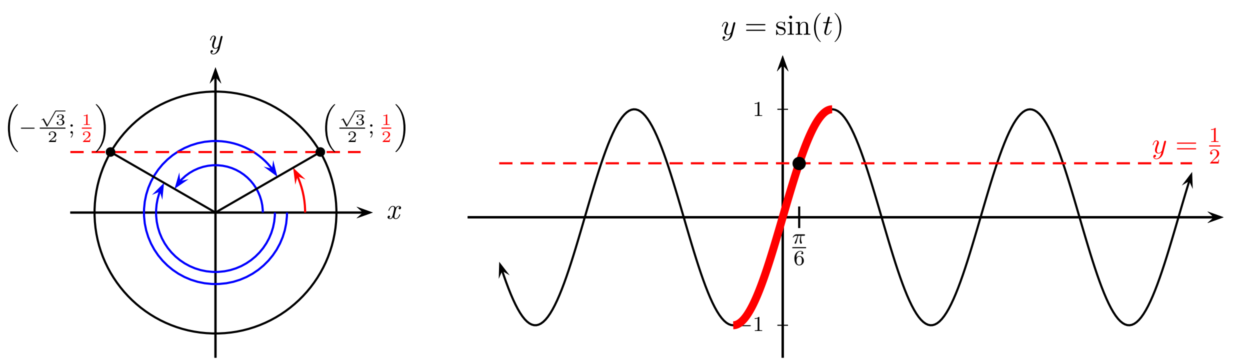
(a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

(b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

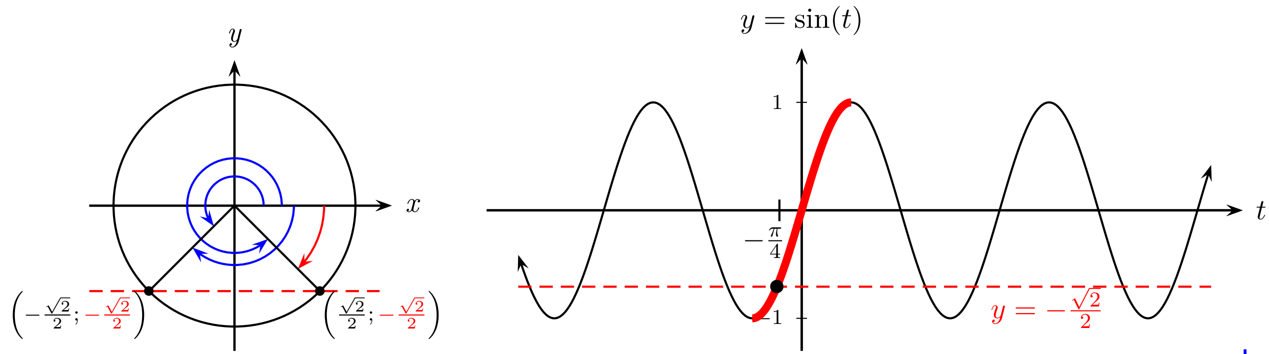
Solution :

(a) On traduit d'abord $t = \arcsin(\frac{1}{2})$ sous la forme équivalente $\sin(t) = \frac{1}{2}$ où t doit être sur la branche principale du sinus, $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Parmi tous les angles dont le sinus est $\frac{1}{2}$, seul $t = \frac{\pi}{6}$ est sur la branche principale $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

> **Attention !** On utilisera t comme variable indépendante, afin d'éviter la confusion avec l'utilisation des variables x et y pour le cercle trigonométrique.

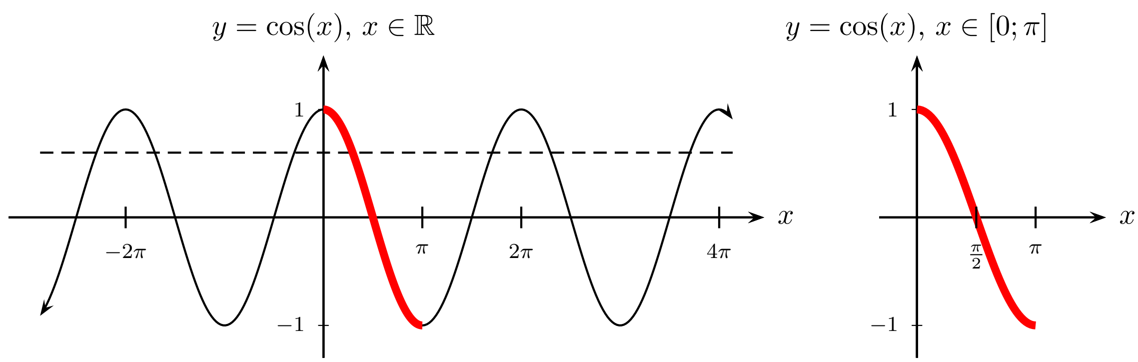


(b) On traduit, $t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff \sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche les angles dont le sinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Parmi tous les angles possibles, seul $t = -\frac{\pi}{4}$ est sur la branche principale. Ainsi, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.



La réciproque de la fonction cosinus

Si on restreint le domaine de la fonction $\cos(x)$ à l'intervalle $[0; \pi]$, sa réciproque est alors aussi une fonction.

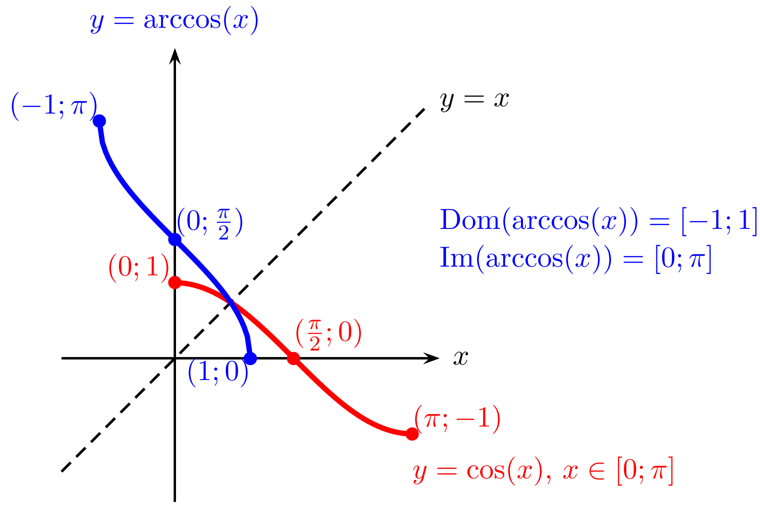


Définition 8.5 La réciproque de la fonction cosinus, désignée par $\arccos(x)$ ou $\cos^{-1}(x)$, est l'inverse de la fonction $y = \cos(x)$ restreinte à l'intervalle $[0; \pi]$. Ainsi, l'équivalence

$$y = \arccos(x) \Longleftrightarrow \cos(y) = x,$$

où $y \in [0; \pi]$ et $x \in [-1; 1]$ signifie que $\arccos(x)$ est **l'angle dont le cosinus est** x sur la branche principale du cosinus.

On obtient le graphe de la fonction $\arccos(x)$ en reflétant, selon l'axe $y = x$, celui de $\cos(x)$ restreint à sa branche principale $[0; \pi]$.



Exemple 8.18

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

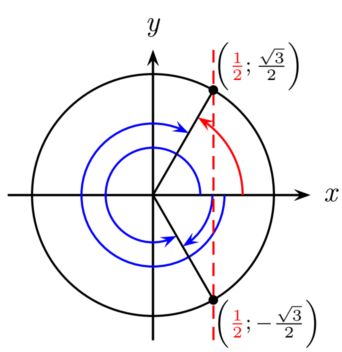
(a) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

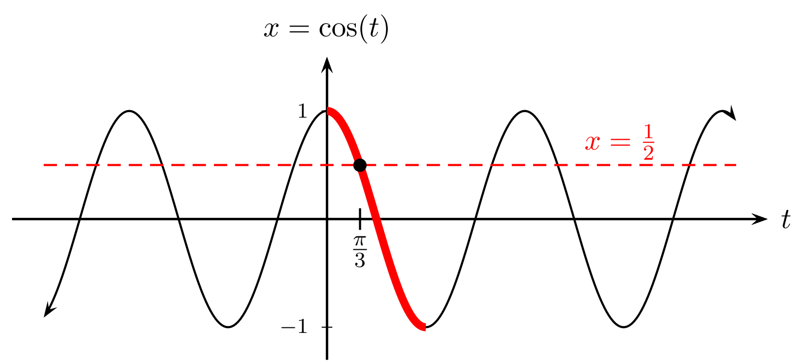
(b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solution :

(a) On traduit d'abord $t = \arccos(\frac{1}{2})$ sous la forme équivalente $\cos(t) = \frac{1}{2}$ où t doit être sur la branche principale du cosinus, $t \in [0; \pi]$. Parmi tous les angles dont le cosinus est $\frac{1}{2}$, seul $t = \frac{\pi}{3}$ est sur la branche principale. Ainsi, $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

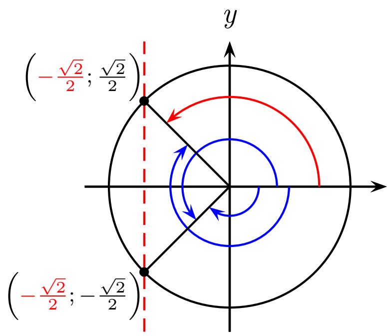
Attention ! Encore une fois, on utilisera t comme variable indépendante, afin d'éviter la confusion avec l'utilisation des variables x et y pour le cercle trigonométrique.

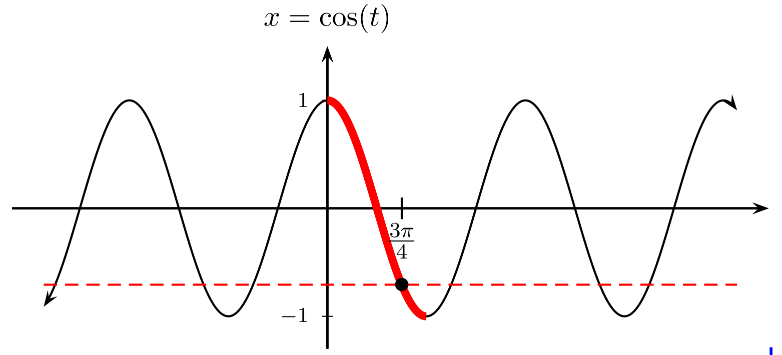




Attention ! L'ordonnée y d'un point sur le cercle trigonométrique correspond au sinus de l'angle, tandis que son abscisse x correspond à son cosinus.

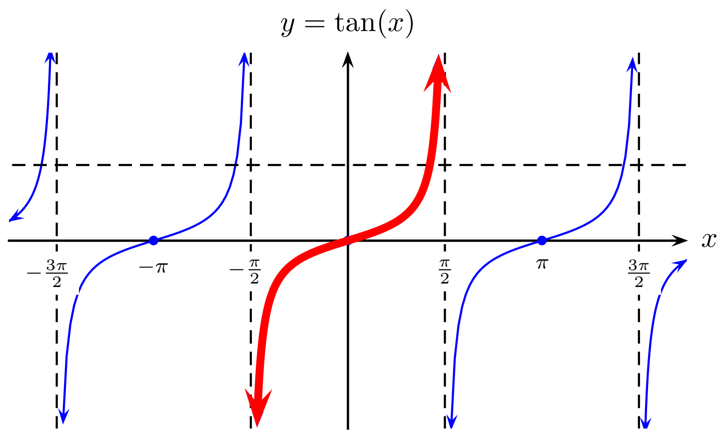
(b) On traduit, $t = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff \cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche les angles dont le cosinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Parmi tous les angles possibles, seul $t = \frac{3\pi}{4}$ est dans l'intervalle $[0; \pi]$. Ainsi, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

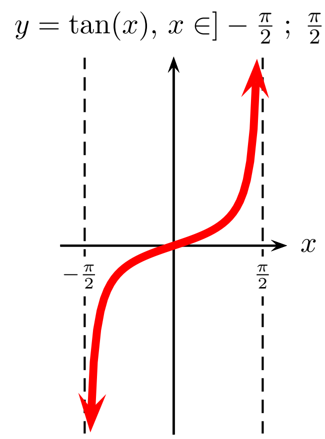




La réciproque de la fonction tangente

Si on restreint le domaine de $\tan(x)$ à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, toute droite horizontale intersecte le graphe une seule fois.



