ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – MAT265

SOLUTIONS DE L'EXAMEN INTRA DE PRATIQUE

École de technologie supérieure — Version du 09.02.2023

---

(12) **1.** En justifiant nos réponses, classifions chacune des équations différentielles suivantes comme *linéaire*, *séparable*, *linéaire et séparable* ou *ni l'une ni l'autre*. À cet effet, rappelons qu'une équation différentielle du premier ordre est dite *linéaire* (resp. *séparable*) si elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \qquad \left(\text{resp.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}\right).$$

(a) $y'(x) = 2y(x) + 1$

Cette É.D. est à la fois linéaire et séparable. En effet, $\frac{dy}{dx} + (-2)y = 1$ donc $p(x) = -2$ et $q(x) = 1$ et on peut aussi immédiatement séparer les variables en écrivant que $\frac{dy}{2y+1} = 1\,dx$. Donc $f(x) = 1$ et $g(y) = \frac{1}{2y+1}$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} - 2y^2 = 3$

Cette É.D. n'est pas linéaire à cause du terme en y^2. Mais elle est séparable puisqu'on peut l'écrire sous la forme $\frac{dy}{2y^2+3} = 1\,dx$.

(c) $\dfrac{dy}{dt} + t^2 y = t$

Cette É.D. est linéaire. La variable indépendante est t, la fonction $p(t)$ est t^2 et la fonction $q(t)$ est t. Mais puisque l'expression $t - t^2\,y$ ne peut être factorisée en un bloc en t multiplié ou divisé par un bloc en y, l'É'D. n'est pas séparable.

(d) $z\dfrac{dz}{dy} = \cos(3y) - 2z$

Ici la variable dépendante est z tandis que la variable indépendante est y. Cette É.D. est ni linéaire à cause du terme $z\frac{dz}{dy}$ ni séparable puisqu'on ne peut séparer les variables dans $\frac{\cos(3y)-2z}{z}$.

---

(12) **2.** Vérifions si l'expression ou la fonction donnée est bien solution de l'équation différentielle qui l'accompagne :

(a) $y(x) = \sin(3x)$ et $y''(x) + 4y(x) = 0$

On calcule les dérivées : on a $y'(x) = 3\cos(3x)$ et $y''(x) = -9\sin(3x)$. Et on substitue dans l'équation différentielle pour obtenir $y''(x) + 4y(x) = -5\sin(3x) \neq 0$. Donc **NON**.

(b) $y = (x+10)\,e^x$ et $y' - y = e^x$

On calcule les dérivées en utilisant la règle du produit. On a

$$y' = (1)e^x + (x+10)e^x = e^x(1+x+10) = (x+11)e^x \Longrightarrow y' - y = (x+11)e^x - (x+10)e^x = e^x.$$

Donc **OUI**.

(c) $y = t^{3/2}$ et $4t^2y'' - 3y = 0$

On calcule les dérivées $y' = \frac{3}{2}t^{1/2}$ et $y'' = \frac{3}{4}t^{-1/2}$. Alors

$$4t^2y'' - 3y = 4t^2 \cdot \frac{3}{4}t^{-1/2} - 3t^{3/2} = 3t^{3/2} - 3t^{3/2} = 0.$$

Donc **OUI**.

---

(11) **3.** Considérons le problème

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 1, y(0) = 1\,.$$

(a) Avant même de résoudre, pourquoi peut-on affirmer qu'il existe une solution unique définie au voisinage du point (0, 1) ?

Le problème est de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$ avec $f(x,y) = 2y+1, x_0 = 0, y_0 = 1$. La fonction f ainsi que sa dérivée partielle par rapport à y (qui est simplement 2), sont continues dans un voisinage du point (0, 1). Alors les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sont satisfaites. Il existe donc $\delta > 0$ et une unique fonction défiinie sur l'intervalle ouvert $-\delta < x < \delta$ satisfaisant le problème.

(b) Vérifions que la fonction $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$ est bien une solution du problème.

La fonction donnée satisfait bien la condition initiale puisque $f(0) = \frac{3}{2}e^0 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$. Et l'É.D. est bien vérifiée puisque

$$f'(x) = \frac{3}{2}\cdot 2\,e^{2x} - 0 = 3e^{2x} \Rightarrow f'(x) - 2f(x) = 3e^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\right) = 3e^{2x} - 3e^{2x} + 1 = 1\,.$$

(c) Montrons comment cette solution a été trouvée en utilisant le fait que la solution générale de l'équation différentielle $y' + p(x)\,y = q(x)$ est donnée par

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx + C\right) \quad \text{avec} \quad \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}\,.$$

On utilise la formule de l'É.D. linéaire d'ordre un avec $p(x) = -2$ et $q(x) = 1$. On a donc $\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$ et alors

$$y = \frac{1}{e^{-2x}}\left(\int e^{-2x}\,1\,dx + C\right) = e^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{-2} + C\right) = -\frac{1}{2} + C\,e^{2x}.$$

On trouve la constante C en utilisant la condition initiale. On a $1 = \frac{1}{2} + C$, d'où $C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

---

(15) **4.** Considérons l'équation différentielle d'ordre un suivante avec condition initiale :

$$\frac{dy}{dx} = 3y + \sin(2x),\ y(0) = 1\,.$$

(a) Utilisons la solution retournée par la commande `deSolve()` de notre calculatrice et utilisons-la pour trouver la valeur de $y(0.5)$.

