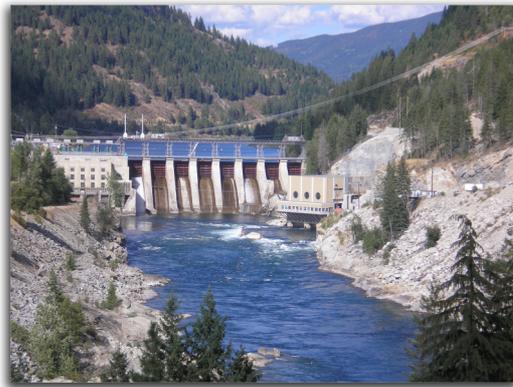


# ENR811 Ingénierie hydraulique - Brève initiation technique au monde de l'hydraulique

© Michel Sabourin 2021

6 juillet 2021



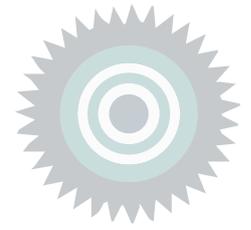
*ENR811 Énergie hydraulique*

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Objectifs</b>  | <b>3</b>  |
| <b>I - Pour une compréhension intuitive du fonctionnement d'une turbine hydraulique</b>   | <b>4</b>  |
| <b>II - Le cheminement de l'énergie hydraulique dans une installation hydroélectrique</b> | <b>6</b>  |
| <b>III - Exercice : Exercices</b>   | <b>8</b>  |
| <b>Ressources annexes</b>   | <b>9</b>  |
| <b>Solutions des exercices</b>  | <b>10</b> |
| <b>Glossaire</b>  | <b>12</b> |
| <b>Bibliographie</b>  | <b>13</b> |
| <b>Webographie</b>  | <b>14</b> |
| <b>Index</b>  | <b>15</b> |
| <b>Crédits des ressources</b>   | <b>16</b> |
| <b>Contenus annexes</b>   | <b>18</b> |

# Objectifs

---



Cette présentation a pour but de :

- Saisir de façon intuitive le fonctionnement d'une turbine.
- Comprendre le cheminement de l'énergie dans une installation hydroélectrique.

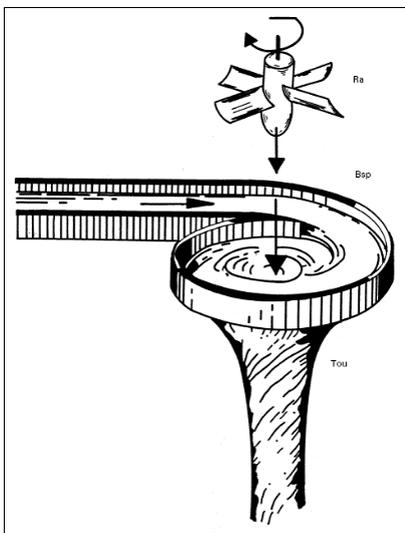
# Pour une compréhension intuitive du fonctionnement d'une turbine hydraulique



## Rotation fluide et rotation solide dans une turbine hydraulique

Une turbine, c'est le lieu de rencontre de 2 rotations. Une rotation solide et une rotation fluide.

Au cours de cette rencontre, il y a échange d'énergie entre le fluide et le solide.



La rencontre de 2 rotations

On observe deux types de rotation. Ces rotations ont des comportements qui ne suivent pas les mêmes lois.

### Rotation solide

Si  $U$  est la vitesse tangentielle à un rayon  $r$ , on observera que pour l'ensemble du solide en rotation on aura :

$$\omega = U/r = \text{constante}$$

C'est un tourbillon forcé. Plus on s'éloigne du centre, plus la vitesse tangentielle augmente. La vitesse angulaire  $\omega$  est alors constante.

### Rotation fluide

Si  $C_u$  est la vitesse tangentielle à un rayon  $r$ , on observera que pour le fluide en rotation on aura :

$$\Gamma = C_u * r = \text{constante}$$

C'est le tourbillon libre. Plus on s'éloigne du centre, plus la vitesse tangentielle diminue. La circulation  $\Gamma$  est alors constante.

## Les 2 rotations



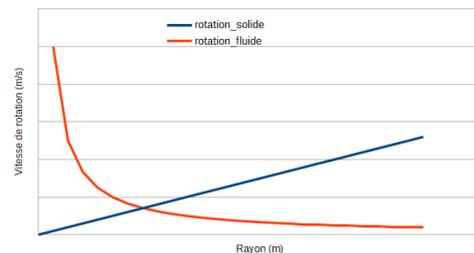
... ne peuvent être compatibles qu'en un point.

Pour le concepteur, c'est le premier lieu de rencontre dans le sens de l'écoulement, c'est le bord d'attaque.

Le couple moteur résulte de l'incompatibilité des rotations fluide et solide entre le bord d'attaque et le bord de fuite.

Le filet fluide y est dévié par l'aubage en rotation et change donc de direction par rapport au tourbillon libre qui serait établi sans la roue.

C'est cette déviation qui génère une **variation de la quantité de mouvement** et le couple sur la roue.



Les 2 rotations ne coïncident qu'en un seul point.



Le concepteur doit s'assurer que la rencontre fluide solide se fasse avec le minimum de choc et donc de perte. On doit donc avoir des aubages bien orientés et aux formes profilées et harmonieuses.

### Le Tourbillon libre



La rotation fluide suit la loi du tourbillon libre :

$$C_u * r = \text{constante}$$

$$m/s * m = J/(kg/s)$$

On constate que le tourbillon libre s'exprime comme une énergie par unité de débit massique.

Ce débit massique se déplace radialement. Les vitesses débitante (radiale) et tangentielle sont perpendiculaires. À cause du transit radial, il y a conservation du moment cinétique.

La vitesse tangentielle contient l'énergie et la vitesse débitante le facteur temps : le produit des deux définit la puissance.

### Vidéo



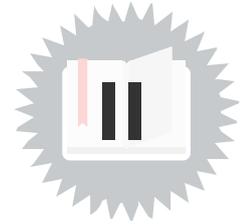
Vidéo :

- Tourbillon forcé 2:59.
- Tourbillon libre 4:35.

[cf. Tourbillon forcé et tourbillon libre]

Un tourbillon libre dans ma piscine ! [cf. MVI\_5061-1.mp4]

# Le cheminement de l'énergie hydraulique dans une installation hydroélectrique



L'énergie disponible pour une centrale hydroélectrique se perçoit assez facilement en visualisant la différence des niveaux entre le bief amont et le bief aval. Il s'agit de l'énergie brute disponible sur le site. Bien entendu, lors de l'écoulement, à cause de la friction, des pertes de charges sont générées mais elles sont en général assez faibles.

En suivant l'écoulement de l'amont vers l'aval, on parcourt les points suivants :

1. Au bief amont, on retrouve une surface libre à une altitude  $z$  qui est la plus importante du circuit. La vitesse de l'écoulement  $y$  est nulle et la pression ambiante est la pression atmosphérique. De ces valeurs on peut  $y$  calculer une énergie totale avec l'équation de Bernoulli <sup>(cf. p.18)</sup>.
2. À la prise d'eau, l'énergie totale est très voisine de celle du point 1 mais on  $y$  retrouve une altitude inférieure, une vitesse d'écoulement faible mais calculable en connaissant le débit et la section d'entrée et la pressions ambiante peut être calculée en utilisant l'équation de Bernoulli.
3. Alors que les points précédents sont réputés ne pas faire partie de la turbine, le point 3 est à la frontière amont qui détermine le début de la turbine, on  $y$  retrouve les prises de pression. La pression statique qui  $y$  est mesurée, la pression dynamique qui peut être déterminée à partir du débit et de la section aux prise de pression ainsi que l'altitude moyenne de cette section permettent de calculer l'énergie totale en utilisant l'équation de Bernoulli. Encore une fois, cette énergie est très voisine de celle du point 1.
4. L'eau entre maintenant dans la roue. Son énergie est voisine de celle du point 1 mais elle est très exactement égale au produit de la vitesse tangentielle du solide et de la vitesse tangentielle du fluide selon *la relation d'Euler* <sup>(cf. p.22)</sup>. Toutes les pertes de charge entre le point 1 et le point 2 sont incorporés dans la vitesse tangentielle du fluide. On peut aussi calculer l'énergie totale à ce point en  $y$  appliquant l'équation de Bernoulli et on trouvera la même valeur.
5. L'eau sort de la roue. L'énergie  $y$  est sensiblement inférieure à celle à l'entrée parce qu'absorbée par l'arbre. Comme pour le point 4, l'énergie  $y$  est très exactement égale au produit de la vitesse tangentielle du solide et de la vitesse tangentielle du fluide selon la relation d'Euler. Cette valeur peut aussi  $y$  être calculée par l'équation de Bernoulli. On observera qu'elle n'est pas du tout voisine de celle des points 4 et précédents. La roue crée une discontinuité dans la courbe de distribution de l'énergie.

L'eau s'engage maintenant dans l'aspirateur pour retourner à la rivière mais aussi pour en diminuer l'énergie cinétique.