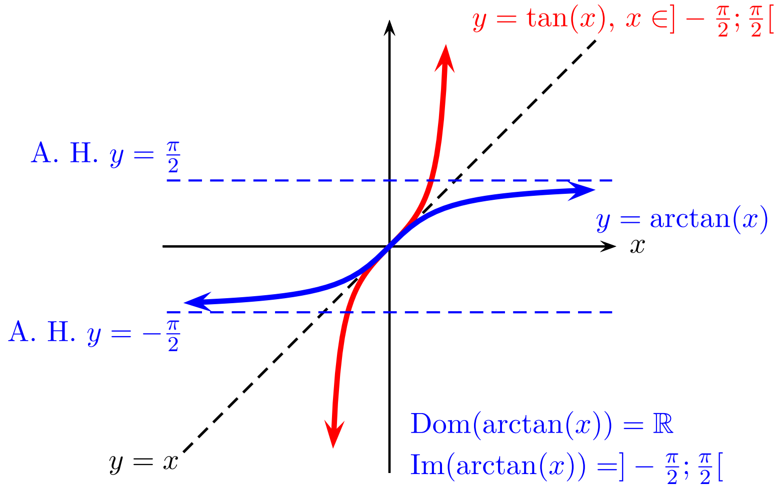


Définition 8.6 La réciproque de la fonction tangente, désignée par $\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$, est l'inverse de la fonction $y = \tan(x)$ restreinte à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, l'équivalence

$$y = \arctan(x) \Longleftrightarrow \tan(y) = x$$

où $y \in]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ et $x \in [-1; 1]$ signifie que $\arctan(x)$ est **l'angle dont la tangente est** x sur la branche principale de la tangente.

On obtient le graphe de la fonction $\arctan(x)$ en reflétant, selon l'axe $y = x$, celui de $\tan(x)$ restreint à sa branche principale.



Exemple 8.19

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\arctan(-1)$

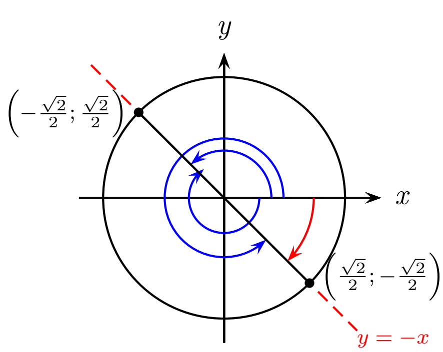
(b) $\arctan(\sqrt{3})$

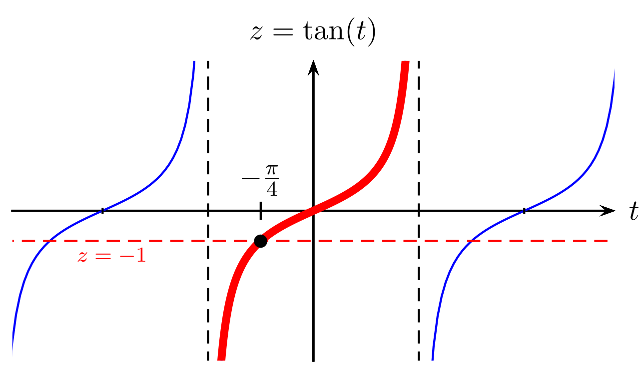
Solution :

(a) On traduit d'abord $t = \arctan(-1)$ sous la forme équivalente $\tan(t) = -1$ où t doit être sur la branche principale de la fonction tangente, $t \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
On écrit ensuite $\tan(t)$ comme un rapport où $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$ sur le cercle trigonométrique.

$$\tan(t) = -1 \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -1 \iff \sin(t) = -\cos(t) \iff y = -x.$$

On cherche donc les angles t dont le côté final repose sur la droite $y = -x$. Autrement dit, on cherche les angles dont le sinus et le cosinus sont de même valeur, mais de signes contraires. Parmi tous ces angles, seul $-\frac{\pi}{4}$ est sur la branche principale de la tangente. On conclut donc que $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.



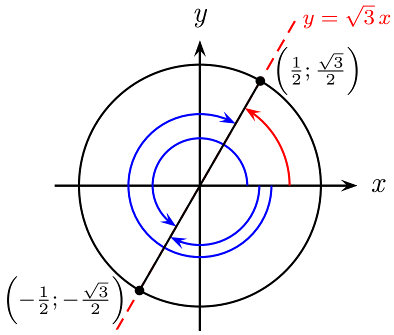


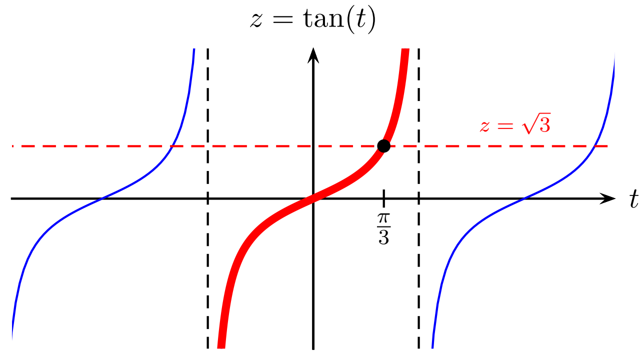
(b) On traduit, $t = \arctan\left(\sqrt{3}\right) \iff \tan(t) = \sqrt{3}$. Alors,

$$\tan(t) = \sqrt{3} \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \sqrt{3} \iff \sin(t) = \sqrt{3}\cos(t).$$

On cherche donc les angles t dont le sinus est $\sqrt{3}$ fois son cosinus. Autrement dit, on cherche les angles dont le côté final repose sur la droite $y = \sqrt{3}\,x$.

Parmi tous ces angles, seul $\frac{\pi}{3}$ est sur la branche principale de la tangente. On conclut donc que $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.





Exemple 8.20

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos\left(\arctan(\sqrt{3})\right)$

(b) $\arcsin\left(\cos(-\frac{2\pi}{3})\right)$

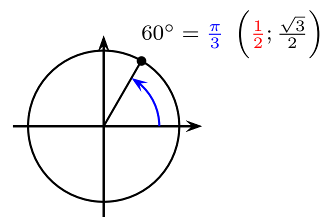
(c) $\arccos\left(\cos(\frac{\pi}{2})\right)$

(d) $\arcsin(\sin(\pi))$

Solution :

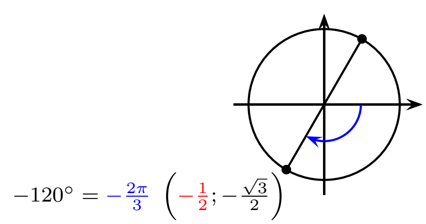
(a) Pour composer les fonctions, on commence par évaluer $\arctan(\sqrt{3})$. À l'exemple 8.19 (b) on a trouvé $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, ainsi

$$\cos\left(\arctan(\sqrt{3})\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$



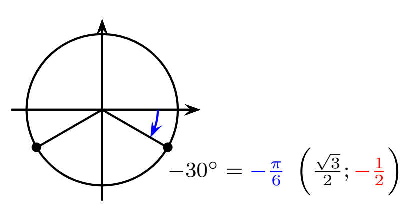
(b) On commence par évaluer le cosinus à l'aide du cercle trigonométrique. On trouve,

$$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right).$$



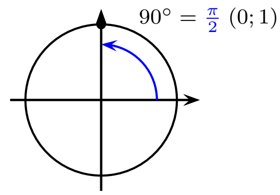
On traduit ensuite $t = \arcsin(-1/2)$ sous la forme équivalente $\sin(t) = -1/2$. Parmi tous les angles dont le sinus est $-\frac{1}{2}$, seul $t = -\frac{\pi}{6}$ est sur la branche principale du sinus. Ainsi,

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}.$$

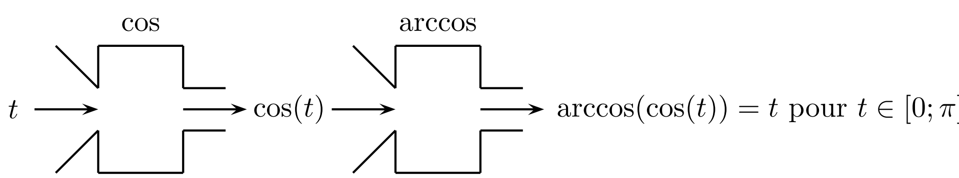


(c) On commence par évaluer $\cos(\frac{\pi}{2})$ à l'aide du cercle trigonométrique,

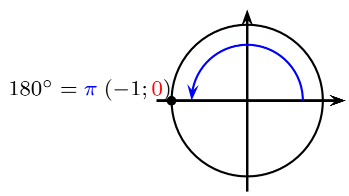
$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0)$.



Puisque $\arccos(0)$ est l'angle dont le cosinus est 0 sur la branche principale du cosinus, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.
On ne devrait pas être étonné de retrouver $\frac{\pi}{2}$ puisque, sur la branche principale du cosinus, les fonctions $\cos(x)$ et $\arccos(x)$ sont réciproques l'une de l'autre.



(d) À l'aide du cercle trigonométrique, on trouve $\sin(\pi) = 0$.



Pour déterminer $\arcsin(0)$, on doit trouver l'angle dont le sinus est 0 sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi,

$$\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0.$$

Attention ! Ce n'est que pour $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ que les fonctions sinus et arcsinus sont réciproques l'une de l'autre et que $\arcsin(\sin(t)) = t$.

Exercices

8.38 À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

(c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\arcsin(-1)$

(e) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(f) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(g) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(h) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

(i) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

(j) $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

(k) $\arctan(1)$

(l) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

(m) $\arctan(-\sqrt{3})$

(n) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

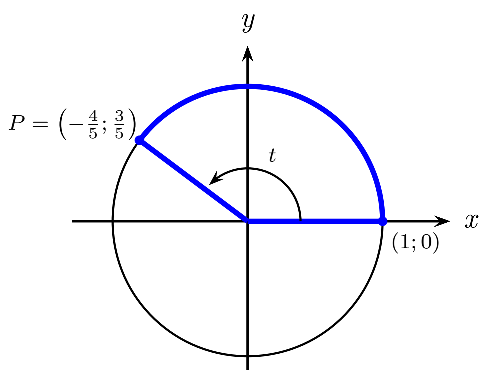
(o) $\cos(\arctan(1))$

(p) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

(q) $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

(r) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

8.39 Sachant que $P = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les valeurs suivantes.



(a) $\cos(t)$

(b) $\sin(t)$

(c) $\tan(t)$

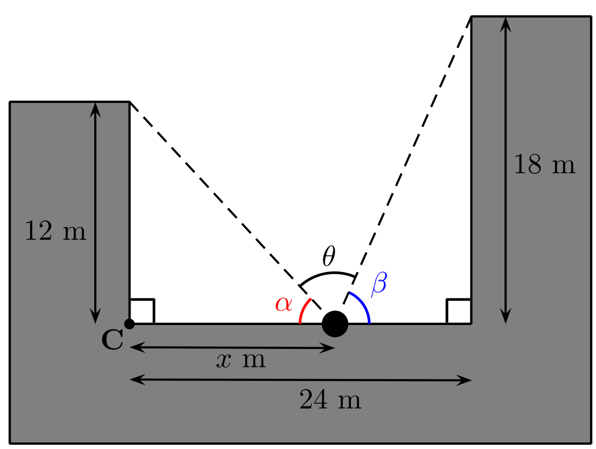
(d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$

(e) $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

(f) Pourquoi les valeurs $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ sont-elles différentes ?