La commande `deSolve()` peut ou non inclure la condition initiale. Si c'est le cas, on trouvera alors la réponse suivante :

$$y = \frac{15e^{3x}}{13} - \frac{\sqrt{13}\sin\left(2x + \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{13}\,.$$

Si la condition initiale n'a pas été utilisée, Nspire n'applique pas sa commande `tCollect()` et retourne la solution suivante qui contient une constante :

$$y = C\,e^{3x} - \frac{2\cos(2x)}{13} - \frac{3\sin(2x)}{13}\,.$$

Il faut alors trouver cette constante et ensuite la valeur de $y(0.5)$. On trouve $y(0.5) = 4.89387$. Notons que la présence dans la réponse du terme e^{3x} nous indique déjà que la solution va tendre vers l'infini lorsque x tendra vers l'infini. Cela semble déjà éliminer la figure 2 et la réponse à la question **(d)** est donc la figure 1. Notons aussi que les pentes dans le premier quadrant devraient devenir de plus en plus positives au fur et à mesure que y croît puisqu'un sinus est majoré par 1 et qu'on a $y' = 3y + \sin(2x)$. La figure 2 montre beaucoup trop de segments de droite ayant des pentes négatives dans le premier quadrant.

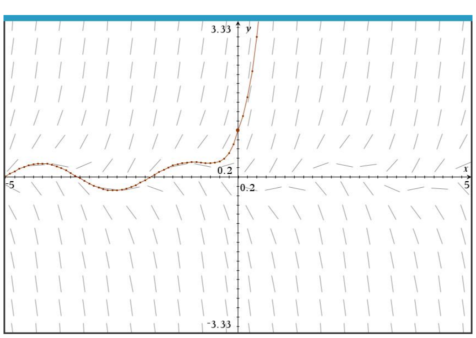

FIGURE 1 – Champ de pentes

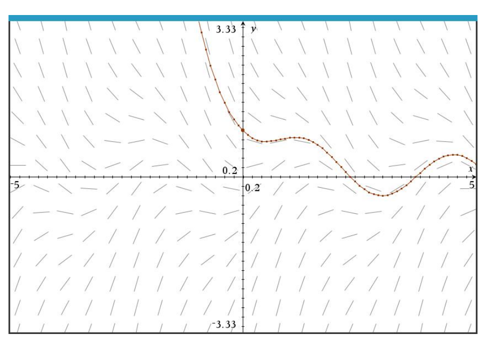

FIGURE 2 – Champ de pentes

(b) Appliquons la méthode d'Euler en $n = 5$ étapes pour trouver une valeur approchée de $y(0.5)$.

Avant d'utiliser la calculatrice, il n'est jamais inutile de calculer quelques valeurs "à la main" de la façon suivante (cela permet ensuite de savoir si l'on a bien entré les commandes dans Nspire). On sait que la méthode d'Euler nous demande de choisir un pas h et ensuite d'appliquer les formules montrées plus bas, sachant que dans notre problème on a $f(x, y) = 3y + \sin(2x)$, qu'on a $y(0) = 1$ et qu'on cherche à estimer la valeur de $y(0.5)$ en $n = 5$ étapes. Le pas sera donc $h = \frac{0.5-0}{5} = 0.1$. Les formules pour appliquer la méthode d'Euler sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m + h \\ y_{m+1} = y_m + h\, f\left(x_m, y_m\right) \quad \text{pour } m \text{ allant de } 0 \text{ à } n-1 \end{cases}$$

Un premier calcul donne $y_1 = 1 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1 + 0.1 \cdot 3(1 + \sin(0)) = 1 + 0.3 = 1.3$. Un second calcul donne $y_2 = 1.3 + 0.1 \cdot f(0.1, 1.3) = 1.3 + 0.1 \cdot f(0.3 + \sin(2.6)) = 1.70987$. On utilise maintenant les fonctions de Nspire qui sont à notre disposition. La figure 3 montre quelques approches et nous rassure sur nos propres calculs !