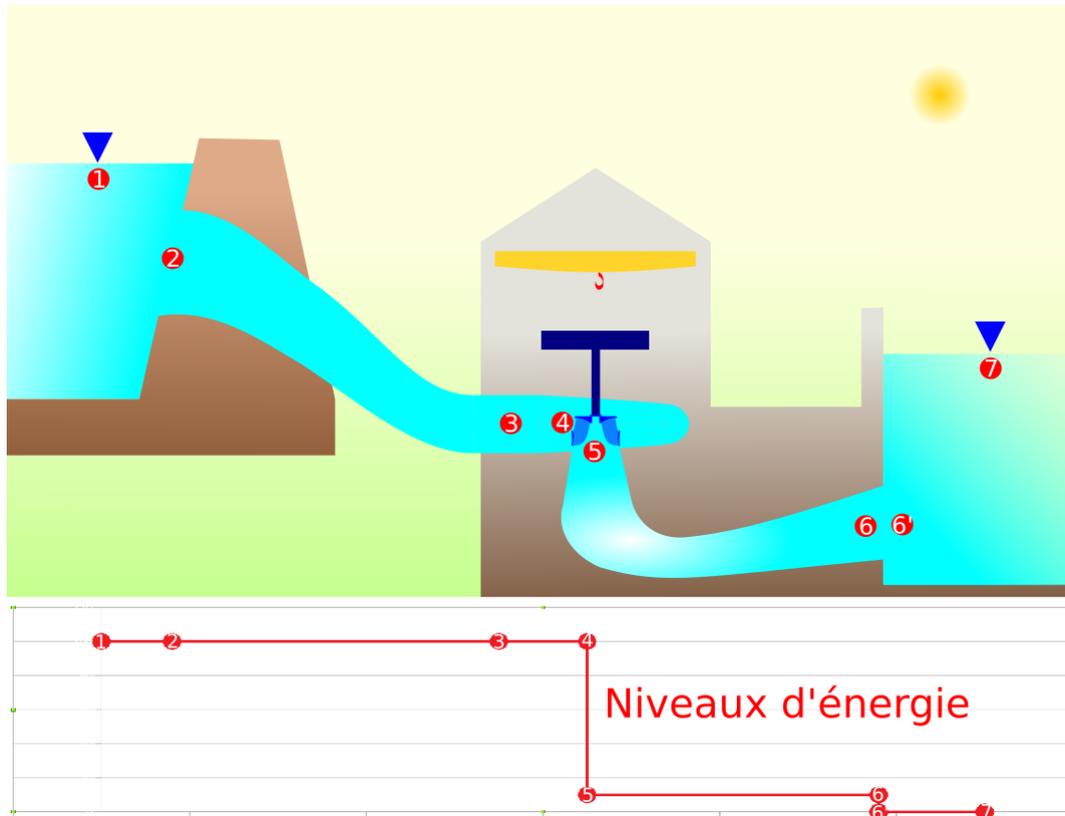
6. Nous voici à la frontière aval qui détermine la fin de la turbine. Les prises de pression en sont la frontière physique. Ce point se trouve aussi à cheval sur une discontinuité géométrique.

Il fait partie de l'aspirateur et en ce sens son énergie calculée par Bernoulli est très voisine de celle du point 5.

Il fait aussi partie de la rivière et en ce sens son énergie calculée par Bernoulli est très voisine de celle du point 7.

En fait, l'énergie cinétique résiduelle à la sortie de l'aspirateur est perdue et crée une discontinuité dans la courbe de distribution de l'énergie. Cette perte est calculée en considérant l'équation de perte dans *une expansion brusque* <sup>(cf. p.36)</sup>.

7. Au bief aval, on retrouve comme au point 1, une surface libre. La vitesse de l'écoulement y est nulle et la pression ambiante est la pression atmosphérique. Cela nous permet d'y calculer l'énergie totale avec l'équation de Bernoulli et cette énergie est la plus basse du circuit.



*Cheminement de l'énergie dans une installation hydroélectrique*

Sur cette figure, on illustre la position des points et les niveaux d'énergie associés. On constate que la roue provoque une discontinuité dans la distribution en absorbant l'énergie selon la relation d'Euler et qu'à la sortie de l'aspirateur, l'énergie cinétique résiduelle y est perdue ce qui crée aussi une discontinuité.

# Exercice : Exercices

[solution n°1 p. 10]



**1**

Dans un tourbillon libre, on mesure une vitesse tangentielle de 5 m/s à 2 m du centre.

Quelle vitesse sera mesurée à 5 m du centre ?

- 2 m/s
- 2,5 m/s
- 7,5 m/s
- 10 m/s
- 12,5 m/s

**2**

Dans un tourbillon forcé, on mesure une vitesse tangentielle de 5 m/s à 2 m du centre.

Quelle vitesse sera mesurée à 5 m du centre ?

- 2 m/s
- 2,5 m/s
- 7,5 m/s
- 10 m/s
- 12,5 m/s

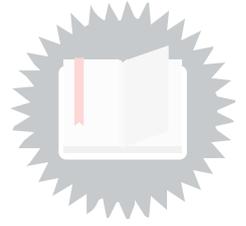
**3**

Quels sont les causes des discontinuités dans le cheminement de l'énergie d'une installation hydroélectrique ?

- Les pertes par friction et la cavitation dans la roue.
- La perte par expansion brusque et les pertes par choc.
- L'absorption par l'arbre turbine et la perte par expansion brusque à la sortie.
- La cavitation dans la roue et la perte d'énergie cinétique à la sortie.
- Il n'y a pas de discontinuité dans le cheminement de l'énergie.

# Ressources annexes

---



Équation mathématique

$E_I \rightarrow$  est l'énergie massique en J/kg ou en  $m^2/s^2$  disponible aux bornes de la roue

Équation mathématique

$H_I \rightarrow$  est la chute interne aux bornes de la roue exprimée en m et équivalente à un niveau d'énergie

# Solutions des exercices

---



## Solution n°1

[exercice p. 8]

1

---

Dans un tourbillon libre, on mesure une vitesse tangentielle de 5 m/s à 2 m du centre.

Quelle vitesse sera mesurée à 5 m du centre ?

- 2 m/s
- 2,5 m/s
- 7,5 m/s
- 10 m/s
- 12,5 m/s

Q  $\Gamma = 5m/s * 2m = 10m^2/s$

$$C_u = \frac{\Gamma}{r} = \frac{10}{5} = 2m/s$$

2

---

Dans un tourbillon forcé, on mesure une vitesse tangentielle de 5 m/s à 2 m du centre.

Quelle vitesse sera mesurée à 5 m du centre ?

- 2 m/s
- 2,5 m/s
- 7,5 m/s
- 10 m/s
- 12,5 m/s

Q  $\omega = 5m/s/2m = 2,5rad/s$

$$C_u = \Gamma * r = 2,5 * 5 = 12,5m/s$$

3

---

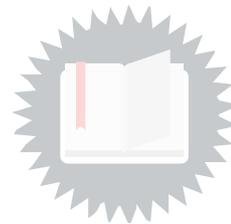
Quels sont les causes des discontinuités dans le cheminement de l'énergie d'une installation hydroélectrique ?

- Les pertes par friction et la cavitation dans la roue.
- La perte par expansion brusque et les pertes par choc.
- L'absorption par l'arbre turbine et la perte par expansion brusque à la sortie.

- La cavitation dans la roue et la perte d'énergie cinétique à la sortie.
- Il n'y a pas de discontinuité dans le cheminement de l'énergie.

# Glossaire

---



## **mce**

mètre(s) de colonne d'eau → c'est une mesure de l'énergie ou de la pression statique.

# Bibliographie

---



[Rossgatterer M. et al. 2012] Rossgatterer M., Jüttler B., Kapl M., Della Vecchia G., "Medial design of blades for hydroelectric turbines and ship propellers", Computer & Graphics, March 15, 2012.

# Webographie

---



[**Claude Moulin et al. 1977**] <https://www.shf-lhb.org/articles/lhb/abs/1977/05/lhb1977045/lhb1977045.html> Claude Moulin, Marc Wegner, Raphaël Eremeef et Vinh-Phong, La Houille Blanche, N°7-8 (Novembre 1977), pp. 617-627, "Méthodes de tracé des turbomachines hydrauliques".

[**Eugenio Beltrami**] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Eugenio\\_Beltrami](https://fr.wikipedia.org/wiki/Eugenio_Beltrami)

[**Miller IV, Perry L. et al. 1996**] <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19960047133.pdf> Perry L. Miller IV, James H. Oliver, David P. Miller and Daniel L. Tweedt, National Aeronautics and Sapace Administration, Lewis Reseach Center, Cleveland, Ohio, "BladeCAD : An interactive Geometric Design Tool for Turbomachinery Blades", July 1996.

# Index

---



|                                |    |
|--------------------------------|----|
| Bernoulli.....                 | 18 |
| Chute interne.....             | 22 |
| Conservation de l'énergie..... | 18 |
| Énergie interne.....           | 22 |
| Équilibre des forces.....      | 32 |
| Euler.....                     | 22 |
| Fluid rotation.....            | 4  |
| Free-vortex .....              | 4  |
| Hydraulic turbine .....        | 4  |
| Moulinet.....                  | 32 |
| Newton .....                   | 32 |
| Quantité de mouvement.....     | 32 |
| Relation d'Euler.....          | 22 |
| Rotation fluide.....           | 4  |
| Rotation solide .....          | 4  |
| Solid rotation.....            | 4  |
| Tourbillon libre.....          | 4  |
| Turbine élémentaire.....       | 22 |
| Turbine hydraulique.....       | 4  |

# Crédits des ressources

---



**La rencontre de 2 rotations** p. 4

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, <http://dbhsarl.eu/forum/viewtopic.php?t=701> PACER  
724-247-1F Turbines hydrauliques.pdf

**Les 2 rotations ne coïncident qu'en un seul point.** p. 4

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2020

**Un tourbillon libre dans ma piscine !** p. 5

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2018

**Conservation de l'énergie avec Bernoulli** p. 18

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2017

**Étude de la perte aspirateur** p. 19

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2017

**Évolution typique des énergies dans un aspirateur** p. 21

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2017

**Leonhard Euler a présenté les équations qui décrivent le fonctionnement des machines hydrauliques à réaction.** p. 22

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2017

**Écoulement dans un coude et réaction** p. 32

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2017

**Moulinet** p. 33

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2017

**Vitesses à la sortie du moulinet** p. 35

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2019

**Une turbine élémentaire** p. 23

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021

**Intrados, extrados et surface médiale : l'âme du profil.** p. 24

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2020

**Bijection entre le tracé 3D et les définitions 2D des plans méridien et de la cascade** p. 25

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021

**Transformation conforme vers le plan m-n conforme en longueur** p. 26

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021

**Aube et roues modèles et prototype** p. 26

*<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/fr/>, © 2017 General Electric Company*