8.40 On sait que $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$, est-ce que $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$? Si non, pourquoi ?

8.41 La figure ci-dessous représente la vue à vol d'oiseau d'un immeuble du centre-ville. On installe une caméra fixe (désignée par le gros point noir) sur un mur de la cour intérieure de l'édifice.



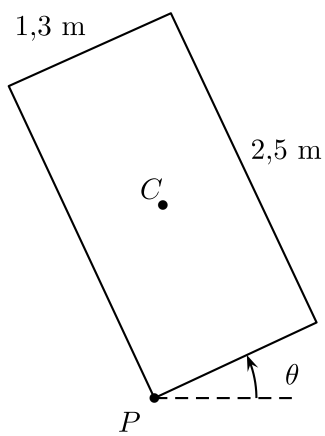
(a) Déterminez la valeur des angles α, β et θ (en radians d'abord et en degrés ensuite) lorsque $x = 15$ m.

(b) Déterminez la valeur de l'angle d'observation θ comme une fonction de x, c'est-à-dire déterminez $\theta(x)$. Ici, θ devra être en radian.

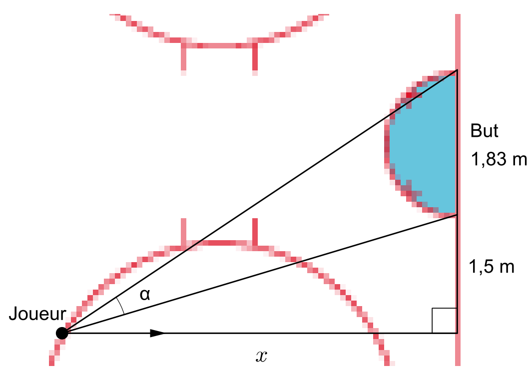
(c) Quel est le domaine de la fonction $\theta(x)$ dans le contexte ?

(d) Déterminez, à l'aide du graphique de la fonction $\theta(x)$, à quelle distance du coin (celui désigné par **C**) on doit positionner la caméra afin de maximiser l'angle d'observation θ.

8.42 De quel angle θ doit-on tourner la boîte illustrée pour faire en sorte que son centre C soit directement au-dessus du pivot P.



8.43 Un joueur de hockey s'avance avec la rondelle vers le but de l'équipe adverse. Le but mesure 1,83 m de largeur et le joueur est situé à x m de la ligne du but.



(a) Quel est l'angle de visée α lorsque $x = 5$ m ?

(b) Déterminez une expression qui calcule l'angle de visée en fonction de la distance x de la ligne de fond.

(c) À l'aide du graphe de la fonction obtenue, déterminez quelle distance x maximise l'angle de visée. Quel est alors cet angle maximal ?

8.6 Les équations trigonométriques

Comme pour les équations rencontrées au chapitre 3, il y a trois types d'équations trigonométriques : des identités, des équations conditionnelles et des équations contradictoires.

Rappel. Une équation est une **identité** si son ensemble solution est égal à son ensemble de référence. Elle est **conditionnelle** si son ensemble solution est un sous-ensemble strict (sans être égal à) de son ensemble de référence et elle est **contradictoire** si elle n'a aucune solution.

Les identités

Les relations qui existent entre les six fonctions trigonométriques de base sont des exemples d'identités trigonométriques. Elles découlent de la définition 8.3, où $P(t) = (x; y) = (\cos(t); \sin(t))$ est le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle t, en remplaçant x par $\cos(t)$ et y par $\sin(t)$.

$$\tan(t) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$
$$\sec(t) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \csc(t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin(t)}$$

Ces relations sont vraies quelle que soit la valeur pour laquelle les fonctions sont définies. Lorsque les valeurs de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont connues, ces relations permettent de trouver la valeur des quatre autres fonctions trigonométriques de base.

Exemple 8.21

Sachant que $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin(t) = -\frac{1}{2}$, trouvez la valeur des quatre autres fonctions trigonométriques de base.

Solution :

On remplace $\cos(t)$ par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(t)$ par $-\frac{1}{2}$.

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$
$$\csc(t) = \frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Plusieurs identités découlent de l'équation du cercle trigonométrique $x^2 + y^2 = 1$. Puisque $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$, on trouve d'abord l'identité, dite *fondamentale*,

$$(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1.$$

Attention ! Pour réduire le nombre de parenthèse, on élimine celles de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en écrivant plutôt $\cos t$ et $\sin t$. On dira tout de même « cos de t » et « sin de t ». On en élimine encore en écrivant $\cos^2 t$ et $\sin^2 t$ pour $(\cos t)^2$ et $(\sin t)^2$. L'identité fondamentale s'écrit alors

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Deux autres identités peuvent être déduite de l'équation $x^2+y^2=1$ en divisant les deux membres par $x^2=\cos^2 t$ et $y^2=\sin^2 t$ respectivement. Avec l'identité fondamentale, ces identités sont dites *pythagoriciennes*,

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1, \qquad 1+\tan^2(t)=\sec^2(t), \qquad 1+\cot^2(t)=\csc^2(t).$$

Exemple 8.22

Sachant que $\cos x=-\frac{2}{5}$ pour $x\in[\pi;\frac{3\pi}{2}]$, trouvez $\sin x$.

Solution :

On utilise l'identité $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, remplaçant $\cos x$ par $-\frac{2}{5}$,

$$\begin{aligned}
\left(-\tfrac{2}{5}\right)^2+\sin^2 x=1 &\iff \tfrac{4}{25}+\sin^2 x=1 && \text{on évalue le carré}\\
&\iff \sin^2 x=1-\tfrac{4}{25} && \text{on soustrait}\\
&\iff \sin^2 x=\tfrac{21}{25} && \text{on met au dénominateur commun}\\
&\iff \sin x=\pm\tfrac{\sqrt{21}}{5} && \text{on extrait la racine carrée}
\end{aligned}$$

Puisqu'on stipule que $x\in[\pi;\frac{3\pi}{2}]$, le côté final de l'angle x se situe dans le troisième quadrant, le sinus doit donc être négatif. Ainsi, $\sin(x)=-\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Exemple 8.23

Utilisez les identités trigonométriques de base pour démontrer les égalités suivantes.

(a) $\cos x\sec x=1$

(b) $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=2\sec^2\theta$

(c) $\csc t-\dfrac{\cot t}{\sec t}=\sin t$

Solution :

(a) On utilise l'identité de base $\sec(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$ et on simplifie.

$$\cos x\sec x=\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}=1$$

(b) On simplifie le membre de gauche afin d'obtenir le membre de droite.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta} &= \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} && \text{on met au dénominateur commun}\\
&= \frac{2}{1-\sin^2\theta} && \text{on simplifie le numérateur et on multiplie les facteurs du dénominateur}\\
&= \frac{2}{\cos^2\theta} && \text{on utilise l'identité } \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\Leftrightarrow \cos^2\theta=1-\sin^2\theta\\
&= 2\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=2\sec^2\theta && \text{on utilise l'identité } \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

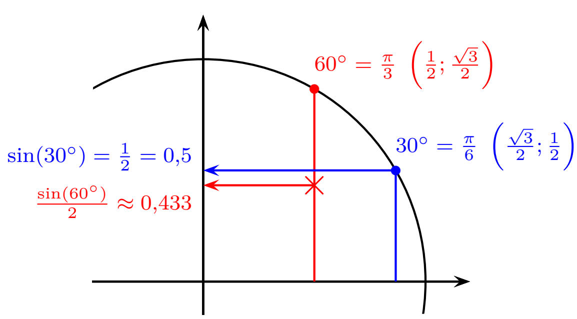
(c) On traduit d'abord les termes du membre de gauche en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

$$\begin{aligned}
\csc t - \frac{\cot t}{\sec t} &= \frac{1}{\sin t} - \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{\cos t}} && \text{on développe en termes de } \cos t \text{ et } \sin t \\
&= \frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{1} && \text{on transforme le quotient en produit} \\
&= \frac{1}{\sin t} - \frac{\cos^2 t}{\sin t} && \text{on multiplie les fractions} \\
&= \frac{1-\cos^2 t}{\sin t} && \text{le dénominateur est commun} \\
&= \frac{\sin^2 t}{\sin t} && \text{on utilise l'identité } \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Leftrightarrow \sin^2 t = 1-\cos^2 t \\
&= \sin t && \text{on simplifie}
\end{aligned}$$

Dans tous les exemples précédents, pour vérifier qu'une équation est bien une identité, on simplifie un membre de l'équation pour montrer qu'il est identique à l'autre membre. Selon les identités, on peut avoir à utiliser d'autres techniques ou d'autres identités. On se limitera ici aux identités de base, aux identités pythagoriciennes et aux identités de sommes et de différences suivantes.

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

Sans mémoriser ces identités, il est important de se rappeler, par exemple, que le sinus d'une somme n'est pas égal à la somme des sinus. En effet, à l'exercice 8.3 (a), on a montré à l'aide de calculs que $\sin(60°) \neq 2 \cdot \sin(30°)$, même si $60° = 2 \cdot 30°$. On peut aussi le vérifier en examinant le cercle trigonométrique. On remarque que le point milieu du segment vertical de longueur $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, désigné par $\times$, est moins haut que $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.



Exemple 8.24

Tracez le graphe de chacun des côtés de l'équation dans une même fenêtre graphique. Si les graphes semblent coïncider, vérifiez que l'équation est une identité. Si les graphes ne coïncident pas, donnez une valeur de x pour laquelle les deux côtés sont définis, mais non égaux.

(a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (b) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ (c) $3\cos(x) = \cos(3x)$

Solution :

(a) En tracant les graphes (*faites-le*) de $y = \sin(2x)$ et $y = 2\sin x \cos x$, on voit qu'ils semblent coïncider. Il s'agit bien d'une identité, car en posant $y = x$ dans l'équation

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

on trouve

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Le sinus du double d'un angle est $2\cos(x)$ fois le sinus de l'angle qui a été doublé.