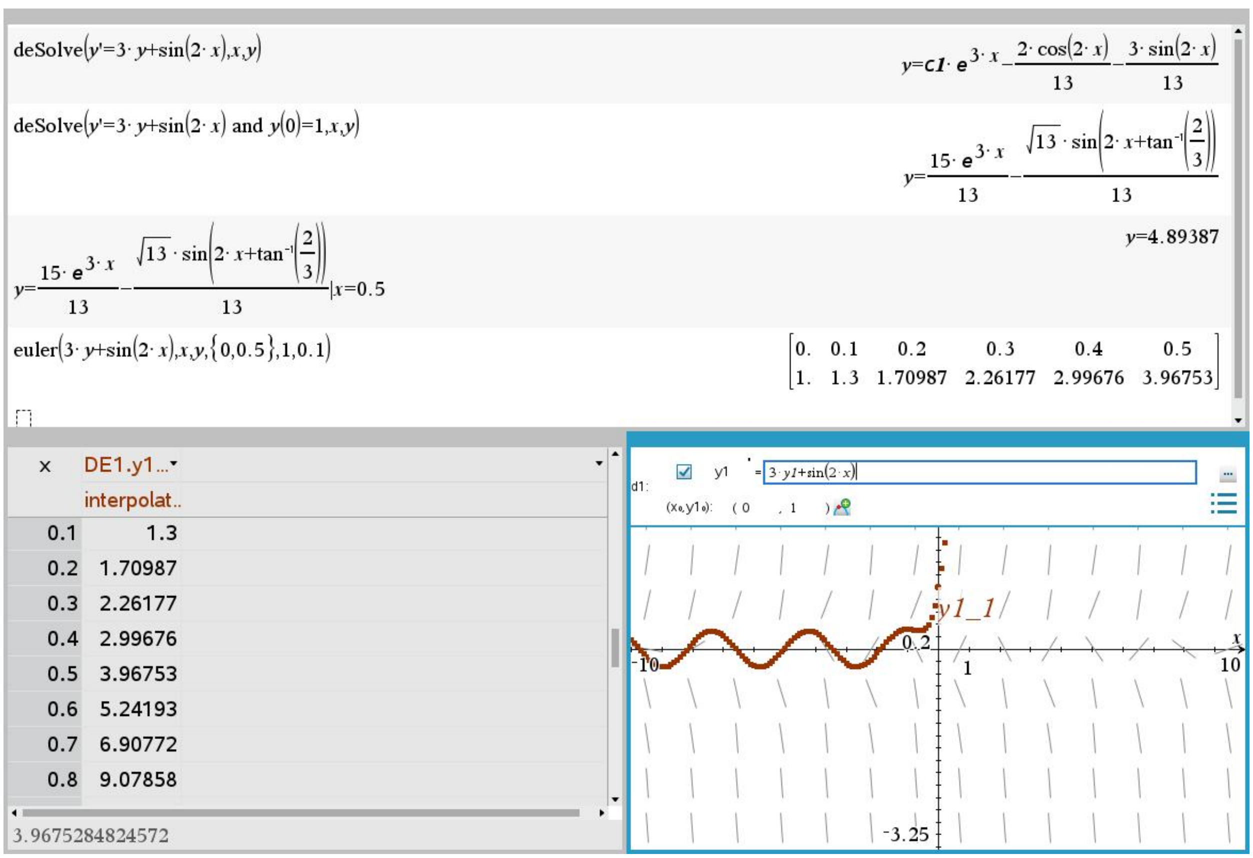

FIGURE 3 – Résolution symbolique et méthode d'Euler pour la question 4

(c) Si $y_0(x) = 1$, utilisons la méthode des itérations de Picard pour trouver la fonction $y_2(x)$.

Cette méthode consiste à remplacer le problème $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ par l'équation intégrale $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)\, dt$ et de commencer en prenant, en premier, $y(t) = y_0$. Ainsi,

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(t, 1)\, dt = 1 + \int_0^x (3 + \sin(2t))\, dt = -\frac{\cos(2x)}{2} + 3x + \frac{3}{2};$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_1(t))\, dt.$$

La calculatrice trouve l'expression suivante pour $y_2(x)$:

$$y_2(x) = -\frac{\sqrt{13}\sin\left(2x + \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{4} + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x}{2} + \frac{3}{2}.$$

On trouve $y_2(0.5) = 3.97375$. Notez que si l'on conitnuait les itérations de Picard, tout serait trouvé en mode exact (Nspire serait en mesure de calculer chaque intégrale ici) et cela convergerait vers la vraie valeur de 4.89387.

En résumé, pour la question 4 et la valeur en $x = 0.5$, on a trouvé ceci :

Méthode utilisée	**Valeur trouvée** en $x = 0.5$
Solution symbolique	4.89387
Méthode d'Euler en 5 étapes	3.96753
Seconde itération de Picard	3.97375

(d) Nous avons déjà répondu à cette question. C'est la figure 1.

---

(15) **5.** Pour cette question, *indiquons* les équations différentielles que nous aurons fait résoudre en spécifiant clairement le sens positif du déplacement que nous aurons choisi. Dans nos calculs, utilisons $g = 9.81$ m/s^2.

Pour un problème d'objet qui aurait même pu, au départ, avoir été lancé vers le haut d'une certaine hauteur pour retomber par la suite, nous préférons choisir le sens positif du déplacement vers le haut. Le sol correspondra alors à la position 0. Si $y(t)$ désigne la position de cet objet à l'instant t, donc la hauteur au-dessus du sol, alors la vitesse $v(t)$ qui est la dérivée de la position par rapport au temps sera positive lorsqu'un objet monte et sera négative lorsqu'un objet descend. Il est bien important de ne pas oublier que la vitesse a un signe.

(a) Un objet de 80 kg est en chute libre depuis une hauteur de 2 000 m avec une vitesse initiale nulle. La force de résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse avec une constante de proportionnalité égale à 15 N·s/m. Quel temps mettra-t-il pour toucher le sol ?

Avec notre choix du sens positif, lorsque la force de résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse, la deuxième loi de Newton ($F = m\,a$) nous donne l'É.D. suivante et ce, *que l'objet monte ou descende* :

$$m\frac{dv}{dt} = -m\,g - k\,v \quad \text{où} \quad k > 0\,.$$

En effet, la force gravitationnelle est dirigée vers le bas, ce qui explique le $-m\,g$. Quand l'objet monte, la vitesse est positive et la force de résistance de l'air est aussi dirigée vers le bas, ce qui explique le second terme $-k\,v$. Quand l'objet descend, la force gravitationnelle est encore (toujours) dirigée vers le bas mais la force de résistance de l'air est dirigée vers le haut. Sauf que la vitesse étant négative, la force de résistance de l'air est encore égale à $-k\,v$ ("un moins multiplié par un moins donne un plus"). Une fois l'équation différentielle résolue, on aura la vitesse $v(t)$ et on trouvera ensuite la position en utilisant le théorème fondamental du calcul : si $y(t)$ désigne la postion à l'instant t, si y_0 désigne la position initiale, alors on sait que