**Définition géométrique de l'aubage dans le plan méridien** p. 26

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021*

**Les données du problème au point optimal** p. 27

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2019*

**Représentation monodimensionnel de la turbine dans le plan méridien** p. 27

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021*

**Cascade du filet moyen dans le plan u-v** p. 27

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021*

**Conditions d'entrée de la cascade** p. 28

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021*

**Conditions à la sortie de la cascade** p. 29

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2021*

**Triangle de vitesse sur un point de la cascade en rotation** p. 31

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, Michel Sabourin 2021*

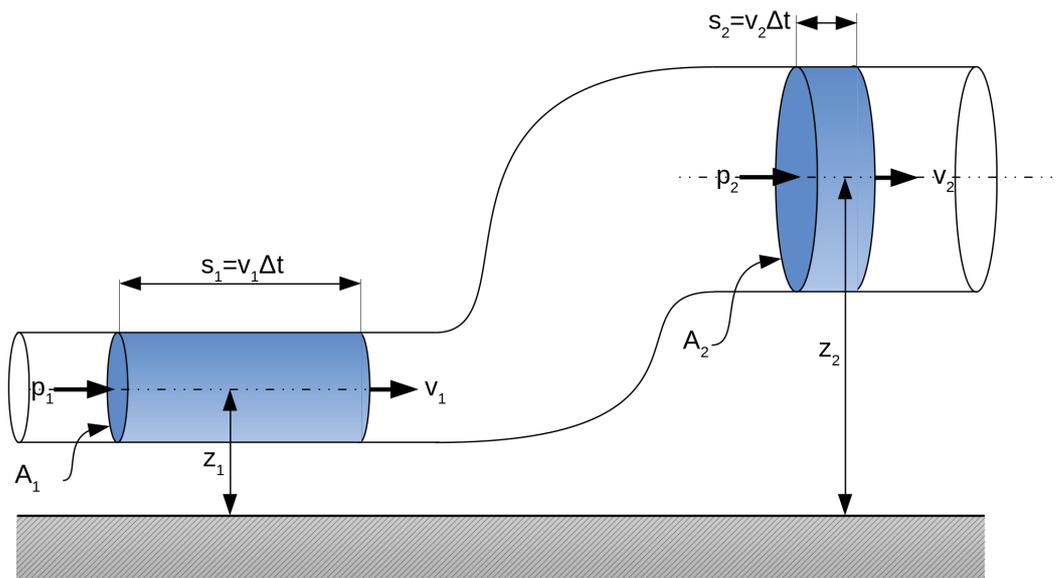
**Cheminement de l'énergie dans une installation hydroélectrique** p. 7

*<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/fr/>, © Michel Sabourin 2020*



## 1. L'équation de Bernoulli - conservation de l'énergie

Daniel Bernoulli 1738



*Conservation de l'énergie avec Bernoulli*

Pour étudier l'écoulement d'un fluide incompressible et idéal dans un conduit quelconque, considérons un débit permanent qui nous donne un volume et donc une masse s'y déplaçant pendant le temps  $\Delta t$  :

- Dans la zone 1 à section constante  $A_1$ , pour le débit  $Q$  on obtient la vitesse  $v_1 = Q/A_1$  et le fluide parcourt la distance  $s_1$ .
- Dans la zone 2 par conservation du débit  $Q$  on obtient la vitesse  $v_2 = Q/A_2$  et le fluide parcourt la distance  $s_2$ .

Pour les zones 1 et 2, la conservation de l'énergie nous indique que les sommes du travail massique ( $W$ ) et des énergies massiques cinétique ( $E_c$ ) et potentielle ( $E_p$ ) sont égales et donc constantes.

Ce qui s'exprime par : *(cf. p.21)*

$$W_1 + E_{p1} + E_{c1} = W_2 + E_{p2} + E_{c2}$$

où

$$E_{pi} = g z_i$$

$$m E_{ci} = m \frac{v_i^2}{2} \rightarrow E_{ci} = \frac{v_i^2}{2}$$

$$m W_i = p_i A_i s_i = p_i A_i v_i \Delta t$$

$$\rho Q \Delta t W_i = p_i Q \Delta t$$

$$W_i = \frac{p_i}{\rho}$$

En assemblant :

$$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\frac{p_i}{\rho} + g z_i + \frac{v_i^2}{2} = \text{Constante}$$

En mécanique des fluides, le principe de Bernoulli statue que dans le flux d'un fluide où l'énergie se conserve, une accélération se produit simultanément avec la diminution de la pression.

### Quelques définitions découlant de l'équation de Bernoulli



On appelle **énergie totale**  $E_t$ , l'énergie calculée par Bernoulli à une section  $i$  d'un conduit.

$$E_{ti} = \frac{p_i}{\rho} + g z_i + \frac{v_i^2}{2}$$

On appelle **perte de charge**  $gh_f$ , la différence d'énergie totale entre deux sections d'un conduit.

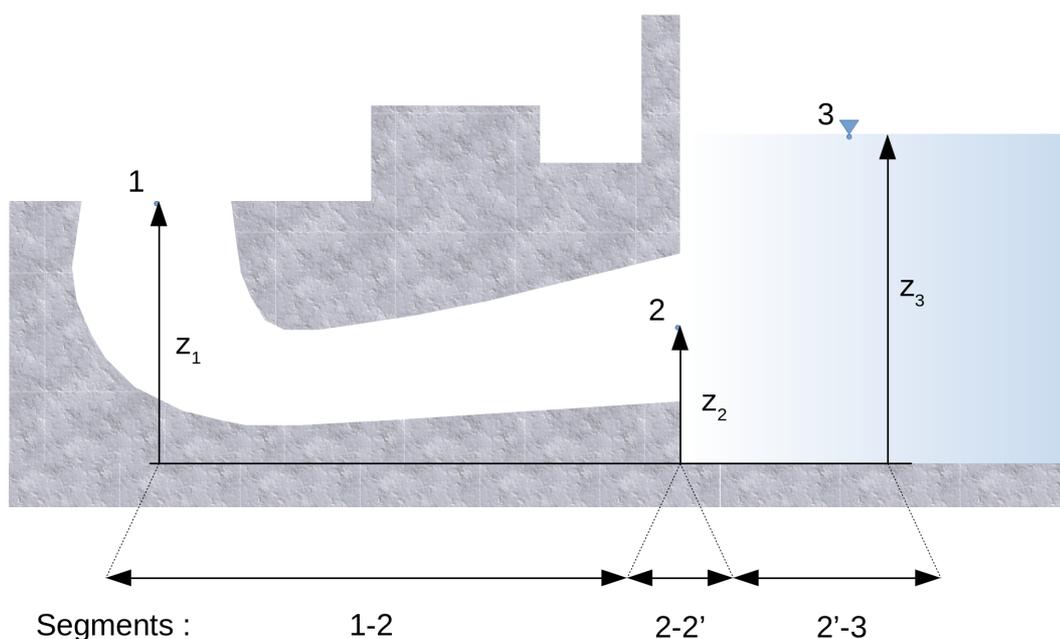
$$gh_f = E_{t1} - E_{t2}$$

### Introduction à l'étude d'un aspirateur



Les fonctions de l'aspirateur sont :

- Retourner l'eau à la rivière
- Diminuer l'énergie cinétique à la sortie



Étude de la perte aspirateur

Considérons un aspirateur fonctionnant au sommet de rendement. L'entrée est en 1 et la sortie en 2. Le point 3 est situé à la surface du niveau aval.

Au **point 1**, situé sous la roue présente une énergie totale qui s'exprime par l'équation de Bernoulli :

$$E_{t_1} = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

**En 3**, la pression statique est la pression atmosphérique, l'énergie potentiel est  $\rho g z_3$  et l'énergie cinétique est nulle :

$$E_{t_3} = \frac{p_{atm}}{\rho} + gz_3$$

Le **point 2** se situe sur une discontinuité entre le segment 1-2 et le segment 2-3, appelons-le segment 2-2'. En fait, dans le segment 2-2', l'écoulement subit une expansion brusque de la section 2 vers une section infini en 3. Il ne s'agit plus d'un écoulement divergent et l'énergie cinétique en 2 est totalement perdue, c'est une perte singulière.

$$gh_{f_2} = E_{t_2} - E_{t_{2'}} = \frac{v_2^2}{2}$$

Sachant que l'énergie totale en 2' est égale à l'énergie totale en 3 :

$$E_{t_{2'}} = E_{t_3}$$

Donc, en tenant compte de la perte singulière en 2-2' on peut écrire :

$$E_{t_1} = E_{t_2} = E_{t_3} + \frac{v_2^2}{2}$$

On observe que l'énergie cinétique en 2 augmente l'énergie totale en 1 peu importe l'énergie en 3. Il s'agit donc d'une perte qui diminuera l'énergie disponible à la roue et qui ne sera, bien évidemment, pas transmise à l'arbre.

Il y aura donc avantage à diminuer l'énergie cinétique à la sortie de l'aspirateur en maximisant la section à cet endroit.

### Approche de la réalité : un exemple d'un calcul CFD dans l'aspirateur

Bernoulli est l'équation de l'énergie et dans le développement précédent nous avons considéré que la perte charge était nulle (pertes par friction paroi et fluide). Le calcul CFD nous permet de nous approcher de la réalité. Une des caractéristique du calcul CFD est qu'il se fait sans effet de gravité, on observe aucune interaction entre l'énergie potentielle et le comportement de l'aspirateur.

Sur le graphique, on considère un aspirateur dont la longueur varie le long de l'abscisse curviligne. Donc pour chaque point le long de l'abscisse on calcul les pressions et énergie cinétique à chaque point comme s'il s'agissait de la sortie de l'aspirateur.