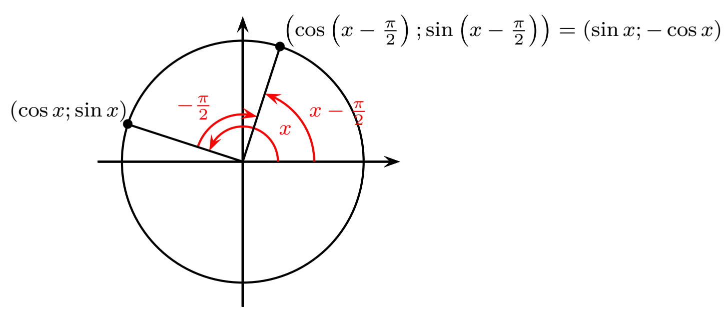
(b) En tracant les graphes (*faites-le*) de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ et $y = \sin x$, on voit qu'ils semblent coïncider. Pour démontrer qu'il s'agit bien d'une identité, on utilise l'identité

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

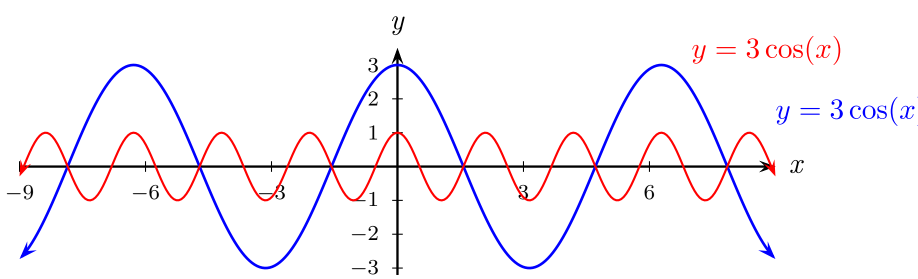
On pose $y = \frac{\pi}{2}$, on évalue et on simplifie.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x$$

L'identité $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ se vérifie aussi par symétrie, à l'aide du cercle trigonométrique.



(c) En tracant les graphes de $y = 3\cos(x)$ et $y = \cos(3x)$, on remarque qu'ils ne coïncident que pour certaines valeurs de x. On peut constater qu'en $x = 0$, $y = 3\cos(0) = 3 \cdot 1 = 3$, tandis que $y = \cos(3 \cdot 0) = \cos(0) = 1$.



Il ne s'agit donc pas d'une identité, mais plutôt d'une équation conditionnelle.

Les équations conditionnelles

Une équation est **conditionnelle** si son ensemble solution est un sous-ensemble strict (sans être égal à) de son ensemble de référence (domaine).

Exemple 8.25

À l'aide du cercle trigonométrique, résolvez $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'ensemble donné.

(a) pour $x \in [0; 2\pi]$

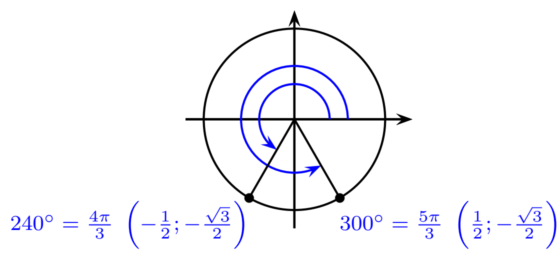
(b) pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

(c) pour $x \in [0; 4\pi]$

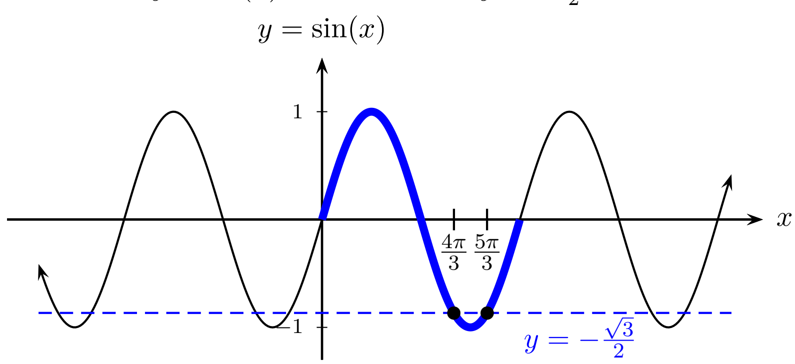
(d) pour $x \in \mathbb{R}$

Solution :

(a) Les angles $x \in [0; 2\pi]$ dont le sinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

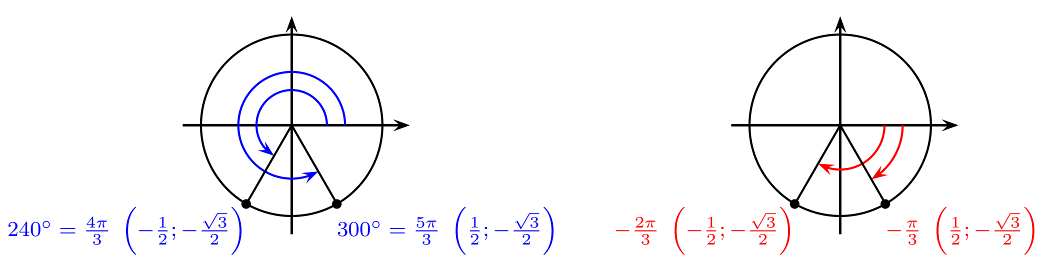


D'un point de vue graphique, les solutions trouvées correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y = \sin(x)$ et de la droite $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

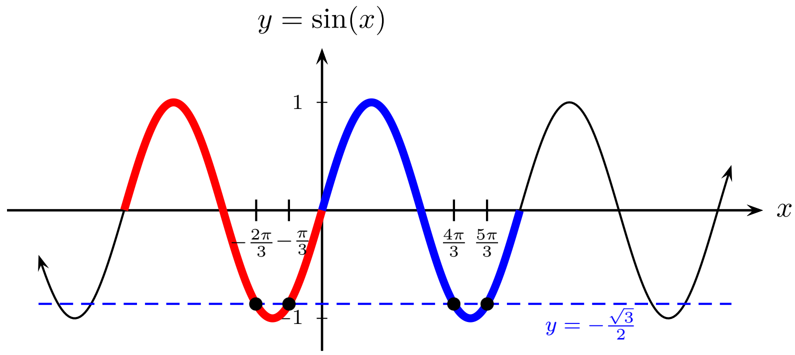


(b) Les angles $x \in [-2\pi; 2\pi]$ dont le sinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$ trouvés en (a) ainsi que les angles

$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}.$$

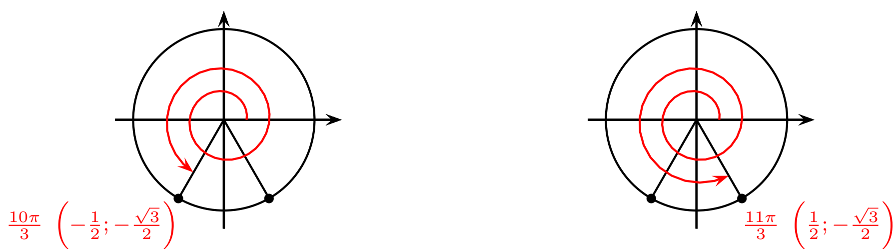


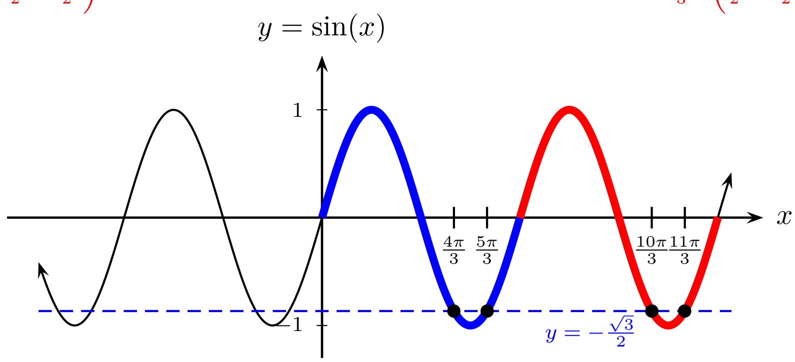
Encore une fois, les solutions trouvées correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y = \sin(x)$ et de la droite $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais, cette fois, sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.



(c) Les angles $x \in [0; 4\pi]$ dont le sinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$ trouvés en (a) ainsi que les angles

$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \text{ et } \frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{11\pi}{3}.$$



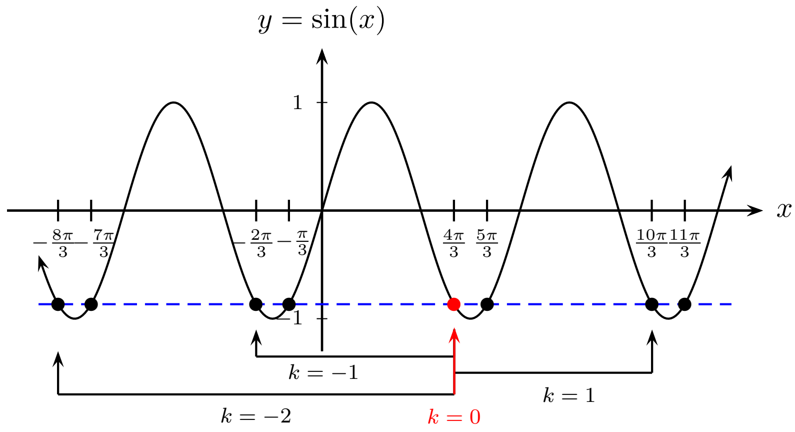


(d) Pour trouver toutes les solutions réelles, il suffit de parcourir le cercle en faisant un certain nombre de tours complets dans un sens ou dans l'autre à partir des points trouvés en (a).

$$x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Rappel. Avec cette notation, $k \in \mathbb{Z}$ est un compteur de tours, c'est-à-dire que le côté final de l'angle fait un tour complet dans le sens antihoraire lorsque k est positif, et horaire lorsque k est négatif.

Le graphique ci-dessous illustre les solutions obtenues à partir de $x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ pour $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.



Les équations contradictoires

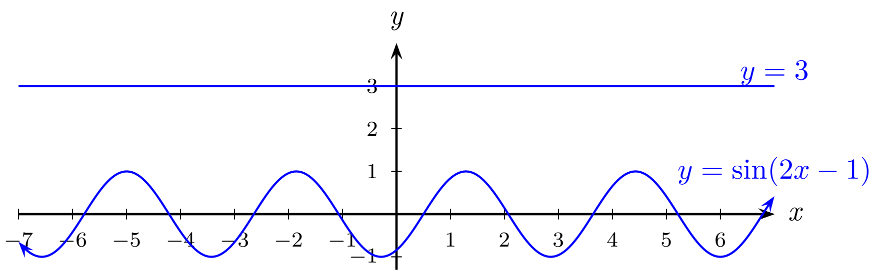
Une équation est **contradictoire** si elle n'a aucune solution.

Exemple 8.26

Résolvez l'équation $\sin(2x - 1) = 3$ à l'aide du solveur de votre calculatrice. Donnez une interprétation graphique de l'ensemble solution.

Solution :

La calculatrice répond `false`. En effet, puisque la valeur maximale du sinus est 1, il n'existe aucune valeur $x \in \mathbb{R}$ qui fait en sorte que $\sin(2x - 1) = 3$. Il s'agit donc d'une équation contradictoire, c'est-à-dire qu'elle n'a aucune solution. Les courbes $y = 3$ et $y = \sin(2x - 1)$ ne s'intersectent pas.



Exercices

8.44 Sachant que $\sin(x) = \frac{1}{3}$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, trouvez les valeurs suivantes sans calculatrice.

(a) $\cos x$ (b) $\tan x$ (c) $\cot x$ (d) $\sec x$ (e) $\csc x$

8.45 Utilisez les identités trigonométriques pour démontrer les égalités suivantes.

(a) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

(b) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

(c) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{1+\sin x}{\cos x} = 2\sec x$

(d) $\dfrac{\tan x + \sin x}{1+\cos x} = \tan x$

8.46 Tracez le graphe de chacun des membres de l'équation dans une même fenêtre graphique. Si les graphes semblent coïncider, vérifiez que l'équation est une identité. Si les graphes ne coïncident pas, donnez une valeur de x pour laquelle les deux membres sont définis, mais pas égaux.