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)\,ds\,.$$

Avec les valeurs données, la résolution de l'É.D. donne directement la vitesse (puisque l'É.D. est linéaire ici) et les calculs pour y arriver indiquent que le temps pour toucher le sol est de 43.5581 s. La figure 4 plus loin montre les calculs : la commande `exact()` a été placée devant la commande `deSolve()` pour éviter d'inonder l'écran de décimales. Nous avons aussi fourni des informations pertinentes qui donnent une idée de la vitesse limite, du temps pour en attteindre 99% et de la hauteur à laquelle est rendu l'objet à différents moments.

(b) Un second objet tombe d'une hauteur de 2 500 m et sa masse est de 75 kg. Dans un milieu où la force de résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse avec une constante de proportionnalité égale à $\frac{1}{8}$ kg/m. Quel temps mettra-t-il pour toucher le sol ?

Lorsque la force de résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse et qu'un objet a été lancé verticalement d'une hauteur h_0 avec une vitessi initiale v_0 (positive si lancé vers le haut, négative si lancé vers le bas), il faut nécessairement distinguer deux équations différentielles (l'une pour la montée, l'autre pour la descente) puisque v^2 n'est jamais négatif ! Pour la montée, l'É.D. serait

$$m\frac{dv}{dt} = -m\,g - k\,v^2, \quad v(0) = v_0\,.$$

Pour la descente, l'É.D. serait

$$m\frac{dv}{dt} = -m\,g + k\,v^2, \quad v(0) = 0\,.$$

La force de résistance de l'air étant proportionnelle au carré de la vitesse, l'É.D. à faire résoudre n'est pas linéaire ici mais plutôt séparable :

$$75v' = -75\cdot 9.81 + \frac{1}{8}v^2, \quad v(0) = 0\,.$$

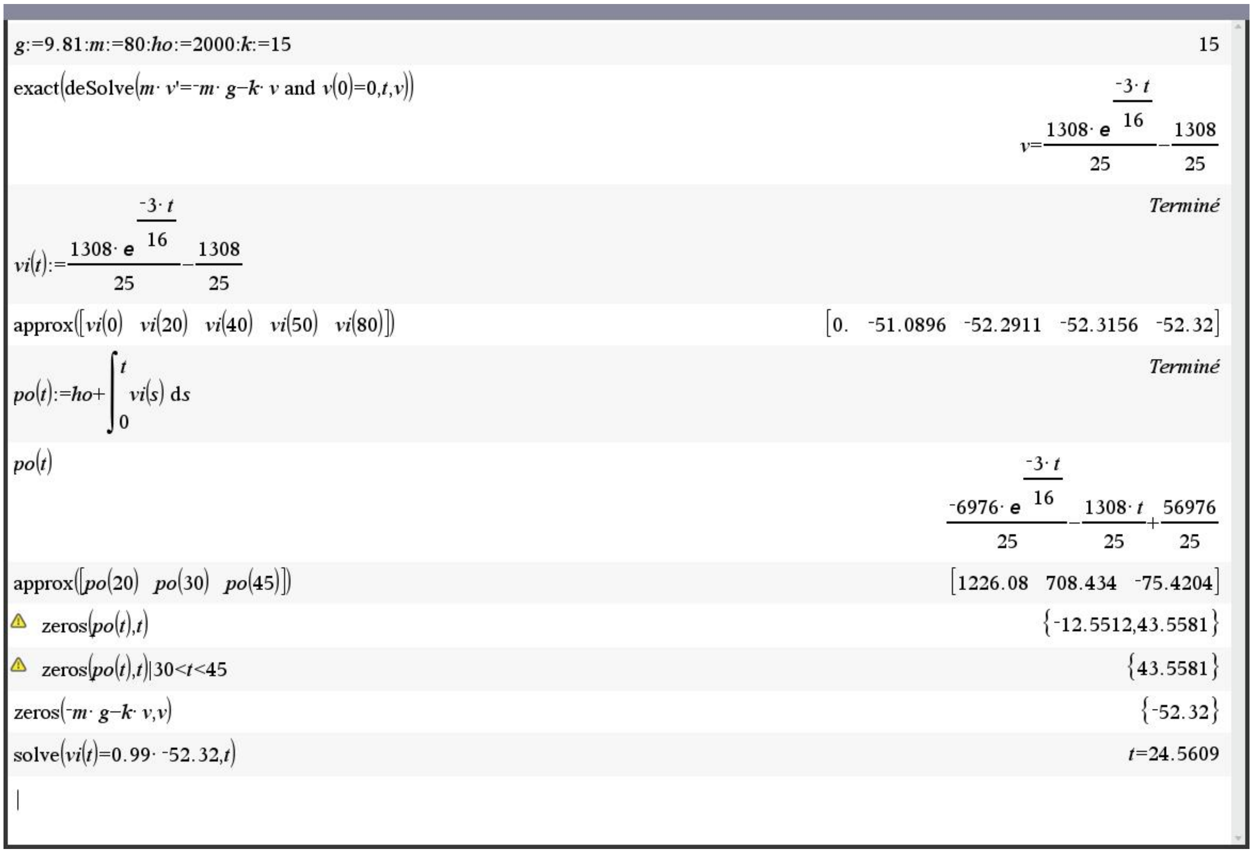

FIGURE 4 – Calculs pour la question 5a

Rappelons que lorsque l'unité imaginaire i apparaît dans une expression, cela ne signifie pas pour autant que cette expression est complexe. Il suffira d'utiliser une commande comme `cSolve()`. Aussi, à cause de la formule intégrale

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{a}\text{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right),$$

il y a de fortes chances que la vitesse soit donnée par une fonction tangente hyperbolique.