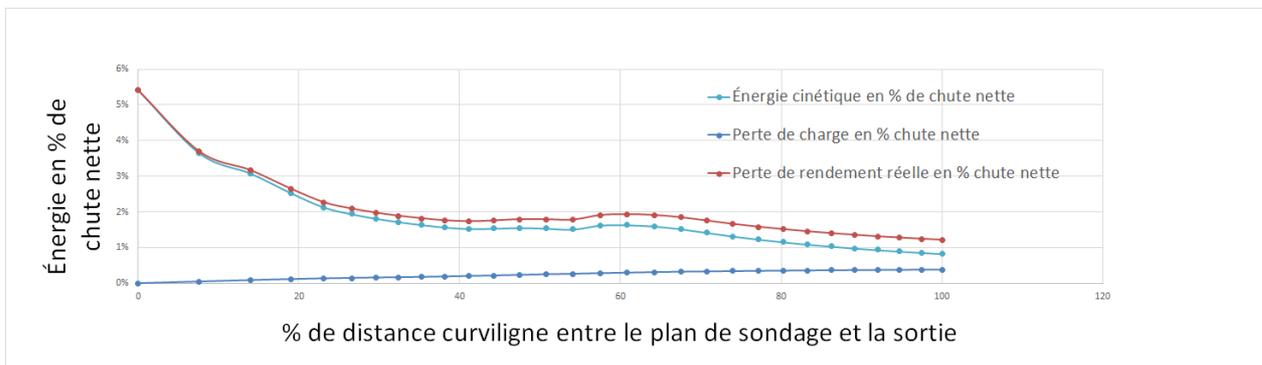
Donc, s'il n'y avait pas d'aspirateur pour le calcul montré, l'énergie à la sortie de la turbine serait de 5,41% et cet énergie serait perdue.

Au fur et à mesure qu'on allonge l'aspirateur, l'énergie cinétique décroît alors que la perte de charge croit. Il en résulte globalement une réduction de l'énergie. De sorte, qu'à la sortie, l'énergie est réduite à 1,21%.

On peut aussi extrapoler qu'en allongeant l'aspirateur, on obtiendra une plus grande énergie à la roue.

Il est remarquable d'observer que l'aspirateur montré, au point de rendement sommet, contribue pour 4,2% d'augmentation de rendement.

Plus généralement, une turbine fonctionne au point optimal avec une vitesse axiale à la sortie de la roue d'environ 10 m/s ce qui correspond a une énergie cinétique d'environ 5  $mce$  <sup>p.12</sup> et ceci peut importe la chute à exploiter. Donc, sous les basses chutes la contribution de l'aspirateur peut être très importante, par exemple 20% de rendement pour une chute de 25 m.



Évolution typique des énergies dans un aspirateur

## 2. Bernoulli

$$W_1 + E_{p1} + E_{c1} = W_2 + E_{p2} + E_{c2}$$

où

$$E_{pi} = g z_i$$

$$m E_{ci} = m \frac{v_i^2}{2} \rightarrow E_{ci} = \frac{v_i^2}{2}$$

$$m W_i = p_i A_i s_i = p_i A_i v_i \Delta t$$

$$\rho Q \Delta t W_i = p_i Q \Delta t$$

$$W_i = \frac{p_i}{\rho}$$

En assemblant :

$$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\frac{p_i}{\rho} + g z_i + \frac{v_i^2}{2} = \text{Constante}$$

$W \rightarrow$  est le travail massique en J/kg ou en  $m^2/s^2$

$E_p \rightarrow$  est l'énergie potentielle massique en J/kg ou en  $m^2/s^2$

$E_c \rightarrow$  est l'énergie cinétique massique en J/kg ou en  $m^2/s^2$

$g \rightarrow$  est l'accélération de la gravité en  $m/s^2$

$z \rightarrow$  est l'altitude par rapport à une référence en m

$m \rightarrow$  est le scalaire masse en kg

$v \rightarrow$  est la vitesse en m/s

$p \rightarrow$  est la pression en Pa ou  $N/m^2$

$A \rightarrow$  est l'aire en  $m^2$

$Q \rightarrow$  est le débit volumique exprimé en  $m^3/s$

$\vec{s} \rightarrow$  est l'abscisse curviligne en m

$t \rightarrow$  est le temps en s

$\rho \rightarrow$  est la densité exprimé en  $kg/m^3$

### 3. La relation d'Euler

Leonhard Euler 1707-1783



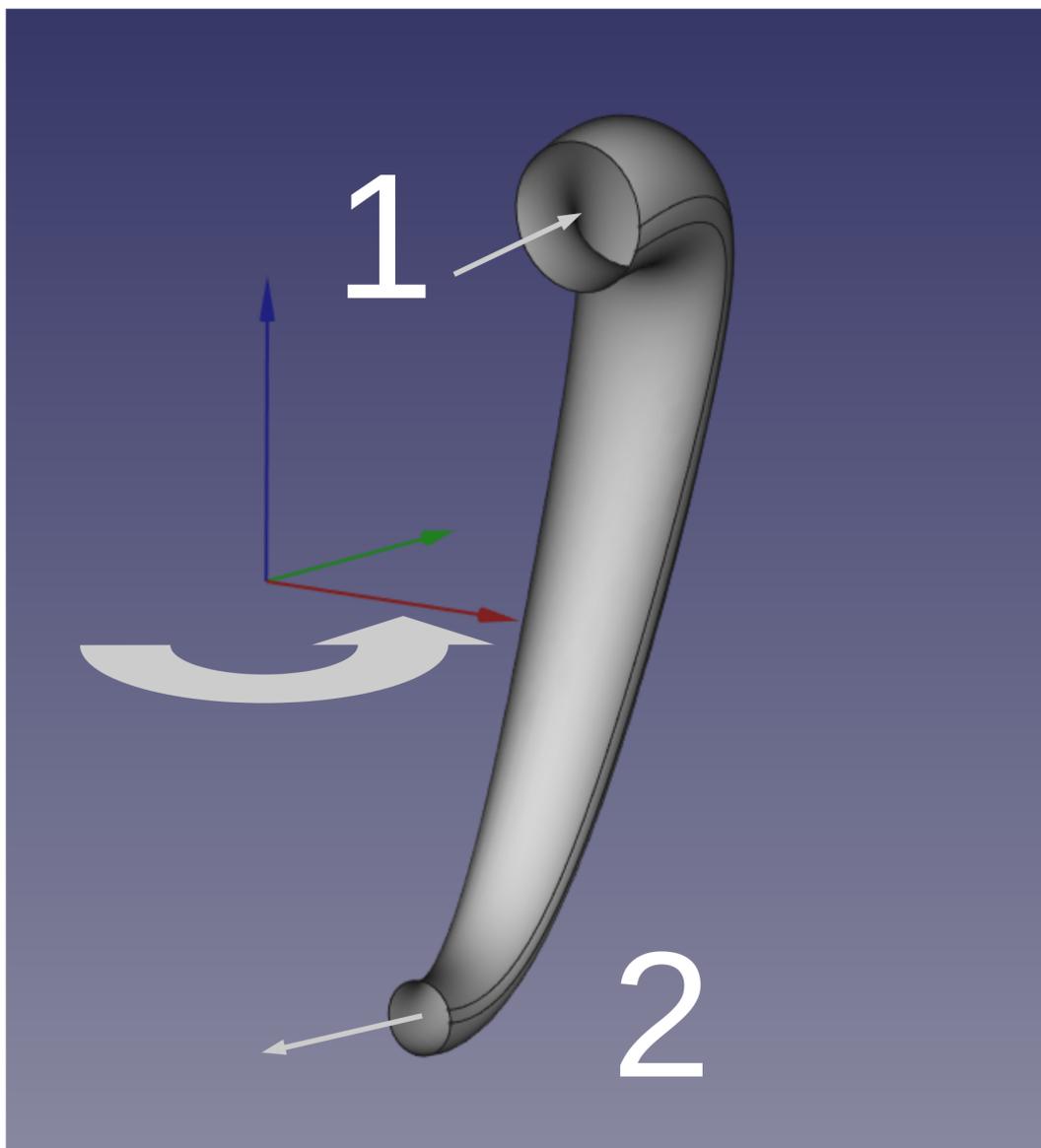
Leonhard Euler a présenté les équations qui décrivent le fonctionnement des machines hydrauliques à réaction.

#### Analyse d'une turbine élémentaire



C'est en généralisant l'énergie développée par un *moulinet* (cf. p.32) à tout type de condition d'entrée et de sortie qu'on obtient la relation d'Euler.

Pour la démonstration, considérons une turbine élémentaire constituée d'un tube à section variable dont l'entrée (indice 1) et la sortie (indice 2) sont tangentielles et parcourues par un débit de l'entrée vers la sortie. Le tube tourne autour d'un axe à une vitesse angulaire.



Une turbine élémentaire

Considérons ce qui se passe **à l'entrée** en terme de quantité de mouvement.

L'effort tangentiel qui en résulte est positif et dans le sens de rotation :  $F_1 = \rho Q C_{u1}$ .

Le couple moteur est :  $M_1 = r_1 \times F_1$ .

La puissance générée à l'entrée :  $P_1 = \omega M_1$

L'énergie à l'entrée s'exprime donc par :  $E_1 = U_1 C_{u1}$

**Pour la sortie :**

$$F_2 = -\rho Q C_{u2}$$

$$M_2 = r_2 \times F_2$$

$$P_2 = \omega M_2$$

$$E_2 = -U_2 C_{u2}$$

La puissance résultant des vitesses à l'entrée et à la sortie sera :  $P = \rho Q (r_1 \omega C_{u1} - r_2 \omega C_{u2})$

Il en résulte la relation d'Euler permettant d'obtenir l'énergie générée par la turbine élémentaire :

$$E_i = g H_i = U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2}$$

L'indice *i* qualifie cette énergie d'interne, parce qu'elle exprime la quantité d'énergie aux bornes de la roue par opposition aux bornes de la turbines.

La puissance mécanique qui en résulte est entièrement transmise à l'arbre.

$$P_m = \rho Q E_i$$

La relation d'Euler nous indique que la puissance produite par une turbine vient de la déviation du filet fluide la traversant. Le même raisonnement s'applique à la pompe lorsque la puissance est négative, c'est-à-dire que la puissance doit être fournie pour générer le débit et la chute.