(a) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$

(b) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

(c) $\cos 2x = 2\cos x$

(d) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$

8.47 À l'aide du cercle trigonométrique et des fonctions trigonométriques réciproques, résolvez les équations suivantes sur l'ensemble donné. Dans chacun des cas, donnez une interprétation graphique de l'ensemble solution.

(a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi]$

(b) $\cos x = 0{,}35$ pour $x \in [0; 2\pi]$

(c) $\tan x = \sqrt{3}$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

(d) $\tan x = -4{,}2$ pour $x \in \mathbb{R}$

8.48 Sans calculatrice, résolvez les équations suivantes sur l'ensemble donné.

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi]$

(b) $2\cos x = 1$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

(c) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

(d) $\tan 2x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

8.49 Résolvez les équations suivantes à l'aide du solveur de votre calculatrice. Dans chacun des cas, donnez une interprétation graphique de l'ensemble solution.

(a) $\cos x = \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$

(b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

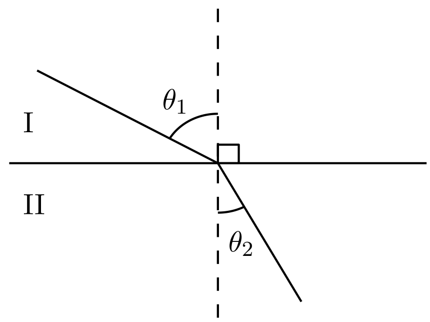
(c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ pour $x \in \mathbb{R}$

(d) $\tan x^2 = x \sin x$ pour $x \in [-\pi; \pi]$

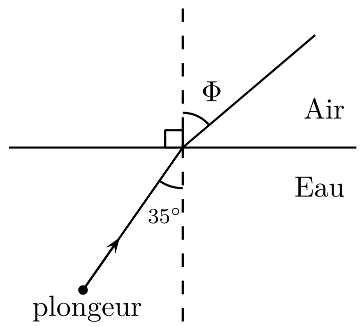
8.50 Lorsqu'un faisceau lumineux oblique traverse une surface pour passer d'un milieu à un autre, il change de direction. Ce changement de direction est donné par la loi de Snell-Descartes,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

où n_1 est l'indice de réfraction du premier milieu (I) et n_2 est celui du deuxième milieu (II).



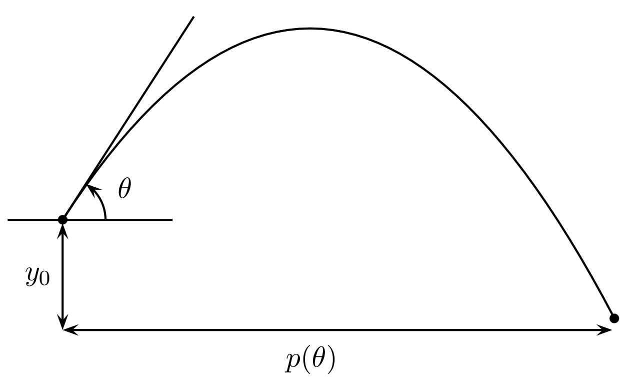
Si un plongeur pointe un faisceau lumineux vers la surface de l'eau, à quel angle Φ émergera le faisceau ? *L'indice de réfraction de l'air est environ* 1 *et celui de l'eau est d'environ* 1,33.



8.51 La portée $p(\theta)$ d'un projectile, lorsqu'on néglige la résistance de l'air, peut être modélisée par la fonction

$$p(\theta) = \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right),$$

où g est l'accélération gravitationnelle (environ 9,81 m/s^2 à la surface de la Terre),
θ est l'angle de projection par rapport à l'horizontale,
v est la vitesse de déplacement initiale du projectile,
et y_0 est la hauteur initiale du projectile par rapport à l'horizontale de référence.



Si le projectile est lancé à partir d'une hauteur de référence tel que $y_0 = 0$, le modèle se simplifie en

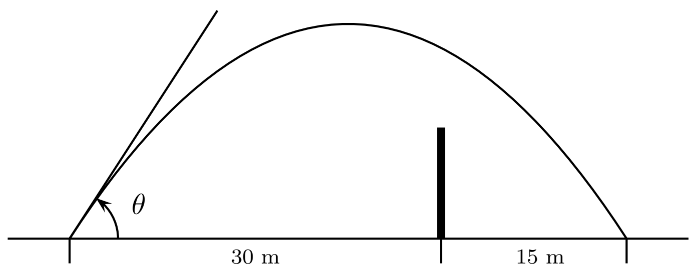
$$p(\theta) = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta.$$

De plus, en supposant que le projectile est à l'origine du plan cartésien au moment du tir et qu'il se déplace dans le premier quadrant, sa position $(x; y)$, t secondes après le tir, est donnée par $x = v_0 t\cos(\theta)$ et $y = v_0 t\sin\theta - 4.905t^2$.

(a) À l'aide de l'identité $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, montrez que

$$\frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right)\Bigg|_{y_0=0} = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta.$$

(b) Une catapulte est placée à 30 m du mur d'une forteresse. Un soldat doit tirer un obus afin qu'il atterrisse à 15 m du mur, à l'intérieur de la forteresse. Si le mur mesure 9 m de haut et que la vitesse initiale est de 22 m/s, quel doit être l'angle de projection θ pour que l'obus ait une portée de 45 m et atterisse dans la forteresse, sans frapper le mur ?



(c) À cette même vitesse initiale, quelle est la portée maximale de la catapulte ?

8.7 Les lois des sinus et des cosinus

Il existe plusieurs façons de résoudre un triangle quelconque[i]. On s'attarde ici à deux des méthodes les plus utilisées, qu'on appelle la loi des sinus et la loi des cosinus.

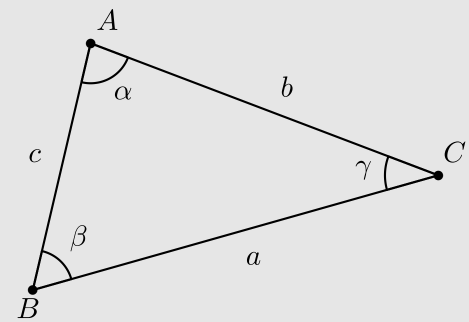
Théorème 8.1
Soit une triangle quelconque de sommets A, B et C.

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Loi des cosinus

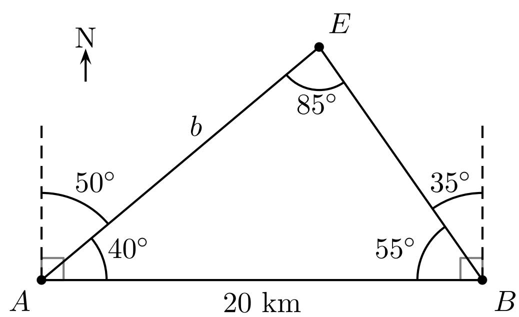
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$



Exemple 8.27
Le poste de surveillance des incendies A est situé à 20 km à l'ouest du poste B. Dans leur tour respective, des agents détectent un incendie sur une montagne située au nord. L'agent du poste A signale que l'épicentre du feu est à 50° au nord-est alors que celui du poste B le signale à 35° au nord-ouest. À quelle distance du poste A se situe l'épicentre du feu ?

Solution :
La figure suivante résume les informations données. La distance entre la station A et l'épicentre du feu E est désignée par b. On remarque que les angles données ne sont pas des angles intérieurs au triangle. Ils sont mesurés à partir de la verticale (le nord). On trouve les angles intérieurs par soustraction.

$$\angle A = 90° - 50° = 40° \text{ et } \angle B = 90° - 35° = 55° \text{ et } \angle E = 180° - 40° - 55° = 85°$$



Par la loi des sinus,

$$\frac{b}{\sin(55°)} = \frac{20 \text{ km}}{\sin(85°)} \iff b = \frac{(20 \text{ km})\sin(55°)}{\sin(85°)} \approx 16{,}45 \text{ km}$$

La distance cherchée est d'environ 16,45 km.

i. L'adjectif *quelconque* est employé pour insister sur le fait qu'on ne sait rien de particulier à propos d'un triangle.

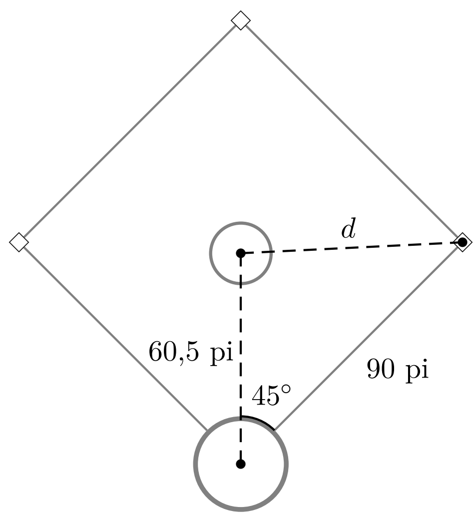
Il est parfois plus stratégique d'utiliser la loi des cosinus.

Exemple 8.28

Le diamant au baseball de la ligue majeure a quatre buts formant les sommets d'un carré dont les côtés mesurent 90 pieds. Le monticule du lanceur est situé à 60 pieds 6 pouces du marbre sur le segment reliant le marbre au deuxième but. À quelle distance se situe le monticule du premier but ?

Solution :

Étant donné qu'on connaît l'angle et la longueur de deux côtés du triangle illustré, il est préférable d'utiliser la loi des cosinus.



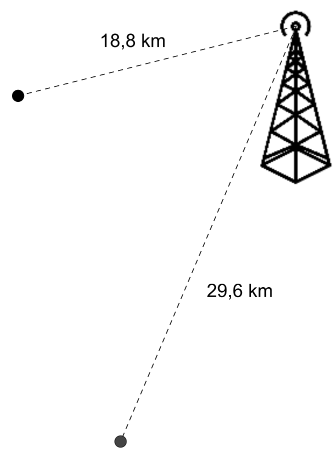
Puisque d est la longueur du côté opposé à l'angle de 45°,

$$d^2 = (60{,}5)^2 + 90^2 - 2 \cdot 60{,}5 \cdot 90 \cos(45^\circ) \approx 4059{,}86 \Longrightarrow d \approx 63{,}72,$$

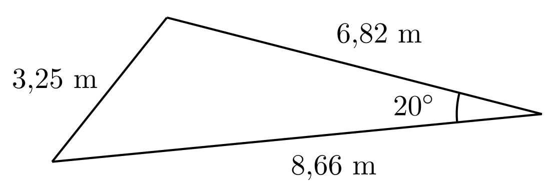
et comme 0,72 pi $\cdot$ 12 po/pi = 8,64 po, alors la distance est d'environ 63 pi 9 po.

Exercices

8.52 Deux personnes discutent au téléphone cellulaire. Si l'angle entre leurs signaux respectifs, par rapport au sommet de la tour, est de 60°, quelle est la distance qui les sépare ?



8.53 Considérez le triangle suivant.

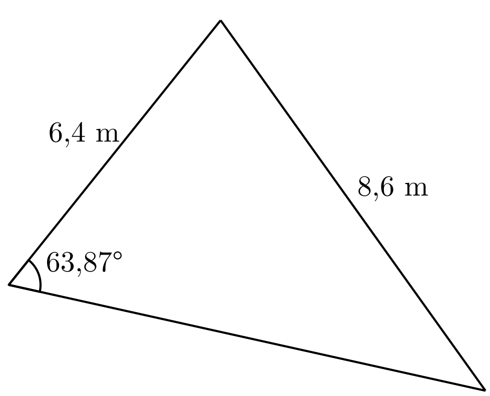


(a) Déterminez la mesure (inconnue) de l'angle aigu du triangle à l'aide de la loi des sinus.