Cela est aussi dû au fait que le réglage du classeur Nspire utilisé pour faire les solutions et tout au long du cours MAT265 est le format `Rectangulaire` lorsque vient le temps de faire le choix du réglage `Réel ou Complexe`.

Le format réel aurait donné un logarithme contenant des valeurs absolues puisque la primitive retournée par Nspire pour l'expression $\frac{1}{a^2-x^2}$ est différente.

Mais en résolvant pour la vitesse, plusieurs réponses seraient apparues nous forçant à bien choisir l'intervalle de temps.

La figure 5 montre les calculs refilés à Nspire afin de trouver que le temps requis pour toucher le sol est de 38.0063 s. Nous avons encore fait des calculs afin d'observer comment la vitesse diminue (mais augmente en valeur absolue) lorsque le temps augmente ainsi que d'évaluer différentes hauteurs. La vitesse limite est atteinte en un peu moins de 21 s.

$g:=9.81:m:=75:ho:=2500:k:=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\text{exact}\left(\text{deSolve}\left(m\cdot v'=-m\cdot g+\frac{1}{8}\cdot v^2 \text{ and } v(0)=0,t,v\right)\right)$	$\frac{\sqrt{654}\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{654}\cdot v-1962}{\sqrt{654}\cdot v+1962}\right)}{3924}-\frac{\pi\cdot\sqrt{654}}{3924}\cdot \boldsymbol{i}=\frac{t}{600}$
$\text{cSolve}\left(\frac{\sqrt{654}\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{654}\cdot v-1962}{\sqrt{654}\cdot v+1962}\right)}{3924}-\frac{\pi\cdot\sqrt{654}}{3924}\cdot \boldsymbol{i}=\frac{t}{600},v\right)$	$v=-3\cdot\sqrt{654}\cdot\tanh\left(\frac{\sqrt{654}\cdot t}{200}\right)$
$vi(t):=-3\cdot\sqrt{654}\cdot\tanh\left(\frac{\sqrt{654}\cdot t}{200}\right)$	*Terminé*
$po(t):=ho+\int_0^t vi(z)\,dz$	*Terminé*
$po(t)$	$600\cdot\ln\left(\frac{2}{e^{\frac{\sqrt{654}\cdot t}{100}}+1}\right)+3\cdot\sqrt{654}\cdot t+2500$
⚠ $\text{zeros}(po(t),t)$	$\{-38.0063,38.0063\}$
$\text{zeros}\left(-m\cdot g+\frac{1}{8}\cdot v^2,v\right)\mid v<0$	$\{-76.7203\}$
$\text{solve}(vi(t)=0.99\cdot -76.7203,t)$	$t=20.6986$
$\text{approx}\left(\begin{bmatrix} vi(0) & vi(15) & vi(30) & vi(40)\\ po(0) & po(15) & po(30) & po(40)\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix} 0. & -73.4791 & -76.6489 & -76.7147\\ 2500. & 1752.27 & 614.001 & -152.944\end{bmatrix}$

FIGURE 5 – Calculs pour la question 5b

---

(15) **6.** Considérons un circuit électrique où sont branchés en série une résistance $R = 20\ \Omega$ et un condensateur $C = 1/100$ F avec une source, en volts, donnée par

$$E(t) = 100e^{-t} + 30\sin(t)\ .$$

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le courant commence à circuler. On considère que le condensateur a une tension initiale nulle.

(a) Posons l'équation différentielle de ce circuit.

L'É.D. d'un circuit RC est la suivante :

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = E(t)\,.$$

(b) Faisons résoudre cette équation différentielle (commande `deSolve()` ou fonction `cir_rc()` de la librairie `kit_ets_mb`) pour trouver la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$.

La figure 6 montre comment on a trouvé que la tension aux bornes du condensateur est donnée par

$$v_C(t) = 125e^{-t} - \frac{1550e^{-5t}}{13} - \frac{75\cos(t)}{13} + \frac{375\sin(t)}{13}.$$

(c) Trouvons la *tension maximale* atteinte aux bornes du condensateur.

La figure 6 montre qu'il peut être risqué de faire appel à la fonction `fMax()` si l'on ne limite pas le domaine de la recherche. Et limiter le domaine de la recherche est facilité par un graphique. On trouve une tension maximale atteinte très rapidement après ½ s, d'une valeur de 74.8 V. Pour faire le graphique qu'on voit à la figure 7, nous avons simplement ouvert une page graphique (en entrée graphique *fonction*) et posé $f1(x) = tension\_cond(x)\big|x \geq 0$. Nous avons ensuite choisi un intervalle de temps et ajusté la fenêtre.