Dans cette présentation, pour simplifier, on a utilisé des entrée et sortie tangentielles. Dans une turbine réelle, l'écoulement n'est pas parfaitement tangentiel et donc pour appliquer la relation d'Euler il faut connaître les angles de l'écoulement pour en extraire les vitesses tangentielles  $C_u$ . Donc, connaissant les angles fluides à l'entrée et à la sortie d'une roue, on connaît l'énergie captée. L'efficacité énergétique et les pertes sont donc contenues dans les angles du fluide. C'est donc une affaire de géométrie.

On rappelle que la puissance est le produit d'un débit massique par une énergie massique.

On observe qu'il n'y aucune simplification ou hypothèse dans cette expression qui est donc exacte et que les notions de viscosité et turbulence ne sont pas utiles ici.

La relation d'Euler est l'équation maîtresse qui fait le lien entre l'énergie disponible et la géométrie de l'écoulement puis finalement la géométrie de la turbine.

Le concepteur hydraulicien doit donc générer une géométrie de roue avec les angles pour produire l'énergie souhaitée.

### L'énergie interne



L'énergie qui s'exprime ainsi aux bornes de la roue s'appelle l'énergie interne et peut se noter  $E_i$  (cf. p.9) ou  $H_i$  (cf. p.9).

### Application simplifiée au tracé d'une roue

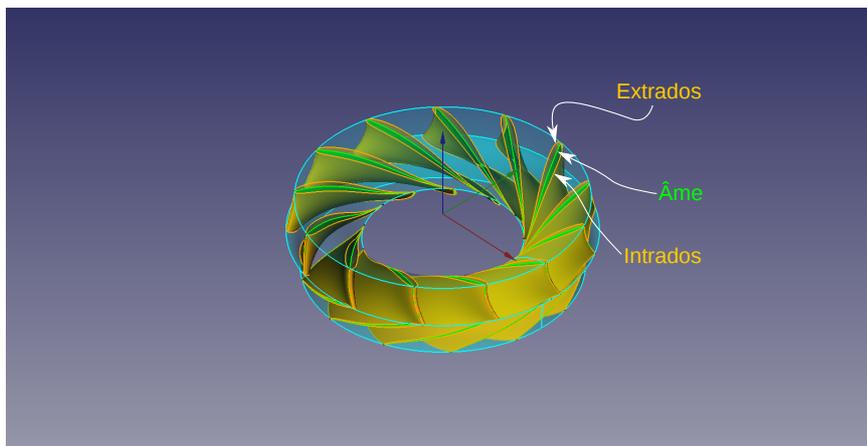


**Tracer l'aubage** d'une turbine est le processus qui permet de relier les conditions hydrauliques et la performance souhaitée à la définition géométrique de l'aubage. Comme la relation d'Euler relie les conditions hydrauliques aux angles du fluide, il s'agit donc de créer une géométrie qui s'adapte à ces angles.

Les références *Moulin* <sup>Claude Moulin et al. 1977 p.14</sup>, *Miller IV* <sup>Miller IV, Perry L. et al. 1996 p.14</sup>, *Rossgatterer* <sup>Rossgatterer M. et al. 2012 p.13</sup> et plusieurs autres auteurs décrivent le développement que nous reprenons ici.

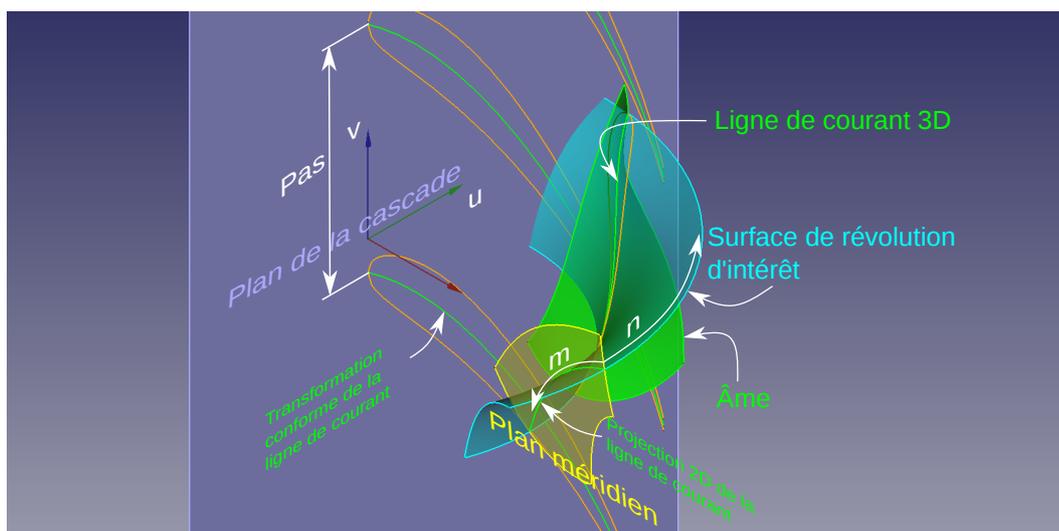
Ce développement s'appuie sur les concepts suivants :

- La roue est constituée de plusieurs aubes, chacune possédant une surface intrados et une surface extrados. Une surface médiale virtuelle, ici appelée « âme », peut en être déduite.



Intrados, extrados et surface médiale : l'âme du profil.

- Le fluide dans la roue de la turbine se déplace sur des surfaces de révolution qui intersectent le plan méridien pour former des courbes.
- Le trajet de la particule fluide se déplaçant sur la surface de révolution, entre le bord d'attaque et le bord de fuite, trace une abscisse curviligne en trois dimensions qu'on peut nommer filet ou ligne de courant.
- L'évolution des angles le long du trajet :
  - contribue, par la relation d'Euler (cf. p.22), à la transformation de l'énergie hydraulique en énergie mécanique
  - et peut être représentée par une transformation conforme appelée transformation de Beltrami<sup>Eugenio Beltrami p.14</sup>.
- La projection cylindrique de ce trajet sur un plan méridien trace une abscisse curviligne en deux dimension.



Bijection entre le tracé 3D et les définitions 2D des plans méridien et de la cascade

**Brève explication de la transformation conforme de Beltrami**

Avant d'arriver au plan conforme u-v, on passe par le plan des longueurs m-n où :

Avec *m* la longueur curviligne dans le plan méridien qui s'exprime en fonction de *s* :

$$m = m(s) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds$$

Et *n* la longueur curviligne dans le sens transverse qui s'exprime aussi en fonction de *s* :

$$n = r\theta = r(s)\theta(s)$$

Ce plan des longueurs, n'est pas pratique pour suivre l'évolution des angles du filet et donc de l'écoulement. On a donc besoin de faire appel à un changement de coordonnées.

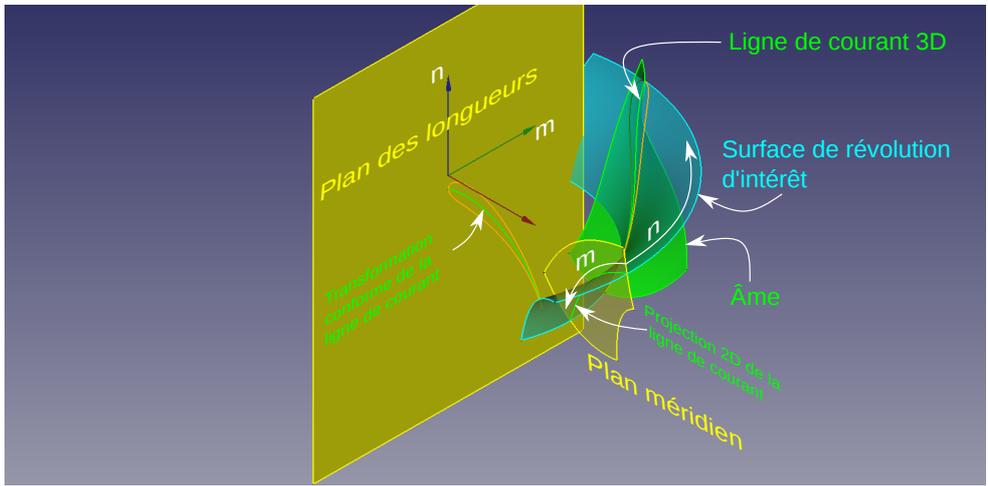
En divisant les coordonnées (*m*, *rθ*) par *r* on obtient les nouvelles variables suivantes :

$$u = \int_0^s \frac{dm}{r} ds = \int_0^m \frac{1}{r} dm \text{ où } u(0) = 0 \text{ et}$$

$$v(s) = \theta(s)$$

Ainsi, l'évolution de l'angle d'écoulement  $\alpha$  s'exprime :

$$\tan \alpha = \frac{rd\theta}{dm} = \frac{d\theta}{dm/r} = \frac{dv}{du}$$



Transformation conforme vers le plan m-n conforme en longueur

**Approche unidimensionnel pour définir un tracé.**

En première étape pour une approche simplifiée, on pose les conditions suivantes :

- L'aubage est représenté par une seule ligne de courant.
- L'étude s'intéresse d'abord au fonctionnement au point de rendement maximum.
- La rotation fluide  $C_{u2}$  à la sortie de la roue est donc prévue nulle.
- Sa géométrie 3D est complexe et se veut un assemblage de 2 plans orthogonaux correspondant respectivement au débit massique et à l'énergie massique
  - Plan méridien
  - Plan conforme



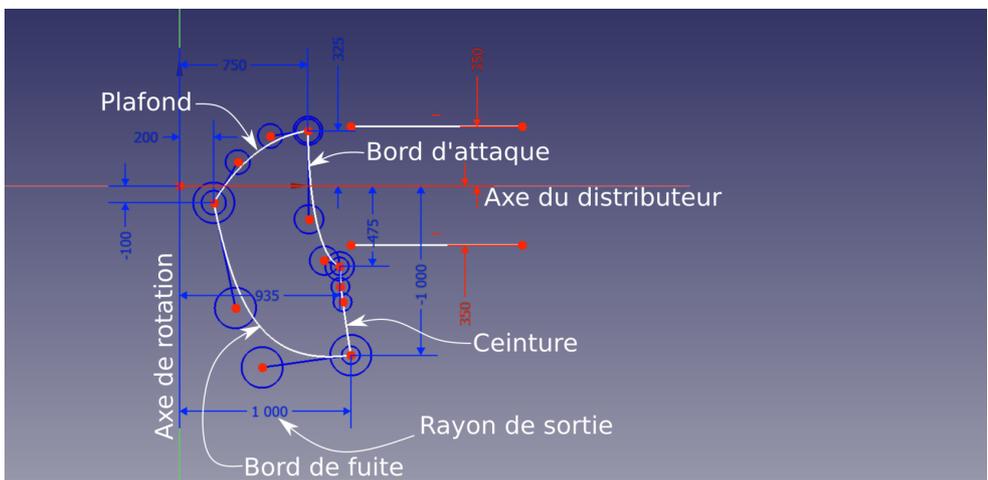
Aube et roues modèles et prototype

**Recherche des angles moyens du fluide à l'entrée et à la sortie d'une roue Francis**

? Exemple

Voici une analyse d'une turbine que l'on assimilera à une turbine élémentaire dont l'écoulement est modélisé par un filet fluide monodimensionnel.