(b) Déterminez la mesure de l'angle obtus.

(c) Que se passe-t-il lorsqu'on tente de trouver la mesure de l'angle obtus du triangle à l'aide de la loi des sinus ?

8.54 Considérez la figure suivante.



(a) Quelle est la mesure de l'angle opposé au côté de longueur 6,4 mètres ?

(b) Déterminez la longueur du troisième côté du triangle à l'aide de la loi des sinus.

(c) Calculez à nouveau la longueur du troisième côté mais, cette fois, à l'aide de la loi des cosinus.

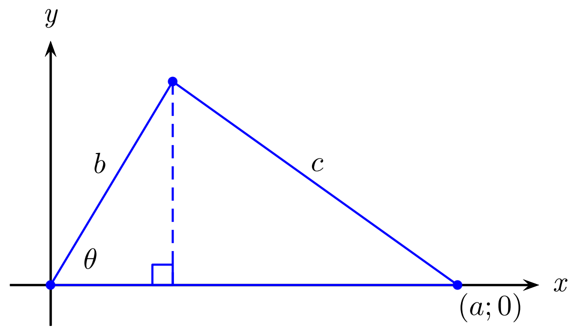
(d) Laquelle des lois s'applique le plus directement ?

(e) Déterminez l'aire du triangle.

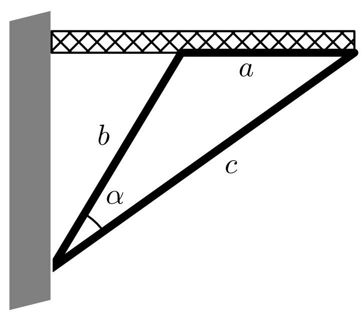
8.55 Démontrez la loi des cosinus dans le cas où le triangle a des côtés de longueur a, b et c et où θ est l'angle formé par les côtés de longueur a et b. Plus précisément, montrez que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Aide : Placez l'angle θ en position standard tel qu'illustré ci-dessous et exprimez les différentes longueurs comme des fonctions de θ.



8.56 Un support à tablette a des côtés de longueur a, b et c tel qu'illustré. Trouvez une expression pour l'angle α en termes de ces longueurs.



Réponses

Chapitre 8

Rép. 8.1 La longueur de l'hypoténuse est $\sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{106}$ cm
$\sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{106}} = \frac{5\sqrt{106}}{106}$, $\cos(\theta) = \frac{9}{\sqrt{106}} = \frac{9\sqrt{106}}{106}$, $\tan(\theta) = \frac{5}{9}$,
$\cot(\theta) = \frac{9}{5}$, $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{106}}{9}$ et $\csc(\theta) = \frac{\sqrt{106}}{5}$

Rép. 8.2 (a) La longueur inconnue est $\sqrt{8^2-6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm
$\sin(\theta) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ et $\tan(\theta) = \frac{3\sqrt{7}}{7}$
(b) La longueur inconnue est $\sqrt{14^2-7^2} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$ m
$\sin(\theta) = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\theta) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ et $\tan(\theta) = \frac{7\sqrt{3}}{7} = \sqrt{3}$

Rép. 8.3 (a) $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$ tandis que $2 \cdot \sin(30°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
(b) $\dfrac{\tan(60°)}{\tan(30°)} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3$ tandis que $\tan(2°) \approx 0{,}0349$
(c) $\sin^2(5°) = (\sin(5°))^2 \approx 0{,}0872^2 \approx 0{,}0076$ tandis que $\sin(25°) \approx 0{,}4226$

Rép. 8.4 Environ 15 m

Rép. 8.5 Environ 303 m

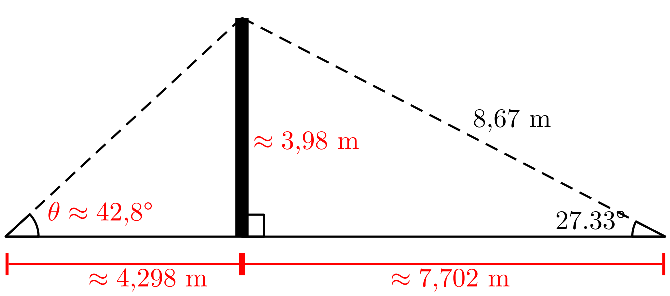
Rép. 8.6 $a \approx 5{,}50$ cm, $b \approx 3{,}58$ cm et $\alpha = 56{,}94°$

Rép. 8.7 $c \approx 5{,}697$ m, $\alpha \approx 34{,}42°$ et $\beta \approx 55{,}58°$

Rép. 8.8 $\alpha \approx 42{,}79°$

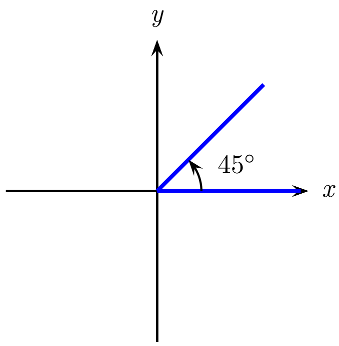
Rép. 8.9
(a) $x = 115°$
(b) $x \approx 30{,}2°$
(c) $x \approx 6$ cm
(d) $x = 55°$
(e) $x \approx 62{,}2°$
(f) $x = 15°$

Rép. 8.10

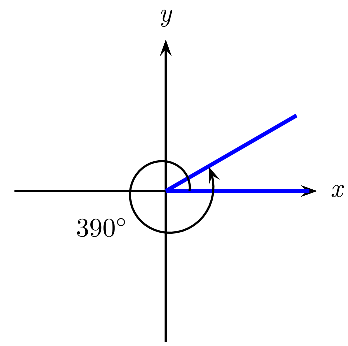


Rép. 8.11 environ 33,1 m

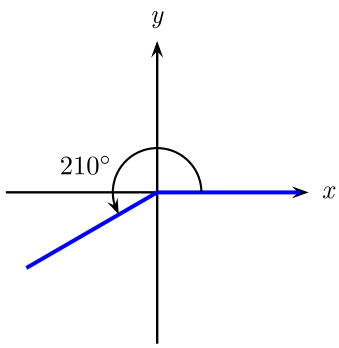
Rép. 8.12



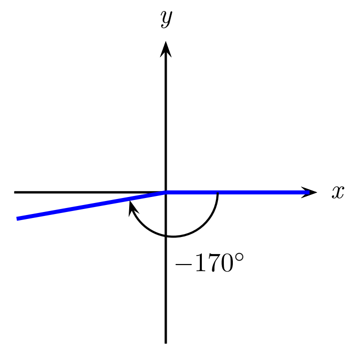
(a)



(c)



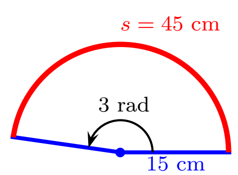
(b)



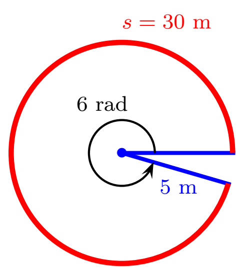
(d)

Rép. 8.13 (a) 30° (b) 135° (c) 120° (d) 300°

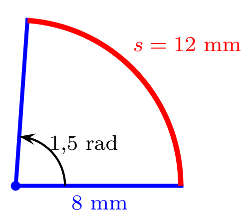
Rép. 8.14 (a) 3 rad



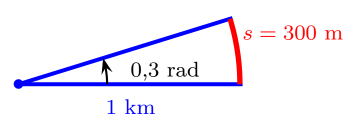
(b) 6 rad



(c) $\frac{3}{2} = 1{,}5$ rad



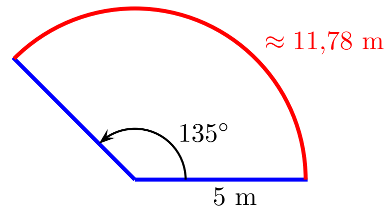
(d) 0,3 rad



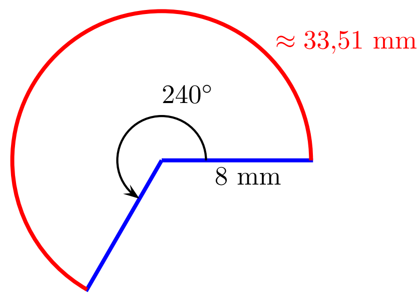
Rép. 8.15 (a) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$ rad
(b) $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$ rad
(c) $\pi \approx 3{,}1416$ rad
(d) $-\frac{5\pi}{4} \approx -3{,}9270$ rad
(e) $\frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618$ rad
(f) $-\frac{49\pi}{90} \approx -1{,}7104$ rad

Rép. 8.16 (a) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$
(b) $\frac{11\pi}{6}$ rad $= 330°$
(c) $\frac{7\pi}{4}$ rad $= 315°$
(d) $\frac{3\pi}{5}$ rad $= 108°$
(e) 10 rad $= \frac{1800}{\pi} \approx 572{,}96°$
(f) $-5{,}2$ rad $= -\frac{936}{\pi} \approx -297{,}94°$

Rép. 8.17 (a) $\theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$ rad, $r \cdot \theta = (5\text{ m}) \cdot (\frac{3\pi}{4}\text{ rad}) = \frac{15\pi}{4}$ m $\approx 11{,}78$ m



(b) $\theta = 240° = \frac{4\pi}{3}$ rad, $r \cdot \theta = (8\text{ mm}) \cdot (\frac{4\pi}{3}\text{ rad}) = \frac{32\pi}{3}$ mm $\approx 33{,}51$ mm



Rép. 8.18 $\frac{650\pi}{3} \approx 680{,}7$ mm
Validation. Puisque 120° est un peu plus de 2 rad, on s'attend à ce que le vélo parcourt une distance un peu plus grande que le diamètre du pneu. La valeur 680,7 mm est donc plausible.

Rép. 8.19 $\frac{120}{\pi} \approx 38{,}2$ km

Rép. 8.20 (a) $112\pi \approx 351{,}9$ m/min
(b) $40\pi \approx 125{,}7$ m/min
(c) Si deux points sur une pale de l'éolienne ont une même vitesse angulaire ω rad/min, le rapport entre les vitesses linéaires $v_1 = r_1\omega$ et $v_2 = r_2\omega$ est égal au rapport des rayons $\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}$ des mouvements circulaires.

Rép. 8.21 Les unités de longueur sont déterminées par les unités des axes du plan dans lequel on plonge le cercle trigonométrique. Celles-ci dépendent du contexte. Elles peuvent être des mètres, des cm, etc. Puisqu'il n'y a aucun contexte, on supposera simplement que les valeurs données sont en *unités de longueur.*

(a) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5234$ (b) $\frac{5\pi}{3} \approx 5{,}2360$ (c) $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472$ (d) 4

Rép. 8.22 (a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (e) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(b) $(0; -1)$ (d) $(-1; 0)$ (f) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Rép. 8.23 (a) 0 et aussi 2π (c) $\frac{7\pi}{4}$ (e) $\frac{2\pi}{3}$
(b) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$ (f) $\frac{\pi}{2}$

Rép. 8.24 (a) $-\pi$ (c) $-\frac{11\pi}{6}$ (e) $-\frac{4\pi}{3}$
(b) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{5\pi}{6}$ (f) $-\frac{\pi}{2}$

Rép. 8.25 Il y a nombre infini d'angles qui ont le même côté final.