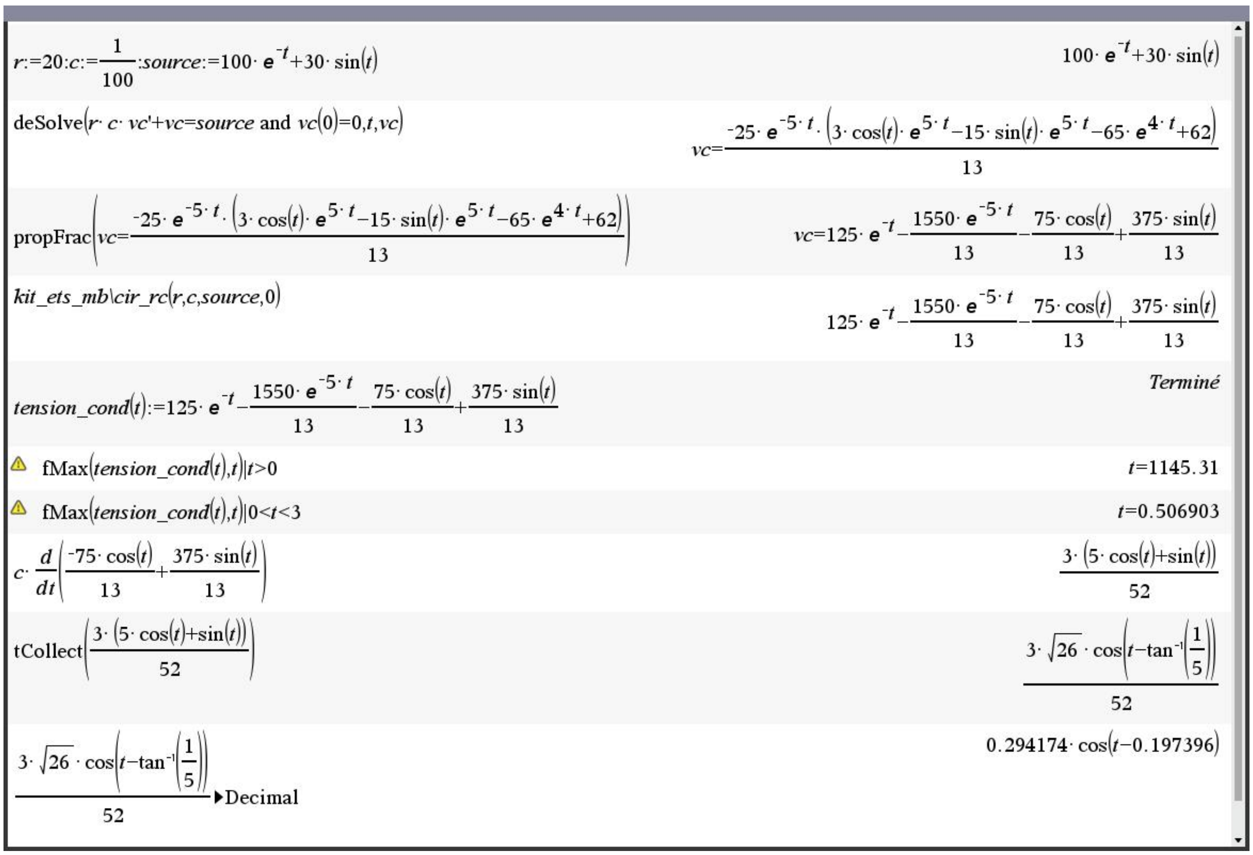

FIGURE 6 – Calculs pour la question 6

(d) Trouvons l'amplitude du *courant en régime permanent*.

On ne conserve que les termes en sinus et en cosinus de la tension aux bornes du condensateur, dérive cela par rapport au temps et multiplie par la valeur du condensateur. En effet, les termes avec des fonctions exponentielles resteraient de même nature en les dérivant et tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini, donc n'interviennent pas dans le régime permanent. On trouve une amplitude de 0.294174 A pour le courant en régime permanent.

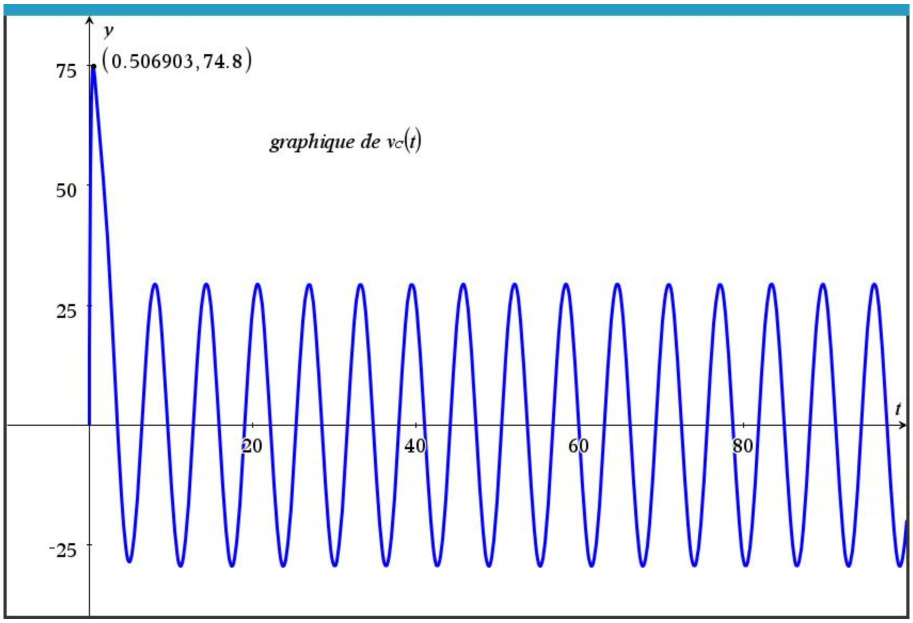

FIGURE 7 – Graphique de la tension aux bornes du condensateur (prob. 6)

---

(15) **7.** Résolvons chacune des équations différentielles suivantes en utilisant la *méthode des coefficients indéterminés.*

Indiquons clairement le candidat proposé que vnus aurons substitué dans la calculatrice et *montrons le système d'équations* que nous aurons fait résoudre afin de trouver les différents coefficients.