Voici plan méridien représentant les principales caractéristiques de la roue.



Définition géométrique de l'aubage dans le plan méridien

## Conditions générales

|            |        |                   |
|------------|--------|-------------------|
| $\rho$     | 1000   | kg/m <sup>3</sup> |
| $g$        | 9,81   | m/s <sup>2</sup>  |
| $H$        | 63,0   | m                 |
| $E$        | 618,03 | J/kg              |
| $Q$        | 30,0   | m <sup>3</sup> /s |
| $D$        | 2      | m                 |
| $n$        | 300    | tpm               |
| $\omega$   | 31,42  | rad/s             |
| $\gamma_1$ | 70     | degrés            |
| $b$        | 0,70   | m                 |

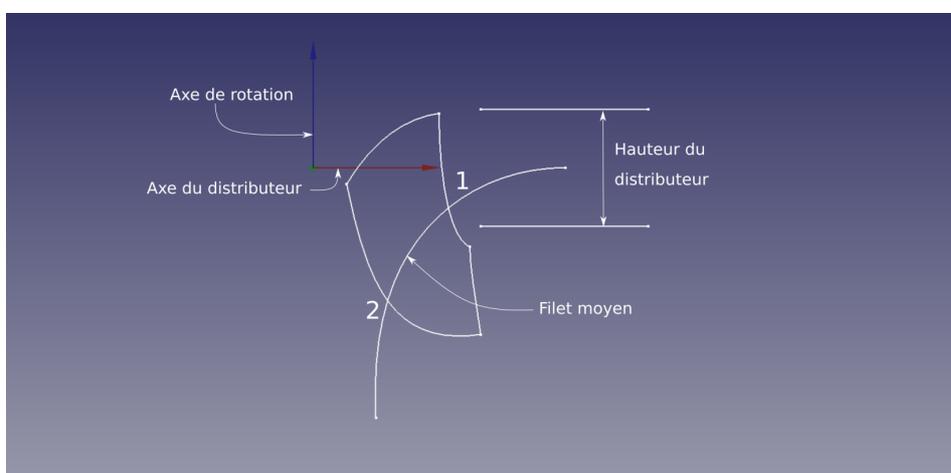
On y trouve le diamètre de la roue à 2 m , la hauteur du distributeur à 0,7 m.

À cela s'ajoutent les conditions hydrauliques pour le point de meilleur rendement :

Les directrices alimentent la roue avec un angle fluide de 70 degrés, le débit est de 30 m<sup>3</sup>/s et la chute est de 63m et la vitesse de rotation est de 300 tpm.

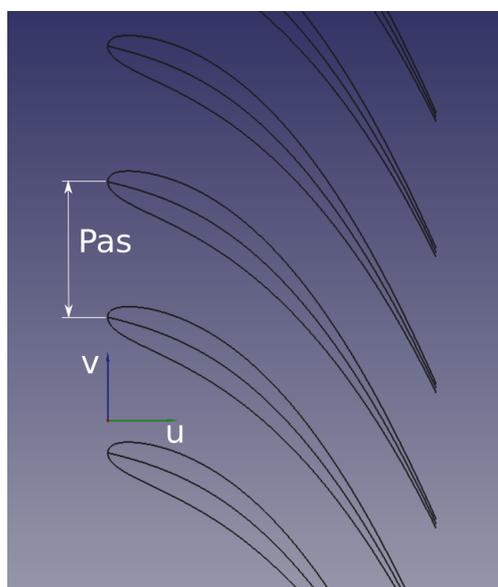
*Les données du problème au point optimal*

La base de la **conception du tracé** se fait en 1D sur l'abscisse curviligne de la ligne de courant moyenne entre le point 1 situé en entrée et le point 2 à la sortie de la roue.



*Représentation monodimensionnel de la turbine dans le plan méridien*

Le calcul des angles se fait dans le plan de cascade u-v. On y représente l'aubage intersecté par la surface de révolution généré par le filet moyen. La coordonnée  $v$  représente la position angulaire  $\theta$  et  $u$  une représentation étirée en  $r^{-1}$  de la longueur du profil dans le plan méridien. La périodicité cylindrique que l'on retrouve dans le domaine 3D est représenté par une périodicité linéaire dont le pas dépend du nombre d'aube. Ainsi pour 13 aubes le pas est de 360/13 degrés.



*Cascade du filet moyen dans le plan u-v*

À l'entrée de la roue :

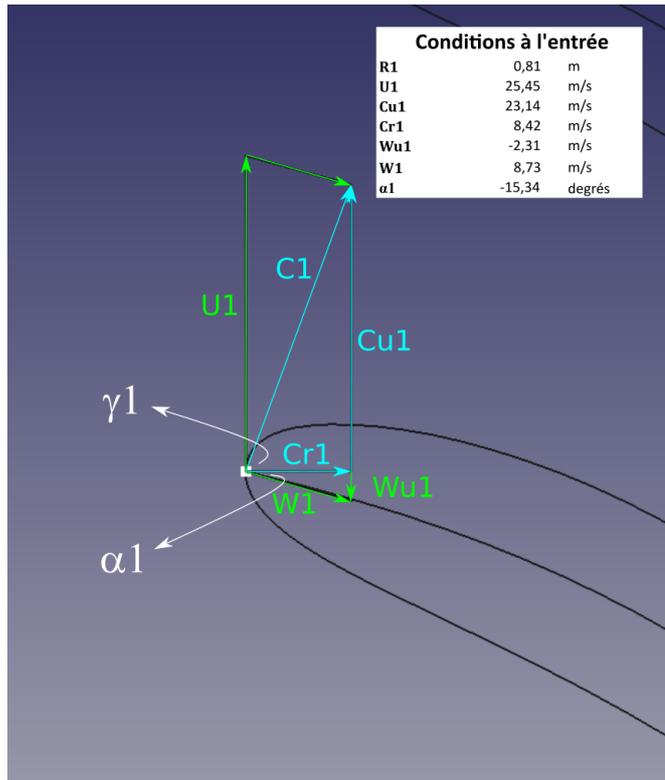
Du rayon  $R_1$  et de la vitesse angulaire on obtient la vitesse du solide  $U_1$  et la vitesse radiale moyenne à l'entrée  $C_{r1}$  basée sur le débit traversant la section l'anneau de hauteur  $b$  et de rayon  $R_1$ .

$C_{u1}$  et  $C_{r1}$  résulte du triangle de vitesse imposé par l'angle fluide  $\gamma_1$  résultant de l'effet des directrices.

$W_{u1}$  est la vitesse tangentielle du fluide vue par l'aubage, c'est la vitesse tangentielle relative qui s'obtient en soustrayant  $U_1$  de  $C_{u1}$ .

L'arc-tangente de  $W_{u1}/C_{r1}$  donne l'angle  $\alpha_1$  qui est l'angle du fluide tel que vue par la roue lorsqu'elle tourne à 300 tpm.

Le bord d'attaque de l'aubage sera conçu à cet angle pour limiter les pertes par chocs à l'entrée de la roue.



Conditions d'entrée de la cascade

$$\begin{aligned}
 U_1 &= R_1 \omega \\
 C_{m1} = C_{r1} &= Q / (2 \pi R_1 b_d) \\
 C_{u1} &= C_{r1} \tan(\gamma_1) \\
 W_{u1} &= C_{u1} - U_1 \\
 \alpha_1 &= \text{atan}(W_{u1} / C_{r1})
 \end{aligned}$$

À la sortie de la roue :

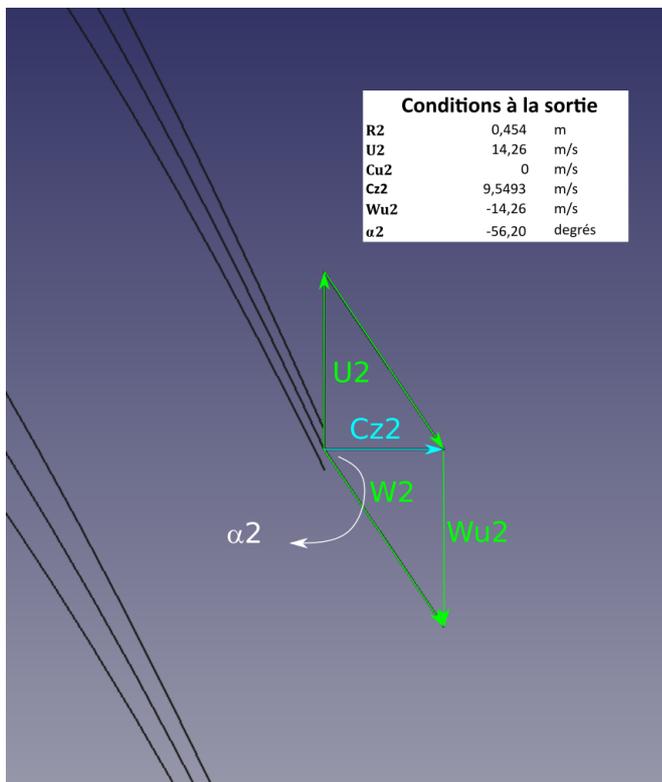
Puisqu'à la sortie de la roue, l'écoulement est axial, on choisit le rayon  $R_2$  comme représentant la position centrale du filet fluide .