(a) $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{7\pi}{2}$, $t = -\frac{\pi}{2}$ et $t = -\frac{5\pi}{2}$
(b) $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{7\pi}{3}$, $t = -\frac{5\pi}{3}$ et $t = -\frac{11\pi}{3}$
(c) $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{11\pi}{4}$, $t = -\frac{5\pi}{4}$ et $t = -\frac{13\pi}{4}$

Rép. 8.26 (a) $\sin(t) = \frac{1}{2}$ (b) $\cos(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\tan(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\cot(t) = -\sqrt{3}$ (e) $\sec(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (f) $\csc(t) = 2$

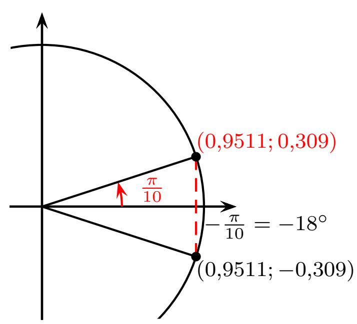
Rép. 8.27 (a) $\sin(t) \approx -0{,}6374$ (b) $\cos(t) \approx -0{,}7533$ (c) $\tan(t) \approx \frac{-0{,}6374}{-0{,}7533} \approx 0{,}8461$ (d) $\cot(t) \approx \frac{-0{,}7533}{-0{,}6374} \approx 1{,}1818$ (e) $\sec(t) \approx \frac{1}{-0{,}7533} \approx -1{,}3275$ (f) $\csc(t) \approx \frac{1}{-0{,}6374} \approx -1{,}5689$

Rép. 8.28 (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) -1 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) -1 (f) 0 (g) 1 (h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (i) -1 (j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

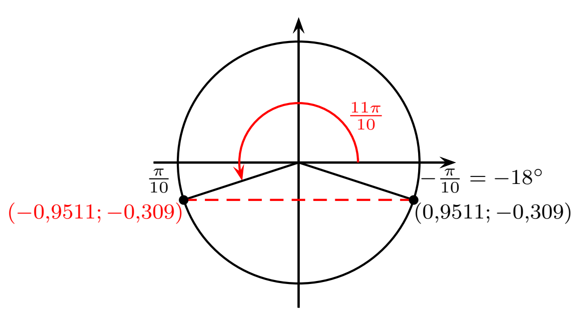
Rép. 8.29 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) 0 (e) $-\frac{1}{2}$ (f) $\sqrt{3}$ (g) $-\sqrt{3}$ (h) 0 (i) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (j) -1 (k) $\sqrt{3}$ (l) 1

Rép. 8.30 $-\frac{\pi}{10} = -18°$

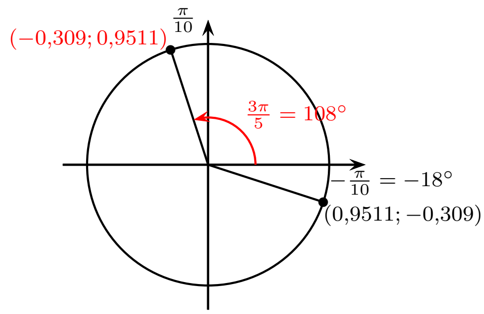
(a) Par symétrie par rapport à l'axe des x on obtient $\cos(18°) \approx 0{,}9511$.



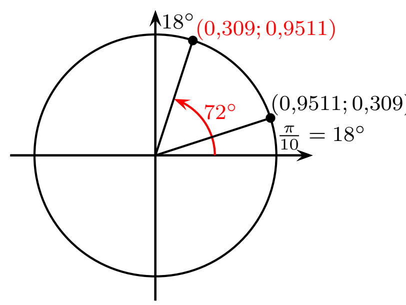
(b) Par symétrie par rapport à l'axe des y, sachant que $\frac{11\pi}{10} = \pi + \frac{\pi}{10}$, on obtient $\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right) \approx -0{,}309$.



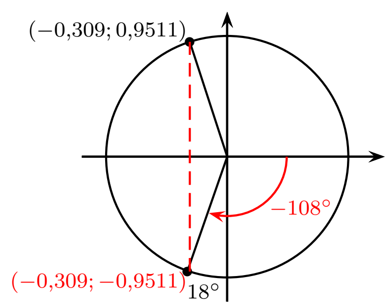
(c) Puisque $\frac{3\pi}{5} = \frac{6\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \approx -0{,}309$.



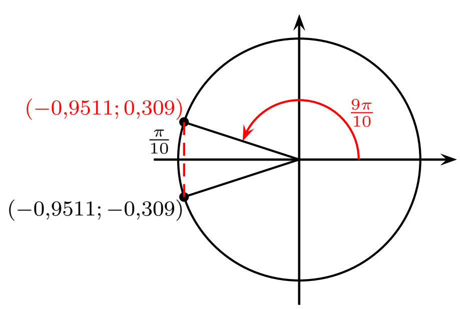
(d) Puisque $72° = 90° - 18°$, $\sin(72°) \approx 0{,}9511$.



(e) Puisque $-108° = -90° - 18°$, $\tan(-108°) \approx \frac{-0{,}9511}{-0{,}309} \approx 3{,}078$.



(f) Puisque $\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10}$, $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \approx -0{,}9511$.



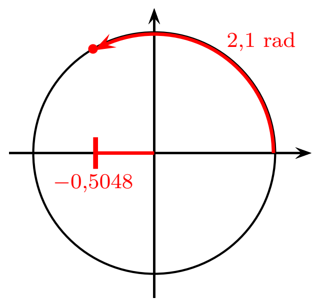
Rép. 8.31 (a) $\cos(2°)$ (b) $\sin(2°)$ (c) $\sin(2)$ (d) $\cos(1°)$ (e) $\cos(1)$ (f) $\sin(1)$

Rép. 8.32 (a) $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

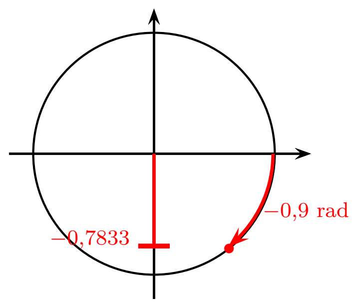
(b) $\csc\left(-\frac{35\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{35\pi}{2}\right)} = 1$

(c) $\sec(585°) = \frac{1}{\cos(585°)} = -\sqrt{2}$

Rép. 8.33 (a) $\cos(2{,}1) \approx -0{,}5048$

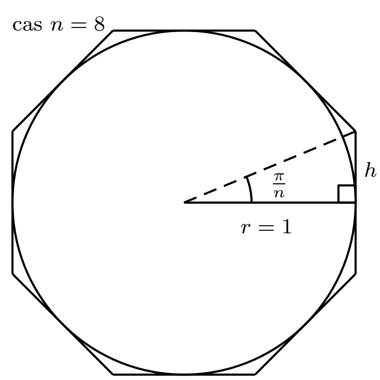


(b) $\sin(-0{,}9) \approx -0{,}7833$



Rép. 8.34 (a) 9,8 m/s^2 (b) environ 7,3 m/s

Rép. 8.35 (a) Utilisons le triangle de référence illustré ci-dessous. Il y a $2n$ triangles rectangles de ce type dans un polygone régulier à n côtés. L'angle central est donc de $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$. Puisque h est la longueur du côté opposé à l'angle central, $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{1}$ et l'aire du polygone est donc $n \cdot h = n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.



(b)

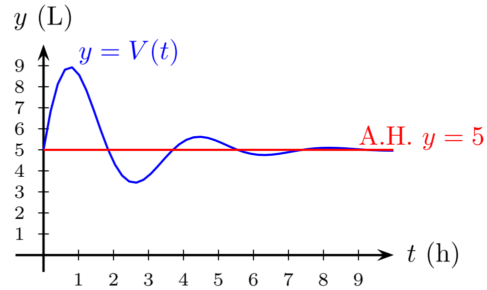
n	8	100	1000	10 000
$A(n)$	3,313708	3,142626	3.141602	3,141592

(c) La limite calcule l'aire du cercle de rayon 1 : $\pi = 3{,}141592\cdots$

Rép. 8.36 (a) $V(4) \approx 5{,}401$ L

(b) $TVM_{[3;6]} \approx 0{,}343$ L/h
Entre 15 h et 18 h, le volume d'eau augmente en moyenne d'environ 0,343 L/h.

(c) Oui, vers 5 L. Le graphe de la fonction volume a une asymptote horizontale d'équation $y = 5$, car $\lim_{t\to\infty} V(t) = 5$.



Rép. 8.37 (a) $A(\theta) = 50\cos(\theta)\sin(\theta)$

(b) L'aire est maximale pour $\theta \approx 0{,}785$ rad $\approx \frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$ et $b \approx 7{,}07$ cm et $h \approx 7{,}07$ cm

Rép. 8.38

(a) $-\frac{1}{2}$	(g) $\frac{5\pi}{6}$	(m) $-\frac{\pi}{3}$
(b) $-\frac{\pi}{6}$	(h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(n) $\frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{\pi}{3}$	(i) $\frac{2\pi}{3}$	(o) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(d) $-\frac{\pi}{2}$	(j) -1	(p) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	(k) $\frac{\pi}{4}$	(q) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(f) $\frac{\pi}{4}$	(l) $\sqrt{3}$	(r) $\frac{\pi}{4}$

Rép. 8.39 (a) $-\frac{4}{5}$

(b) $\frac{3}{5}$

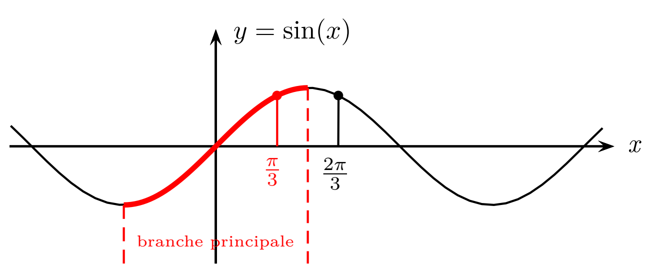
(c) $-\frac{3}{4}$

(d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = t \approx 2{,}4981$

(e) $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \pi - t \approx 0{,}6435$

(f) L'image de la fonction $\arccos(x)$ est $[0;\pi] \approx [0;3{,}1416]$ tandis que l'image de la fonction $\arcsin(x)$ est $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \approx [-1{,}5708;1{,}5708]$. Si on cherche l'angle obtus t, mieux vaut utiliser la fonction $\arccos(t)$.

Rép. 8.40 Non puisque l'angle $\frac{2\pi}{3}$ n'est pas sur la branche principale du sinus.



Rép. 8.41 (a) $\alpha = \arctan(12/15) \approx 0{,}6747$ rad $\approx 77{,}9°$, $\beta = \arctan(18/9) \approx 1{,}1071$ rad $\approx 63{,}4°$,
$\theta = \pi - \alpha - \beta \approx 1{,}3597$ rad $\approx 77{,}9°$

(b) $\theta(x) = \pi - \arctan(\frac{12}{x}) - \arctan(\frac{18}{24-x})$

(c) $]0;24[$

(d) À environ 12,6 m

Rép. 8.42 $\theta \approx 27{,}5°$

Rép. 8.43 (a) $\alpha \approx 0{,}296$ rad $\approx 17°$
(b) $\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}33}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1{,}5}{x}\right)$.
(c) $x \approx 2{,}23$ m et $\alpha \approx 0{,}389$ rad $\approx 22{,}3°$

Rép. 8.44 (a) On utilise l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dans laquelle on remplace $\sin x$ par $\frac{1}{3}$,

$$\cos^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \iff \cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Puisqu'on stipule que $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, le côté final de l'angle x se situe dans le deuxième quadrant, le cosinus doit donc être négatif. Ainsi, $\cos(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
(b) $\tan x = \frac{1/3}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
(c) $\cot x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{4}} = -2\sqrt{2}$
(d) $\sec x = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
(e) $\csc x = \frac{1}{1/3} = 3$

Rép. 8.45 (a) On commence par traduire chacune des expressions en termes de sinus et de cosinus. Ensuite, on effectue une mise au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}\tan x + \cot x = \sec x \csc x \quad &\iff \quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}\\ &\iff \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}\end{aligned}$$

Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, l'identité est démontrée.