(a) $y'' + 9y' + 14y = 2\sin(3x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

L'équation caractéristique est $D^2 + 9D + 14 = 0$, d'où $(D+2)(D+7) = 0$. La solution complémentaire est donc $y_c = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{-7x}$. Le candidat pour la solution particulière est de la forme $y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$. Lorsqu'on le substitue dans l'É.D., on obtient ceci :

$$(5A + 27B)\cos(3x) + (5B - 27A)\sin(3x) = 2\sin(3x) = 0\cos(3x) + 2\sin(3x)\,.$$

Ce qui signifie que $5A + 27B = 0$, $5B - 27A = 2$. On fait résoudre ce système de deux équations linéaires à deux inconnues et trouve $A = -\frac{27}{377}$ et $B = \frac{5}{377}$. La solution *générale* de l'É.D. est donc trouvée. On la dérive par rapport à x et on substitue $x = 0$ dans la solution ainsi que dans la dérivée par rapport à x de la solution. On fait résoudre le système d'équations et trouve $c_1 = \frac{19}{65}$ et $c_2 = -\frac{32}{145}$. La solution du problème est donc

$$y = \frac{19e^{-2x}}{65} - \frac{32e^{-7x}}{145} + \frac{5\sin(3x)}{377} - \frac{27\cos(3x)}{377}$$

(b) $y'' + 16y' = x^2 + 5e^{-16x}$

L'équation caractéristique est $D^2 + 16D = 0$. Donc $D(D+16) = 0$, donc $D = 0$ ou $D = -16$. On a encore deux racines réelles et distinctes et la solution de l'équation complémentaire est donc $y_c = c_1\, e^{0x} + c_2\, e^{-16x} = c_1 + c_2\, e^{-16x}$. Le còté droit de l'É.D. est formé d'un polynôme de degré deux (le terme x^2) et d'une exponetielle (le terme $5e^{-16}$). Par le principe de superposition (dû au fait que l'É.D. est *linéaire*), on peut trouver une première solution particulière pour le problème $y'' + 16y' = x^2$, ensuite une seconde solution particulière pour le problème $y'' + 16y' = 5e^{-16x}$ et les additionner.
Le candidat pour le terme x^2 devrait être un polynôme de degré deux sauf que le coeffcient de y du côté gauche de l'É.D. est nul. Donc le premier candidat est de la forme $y_{p1} = x(A\,x^2 + B\,x + C) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x$. Le second candidat devrait être de la forme $D\,e^{-16x}$ sauf que e^{-16x} fait déjà partie de la solution complémentaire. Le candidat sera donc $y_{p2} = D\,x\,e^{-16x}$. La figure 8 montre qu'on a trouvé la solution générale suivante :

$$y = c_1 + c_2\, e^{-16x} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^2}{256} + \frac{x}{2048} + \frac{-5x\,e^{-16x}}{16}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

La dernière ligne de la figure 8 montre aussi que la commande `deSolve()` qui utilise la méthode de variation des paramètres introduit des constantes numériques inutiles dans sa réponse.

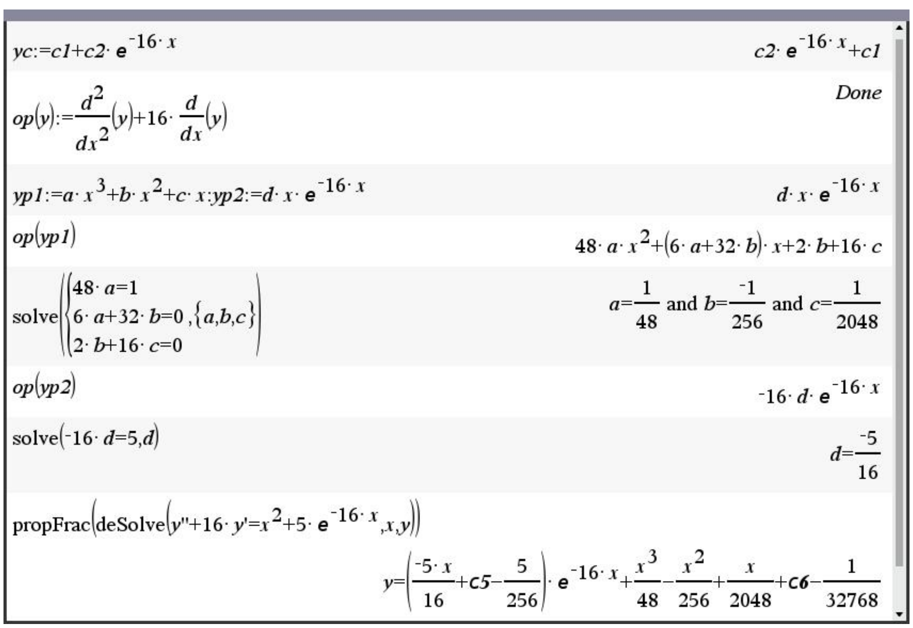

FIGURE 8 – Calculs pour la question 7b

(c) $y''' - y'' + y' - y = -10\cos(2x)$

On commence par trouver les racines de l'équation caractéristique $D^3 - D^2 + D - 1 = 0$ et on trouve 1 et $\pm i$. Cela pouvait se faire à la main comme suit (au pire, on aurait utilisé la commande `cPolyRoots()`) :