En première approximation, on peut estimer que la vitesse  $C_{u2}$  à la sortie de la roue est nulle puisque c'est l'objectif du concepteur pour réduire les pertes dans l'aspirateur.

La vitesse axiale à la sortie  $C_{z2}$  doit permettre de satisfaire l'équation de continuité et se calcul en multipliant le débit par la section de sortie de la roue au diamètre  $D$  de 2m.

Puisque  $C_{u2}$  est nulle, La vitesse tangentielle relative du fluide doit annuler la vitesse du solide.

L'arc-tangente de  $W_{u2}/C_{r2}$  donne l'angle  $\alpha_2$  qui est l'angle du fluide qui doit être produit par l'aubage.



Conditions à la sortie de la cascade

$$\begin{aligned}
 U_2 &= R_2 \omega \\
 C_{m2} = C_{z2} &= Q / (\pi D^2 / 4) \\
 W_{u2} &= C_{u2} - U_2 \\
 \alpha_2 &= \text{atan}(W_{u2} / C_{z2})
 \end{aligned}$$

**La forte sensibilité aux angles de l'écoulement**



Dans le fichier joint<sup>1</sup>, on peut observer la très grande sensibilité de la performance à l'angle fluide à l'entrée  $\gamma_1$ . Quelques dixièmes de degrés causent des variations en 1% du rendement.

La prédiction de l'angle fluide  $\gamma_1$  est délicate et on s'aperçoit qu'il y a des valeurs qu'on peut imposer dans la feuille de calcul qui donnent des résultats qui ne sont pas physiques.

La CFD peut être utilisée avec précaution pour prédire ces angles et raffiner la conception de l'aubage avant la validation finale sur modèle réduit.

Avec le tracé résultant on obtient une variation des angles d'écoulement entre l'entrée et la sortie de 40 degrés. La longueur de l'abscisse curviligne entre 1 et 2 n'est pas déterminée. En fait, il faudra considérer d'une part dans quelle longueur limite la courbure du fluide peut s'obtenir sans séparation de l'aubage et d'autre part si le champ de pression absolu est suffisamment étalé pour éviter la cavitation.

<sup>1</sup> [https://michelsabourin.scenari-community.org/Outils/Angles\\_dun\\_traceV0.xls](https://michelsabourin.scenari-community.org/Outils/Angles_dun_traceV0.xls)

## Conditions générales

|                              |        |                   |    |
|------------------------------|--------|-------------------|----|
| <b><math>\rho</math></b>     | 1000   | kg/m <sup>3</sup> |    |
| <b><math>g</math></b>        | 9,81   | m/s <sup>2</sup>  |    |
| <b><math>H</math></b>        | 63,0   | m                 |    |
| <b><math>E</math></b>        | 618,03 | J/kg              |    |
| <b><math>Q</math></b>        | 30,0   | m <sup>3</sup> /s |    |
| <b><math>D</math></b>        | 2      | m                 |    |
| <b><math>n</math></b>        | 300    | tpm               | 12 |
| <b><math>\omega</math></b>   | 31,42  | rad/s             |    |
| <b><math>\gamma_1</math></b> | 70     | degrés            |    |
| <b><math>b</math></b>        | 0,70   | m                 |    |

## Conditions à l'entrée

|                              |        |        |
|------------------------------|--------|--------|
| <b><math>R_1</math></b>      | 0,81   | m      |
| <b><math>U_1</math></b>      | 25,45  | m/s    |
| <b><math>C_{u1}</math></b>   | 23,14  | m/s    |
| <b><math>C_{r1}</math></b>   | 8,42   | m/s    |
| <b><math>W_{u1}</math></b>   | -2,31  | m/s    |
| <b><math>W_1</math></b>      | 8,73   | m/s    |
| <b><math>\alpha_1</math></b> | -15,34 | degrés |

## Conditions à la sortie

|                              |        |        |
|------------------------------|--------|--------|
| <b><math>R_2</math></b>      | 0,454  | m      |
| <b><math>U_2</math></b>      | 14,26  | m/s    |
| <b><math>C_{u2}</math></b>   | 0      | m/s    |
| <b><math>C_{z2}</math></b>   | 9,5493 | m/s    |
| <b><math>W_{u2}</math></b>   | -14,26 | m/s    |
| <b><math>\alpha_2</math></b> | -56,20 | degrés |

## Résultats

|                                  |          |        |
|----------------------------------|----------|--------|
| <b><math>\Delta\alpha</math></b> | -40,85   | degrés |
| <b><math>P_{dispo}</math></b>    | 18540900 | watts  |
| <b><math>P_{arbre}</math></b>    | 17662355 | watts  |
| <b>Rendeme:</b>                  | 95,26 %  |        |

### Généralisation du couple sur une cascade dans un repère cylindrique



Fondamental

Pour une cascade en rotation, puisque  $P = M\omega$ , de la relation d'Euler :

$$P = \rho Q(r_1\omega C_{u1} - r_2\omega C_{u2}), \text{ on peut écrire :}$$

$$M = \rho Q(r_1 C_{u1} - r_2 C_{u2})$$

Également, pour une cascade fixe, à partir de l'équation de Newton adaptée au repère cylindrique :

$$F = \rho Q(C_{u1} - C_{u2}), \text{ on peut écrire :}$$

$$M = \rho Q(r_1 C_{u1} - r_2 C_{u2})$$

On observe donc qu'on obtient la même équation que la cascade tourne ou pas.

De plus, à partir de l'exemple traité précédemment, pour appliquer les équations à tout point dans la cascade, si on exprime la vitesse méridienne comme étant  $C_m = Q/A$ , où  $A$  est la section de passage au point d'intérêt, alors  $C_{r1} = C_{m1}$  et  $C_{z2} = C_{m2}$ .

On peut maintenant exprimer :

$$C_u = C_m \tan \gamma$$

$$\text{et } W_u = C_m \tan \alpha$$

$$\text{Comme } W_u = C_u - U \text{ alors } C_u = C_m \tan \alpha + U$$

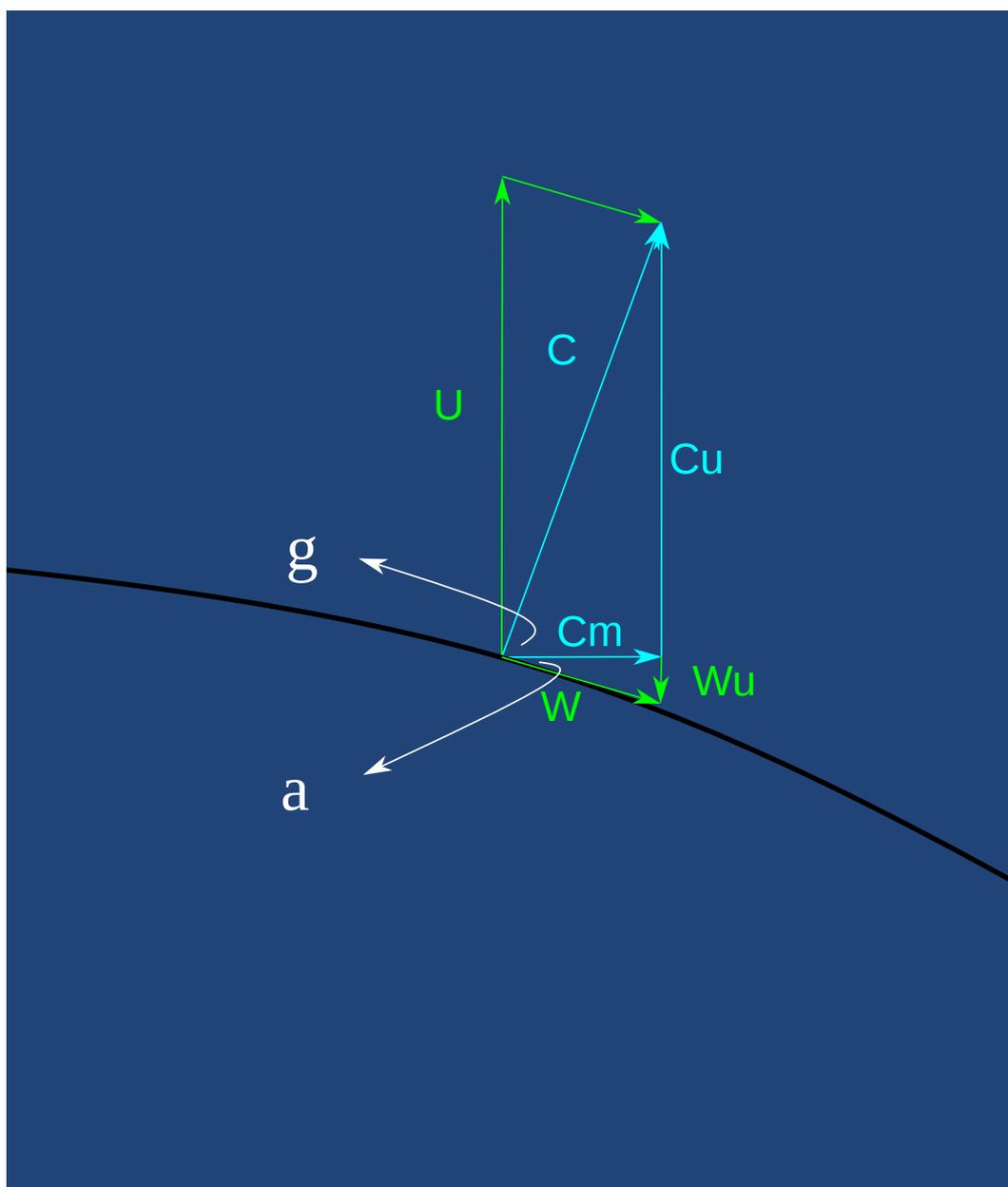
Pour deux points 1 et 2 situés à  $r_1$  et  $r_2$  dans une cascade en rotation, le couple généré par l'aubage entre ces deux points s'exprime :

$$M = \rho Q (r_1 (C_{m1} \tan \alpha_1 + U_1) - r_2 (C_{m2} \tan \alpha_2 + U_2))$$

Si la cascade est fixe les  $U$  deviennent nuls ainsi :

$$M = \rho Q (r_1 C_{m1} \tan \alpha_1 - r_2 C_{m2} \tan \alpha_2)$$

Ces deux équations démontrent bien comment la variation de l'angle de l'écoulement génère le couple.