(b) On effectue un produit croisé et on développe ensuite le côté gauche de l'équation.

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \quad &\iff \quad (1-\sin x)(1+\sin x) = (\cos x)^2\\ &\iff \quad 1 - (\sin x)^2 = (\cos x)^2\\ &\iff \quad 1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2\end{aligned}$$

Comme la dernière équation est une identité, la première l'est aussi.

(c) On effectue une mise au dénominateur commun du côté gauche de l'équation et on traduit en termes de cosinus son côté droit.

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} = 2\sec x \quad &\iff \quad \frac{(\cos x)^2 + (1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x}\\ &\iff \quad \frac{(\cos x)^2 + 1 + 2\sin x + (\sin x)^2}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x}\end{aligned}$$

Puisque $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\frac{(\cos x)^2 + 1 + 2\sin x + (\sin x)^2}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x} \quad &\iff \quad \frac{2+2\sin x}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x}\\ &\iff \quad \frac{2(1+\sin x)}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x}\\ &\iff \quad \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}.\end{aligned}$$

Comme la dernière équation est une identité, l'équation de départ l'est aussi.

(d) On effectue un produit croisé, on développe et on simplifie.

$$\begin{aligned}\frac{\tan x + \sin x}{1+\cos x} = \tan x \quad &\iff \quad \tan x + \sin x = (1+\cos x)\tan x\\ &\iff \quad \cancel{\tan x} + \sin x = \cancel{\tan x} + \cos x \tan x\\ &\iff \quad \sin x = \cos x \tan x\\ &\iff \quad \sin x = \cancel{\cos x}\cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\end{aligned}$$

Puisque $\sin x = \sin x$, l'équation de départ est bien une identité.

Rép. 8.46 (a) L'équation $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$ n'est pas une identité, les graphes ne coïncident pas. Par exemple, $\sin(0{,}6) + \sin(2\cdot 0{,}6) \approx 1{,}4967$ tandis que $\sin(3\cdot 0{,}6) = \sin(1{,}8) \approx 0{,}9738$.

(b) Les graphes de $y = 1-\sin^2 x$ et de $y = \cos^2 x$ semblent coïncider. En effet, $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ est une identité, car l'équation est équivalente à $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(c) L'équation $\cos 2x = 2\cos x$ n'est pas une identité, les graphes ne coïncident pas. Par exemple, $\cos(2\cdot 0) = \cos(0) = 1$ tandis que $2\cdot\cos(0) = 2$.

(d) Les graphes de $y = \sec x - \cos x$ et de $y = \tan x \sin x$ semblent coïncider. D'une part,

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

et, d'autre part,

$$\tan x \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot \sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Puisque les deux expressions sont égales à $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, il s'agit bien d'une identité.

Rép. 8.47 (a) $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{11\pi}{6}$

(b) $x = \arccos(0{,}35) \approx 1{,}213$ et $x = 2\pi - \arccos(0{,}35) \approx 5{,}07$

(c) $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{5\pi}{3}$

(d) $x = \arctan(-4{,}2) + k\cdot\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

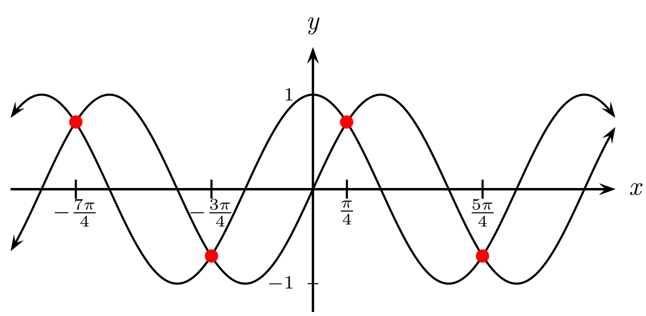
Rép. 8.48 (a) $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$

(b) $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{5\pi}{3}$

(c) $x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

(d) $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ alors $x = \frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

Rép. 8.49 (a) $x = \frac{(4k-3)\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y = \cos x$ et $y = \sin x$.



(b) $x = -2\pi$, $x = -\frac{4\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = 2\pi$ sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $y = \cos x$. *Vérifiez-le !*

(c) $x \in \mathbb{R}$
l'équation $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ est une identité, les deux graphes, celui de $y = \cos 2x$ et celui de $y = \cos^2 x - \sin^2 x$, coïncident quelle que soit la valeur $x \in \mathbb{R}$. *Vérifiez-le !*

(d) $x \approx -3{,}0938$, $x \approx -2{,}6758$, $x \approx -2{,}0518$, $x = 0$, $x \approx 2{,}0518$, $x \approx 2{,}6758$ et $x \approx 3{,}0938$ sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y = \tan x^2$ et $y = x \sin x$. *Vérifiez-le !*

Rép. 8.50 $\Phi \approx 0{,}8677 \approx 49{,}7°$

Rép. 8.51 (a) Si $y_0 = 0$, $2gy_0 = 0$ et

$$\frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right)\Bigg|_{y_0=0} = \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2}\right)$$

Les valeurs v et $\sin\theta$ étant positives dans ce contexte, $v\sin\theta > 0$ et $\sqrt{(v\sin\theta)^2} = v\sin\theta$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2}\right) &= \frac{v\cos\theta}{g}(v\sin\theta + v\sin\theta)\\ &= \frac{v\cos\theta}{g}(2v\sin\theta)\\ &= \frac{v^2 2\cos\theta\sin\theta}{g}\\ &= \frac{v^2\sin 2\theta}{g}.\end{aligned}$$

(b) On résout l'équation $p(\theta) = 45$ m pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{v^2}{g}\sin 2\theta = 45 \text{ pour } \theta \in [0; \frac{\pi}{2}] \Longleftrightarrow \theta \approx 0{,}574 \approx 32{,}9° \text{ ou } \theta \approx 0{,}9966 \approx 57°.$$

Deux angles sont donc possibles $\theta \approx 57°$ et $\theta \approx 32{,}9°$ et dans chacun des cas, on doit vérifier si l'obus frappe le mur.
On utilise l'équation

$$x = v_0 t\cos\theta$$

pour trouver le temps qu'il faut à l'obus pour être à 30 m du lieu du tir

$$30 = 22t\cos(0{,}574) \Leftrightarrow t \approx 1{,}62 \text{ sec}$$

$$30 = 22t\cos(0{,}9966) \Leftrightarrow t \approx 2{,}51 \text{ sec}$$

et on calcule sa hauteur, à ces moments, à l'aide de la formule

$$y = v_0 t\sin\theta - 4{,}905t^2.$$

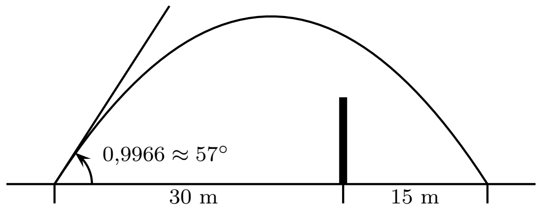
Dans le premier cas,

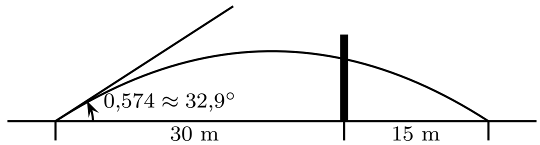
$$y = 22(1{,}62)\sin(0{,}574) - 4{,}905(1{,}62)^2 \approx 6{,}46 \text{ m}$$

et dans le deuxième cas,

$$y = 22(2{,}51)\sin(0{,}9966) - 4{,}905(2{,}51)^2 \approx 15{,}46 \text{ m}.$$

On ne retient donc que $\theta \approx 57°$ puisque dans l'autre cas, l'obus frappe le mur.





(c) $\frac{\pi}{4} = 45°$

Rép. 8.52 environ 25,94 km

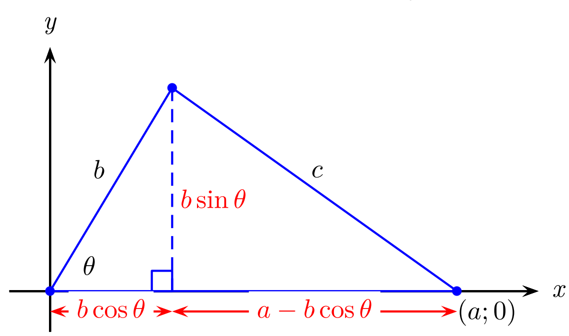
Rép. 8.53 (a) $\approx 46°$
(b) $\approx 114°$
(c) On obtient plutôt un angle aigu $\approx 66°$. Pour obtenir le bon angle, il faudrait calculer

$$180° - 66° = 114°.$$

La fonction $\sin^{-1}(x)$ ne donne que des angles aigus tandis que $\cos^{-1}(x)$ donne des angles aigus et obtus.

Rép. 8.54 (a) $\approx 41{,}9°$
(b) $\approx 9{,}22$ m
(c) $\approx 9{,}22$ m
(d) La loi du sinus, car l'angle connu n'est pas entre les deux segments dont on connait la longueur.
(e) $\approx 26{,}49$ m^2

Rép. 8.55 À l'aide des rapports trigonométriques dans les triangles rectangles, on trouve que la longueur du côté opposé à l'angle θ est $b\sin\theta$ et que celle de son côté adjacent est $b\sin\theta$.



Par Pythagore, on trouve $c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$. En développant et en simplifiant, on retrouve la loi des cosinus.

$$\begin{array}{rcll}
c^2 & = & (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2 & \text{on utilise le théorème de Pythagore} \\
& = & b^2\sin^2\theta + a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta & \text{on développe} \\
& = & b^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + a^2 - 2ab\cos\theta & \text{on met en évidence } b^2 \\
& = & b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta & \text{on utilise l'identité } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\
& = & a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta & \text{on commute}
\end{array}$$

Rép. 8.56 $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

Bibliographie

[1] Belanger, M., De Serres, M., et al. *Intervenir sur les langages en mathématiques et en sciences.* Mont-Royal : Modulo, 2003.

[2] Blitzer, R. *Precalculus.* New Jersey : Prentice-Hall, 2001.

[3] Bourget, B., Gagnon, P., et al. *Mathématique 064-424.* Montréal : Lidec, 1986.

[4] De Serres, M., and Groleau, J. *Mathématiques et langages.* Collège Jean-de-Brébeuf, Direction pédagogique, Service de la recherche, 1997.

[5] Hamel, J. *Mise à niveau mathématique.* Montréal : Éditions du renouveau pédagogique (ERPI), 2e édition, 2017.

[6] Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., et al. *Calcul différentiel et intégral : fonctions d'une variable (Le projet Harvard).* Montréal : Chenelière/McGraw-Hill, 1998. Supervision de l'édition française : Michel Beaudin, École de technologie supérieure.

[7] Stewart, J. *Calcul différentiel.* Montréal : Groupe Modulo inc., 2013. Supervision de l'édition française : Stéphane Beauregard et Chantal Trudel, Collège Bois-de-Boulogne.

Édition originale, octobre 2017, par Kathleen Pineau
Révisé, juillet 2020 et mai 2022, par Kathleen Pineau et Valérie Gouaillier

Responsable du projet et de la mise en page : Kathleen Pineau