$$D^3 - D^2 + D - 1 = D^2\,(D-1) + (D-1) = (D-1)\left(D^2+1\right).$$

La solution complémentaire est donc $y_c = c_1\,e^x + c_2\,\cos(x) + c_3\,\sin(x)$. Puisque $\cos(2x)$ n'en fait pas partie, le candidat pour la solution particulière est alors de la forme $A\cos(2x) + B\sin(2x)$. On trouve facilement la réponse finale suivante :

$$y = c_1\,e^x + c_2\,\cos(x) + c_3\,\sin(x) + \frac{4\sin(2x)}{3} - \frac{2\cos(2x)}{3}$$

avec c_1, c_2 et c_3 sont des constantes réelles arbitraires.

Nspire ne résout pas les É.D. d'ordre supérieur à deux mais peut nous permettre de vérifier notre réponse :

$$so := c1\cdot \mathbf{e}^x + c2\cdot\cos(x) + c3\cdot\sin(x) + \frac{4\cdot\sin(2\cdot x)}{3} - \frac{2\cdot\cos(2\cdot x)}{3}$$

$$\frac{^-2\cdot\cos(2\cdot x)}{3} + \frac{4\cdot\sin(2\cdot x)}{3} + c2\cdot\cos(x) + c3\cdot\sin(x) + c1\cdot\mathbf{e}^x$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(so) - \frac{d^2}{dx^2}(so) + \frac{d}{dx}(so) - so \qquad {}^-10\cdot\cos(2\cdot x)$$

FIGURE 9 – Vérification directe pour la réponse de la question 7c

---

(5) **8.** Indiquons si chacun des énoncés suivants est **Vrai** ou **Faux**. nous devons justifier notre réponse à l'aide d'un calcul, d'un théorème, d'une définition, d'une propriété ou d'un contre-exemple.
Une bonne réponse sans justification ne vaut aucun point.

(a) L'équation différentielle suivante est d'ordre quatre : $(y'(x))^4 + y(x) = \sin(x)$.

FAUX. L'ordre de la dérivée la plus élevée est un, cette É.D. est d'ordre un (mais de degré 4, donc forcément non linéaire).

(b) La méthode des coefficients indéterminés se fonctionnera pas pour trouver une solution particulière à l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = \tan(x)$.

VRAI. Un candidat devrait minimalement contenir des fonctions comme $\tan(x)$ mais alors les dérivées feraient apparaître $\sec^2(x)$. D'ailleurs, on sait que pour trouver une solution particulière à cette É.D., c'est la méthode de variation des paramètres qu'on doit utiilser.

(c) Un objet se déplace le long de l'axe des x et sa vitesse à l'instant t est donnée par l'expression $\frac{1}{t^2+1}$. Cet objet part de l'origine à l'instant $t = 0$. Puisque sa vitesse n'est jamais nulle, il franchira **nécessairement** une distance infinie.

FAUX. La vitesse n'est jamais nulle et même toujours positive mais si l'intégrale impropre de 0 à l'infini de la vitesse converge, cela voudra dire que la distance totale parcourue sera finie. C'est bien ce qui se produit ici :

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}\,.$$

(d) Soit un circuit RL où sont branchées en série une résistance, une bobine (inducteur) et une source de type *sinusoïdal*. Alors la condition initiale (le courant initial) n'affecte pas l'*amplitude* du courant en régime permanent.

VRAI. On pourrait donner comme raison que la méthode des coefficients indéterminés nous forcerait à poser, comme candidat de la solution particulière, une combinaison linéaire de sinus et de cosinus et puisque la solution de l'équation complémentaire est une fonction exponentielle décroissante, cela permettrait de conclure. Mais puisqu'il s'agit d'une É.D. linéaire d'ordre un de la forme

$$L\frac{di}{dt} + R\,i = E_0 \sin(\omega\, t),\, i(0) = i_0$$

sa solution est de la forme

$$i(t) = C\,e^{-\frac{R\,t}{L}} + A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)$$

où les constantes A et B dépendent seulement de E_0, R, L et ω tandis que la constante C dépend *aussi* de i_0 comme on peut le vérifier en faisant résoudre l'É.D. par un logiciel de calculs symbolique. En fait, Nspire nous indiquerait que

$$A = -\frac{E_0\,L\omega}{L^2\omega^2+R^2}, \quad B = \frac{E_0\,R}{L^2\omega^2+R^2}, \quad C = \frac{E_0\,L\omega + i_0\left(R^2+L^2\omega^2\right)}{L^2\omega^2+R^2}\,.$$

L'amplitude du courant en régime permanent étant $\sqrt{A^2+B^2}$, on voit que le courant initial i_0 n'aurait aucune influence.

(e) Une équation du type $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ est appelée *équation aux dérivées partielles.*

VRAI. La fonction u en est une de deux variables (x et y) et il y a des dérivées partielles dans l'équation.