Triangle de vitesse sur un point de la cascade en rotation

## 4. Équation de la conservation de la quantité de mouvement ou équation de Newton(1687)



La statique nous apprend que les forces internes d'un solide ou d'un fluide sont en équilibre avec les forces externes. Dans le cas d'un solide ou d'un fluide en mouvement, la seconde loi de Newton nous permet de lier la variation de la quantité de mouvement aux forces externes.

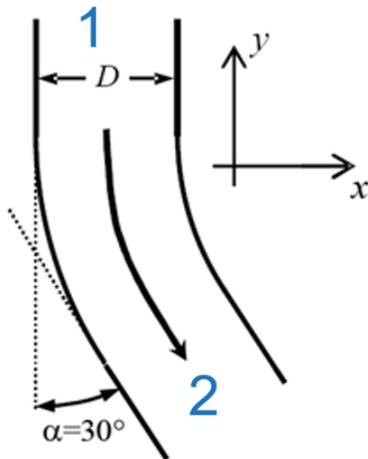
La deuxième loi de Newton permet d'intégrrer le mouvement du fluides dans l'équilibre des forces. Compte-tenu du fait que dans l'interaction fluide-structure nous nous intéressons à l'effort sur les parois solides, on met en application la troisième loi de Newton et la réaction  $F$  sur le solide s'exprime en fonction de la variation de la quantité de mouvement du fluide :

$$F = \frac{-d(mv)}{dt} = -ma \quad (cf. p.35)$$

$$N = (kgm/s)/s = kgm/s^2$$

Le fluide par sa variation de quantité de mouvement exerce une force sur les parois.

Si on considère un fluide incompressible et en charge, la masse et la densité étant constantes, seule la vitesse peut faire varier la quantité de mouvement, par sa variation en direction et en grandeur.



L'étude de l'écoulement dans un tuyau fixe montre que la courbure dans le tuyau génère des efforts.

$$F_x = \rho Q (v_{x1} - v_{x2}) \quad (cf. p.36)$$

C'est la courbure d'une ligne de courant ou filet fluide qui exerce une force d'inertie.

On observe que la force est dans le sens contraire de la variation vitesse. En généralisant :

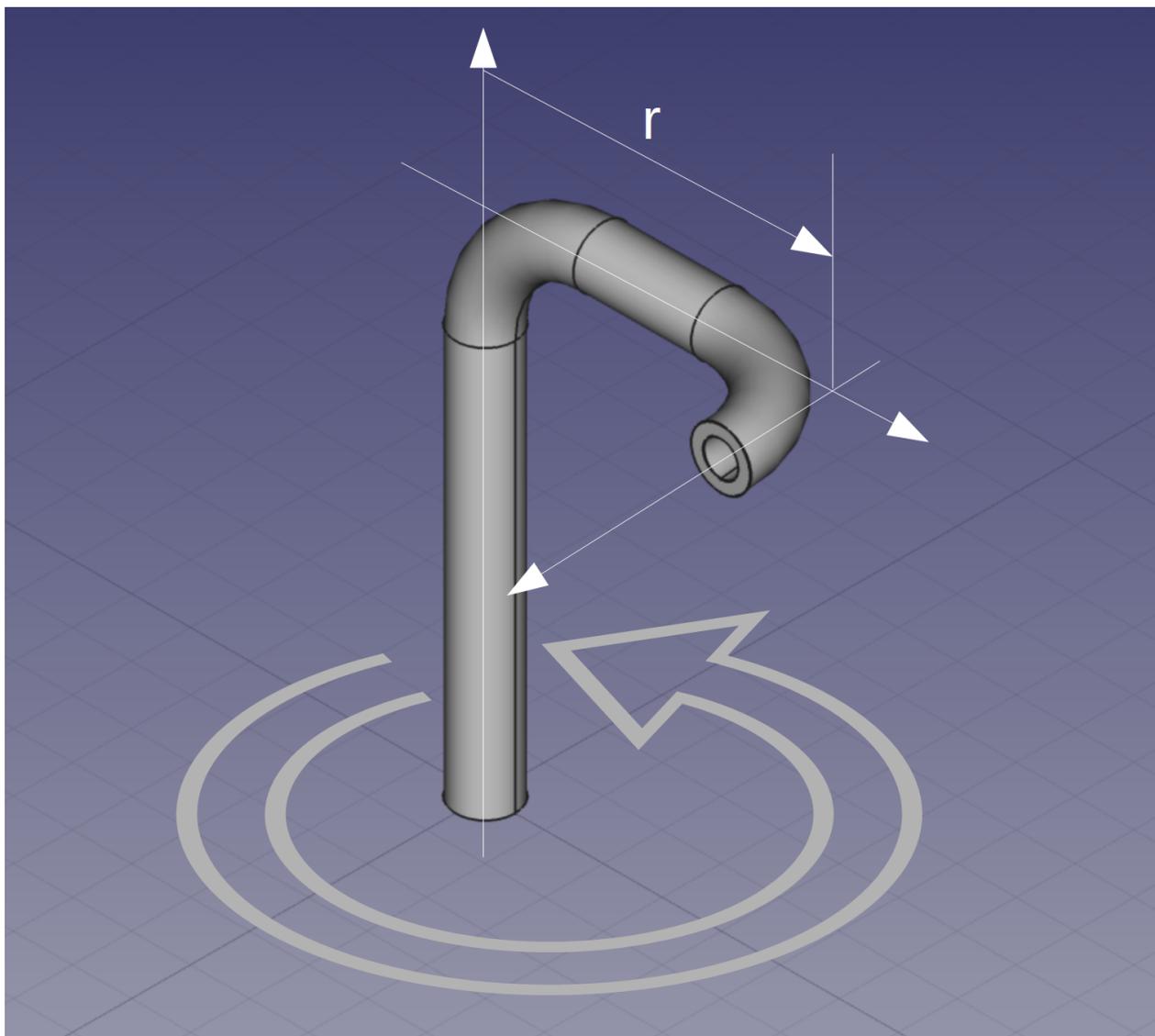
$$F_i = -\rho Q \Delta v_i$$

Écoulement dans un coude et réaction

### Application de la loi de Newton à un moulinet



Le moulinet montré est alimenté en bas par un débit vertical et tourne à une vitesse constante. Le débit sort tangentiellement et horizontalement à une distance r de l'axe dans la direction opposée à la rotation.



Moulinet

Les équations décrivant ce phénomène sont :

L'équation de Newton :  $F_i = -\rho Q \Delta v_i$

Permet de calculer le couple moteur agissant sur le moulinet :  $M = -\rho Q C_u \times r$

Puisque qu'il s'agit d'un moteur en rotation la puissance s'exprime :  $P = M \omega = -(\rho Q C_u \times r) * \omega$

On note que pour une puissance positive, le couple et la vitesse angulaire doivent être dans le même sens.

En réarrangeant les termes de cette équation on identifie  $\rho Q$  le débit massique tel que vu précédemment et le terme  $C_u r \omega$  est l'énergie massique exprimée en  $m^2/s^2$  ou de façon équivalente en  $J/kg$ .

L'énergie que développe le moulinet peut donc se calculer à partir des vitesses tangentielles fluide et solide ainsi ainsi . (cf. p.36)

$$E = -C_u r \omega = -C_u U$$

Comme on l'a vu, la force résulte d'un changement de direction axiale, à l'entrée, vers une direction tangentielle, à la sortie. Cet effort crée un couple qui à cause de la vitesse angulaire donne une puissance. Cette puissance est en fait le produit d'un débit massique par une énergie massique .

On observe que l'expression de l'énergie massique est le produit de la vitesse tangentielle fluide par la vitesse tangentielle solide. Ces deux vitesses étant dans des sens opposés.

**Vitesse relative et vitesse absolue**

Supposons un moulinet tel qu'illustré à droite avec :

- une vitesse débitante ( $W_u$ ) à la sortie du moulinet égale à  $-10m/s$ ,
- cette sortie se trouve à 1 m de l'axe de rotation, c'est le rayon ( $r$ ) de la sortie,
- une vitesse angulaire ( $\omega$ ) de 10 rad/s.

La vitesse tangentielle du moulinet à la sortie se calcule :  $U = r \times \omega = 10m/s$

La vitesse débitante ( $W_u$ ) est une vitesse relative au moulinet qui est en rotation telle que :  $C_u = U + W_u$ .

$U$  et  $W_u$  étant égales mais de sens inverse, le  $C_u$  est nul et donc la puissance générée est nulle.

Pour avoir une puissance positive, il faut une ou une combinaison des possibilités suivantes :

- Réduire la vitesse angulaire.
- Réduire le rayon de sortie.
- Diminuer la section de passage à la sortie pour augmenter la vitesse du fluide à la sortie.
- Augmenter le débit.

On réalise qu'avec l'inverse de ces possibilités, on obtiendra une puissance négative, c'est-à-dire qu'il faudra un moteur pour faire tourner le moulinet.

Reprenons maintenant le calcul avec les mêmes données sauf :

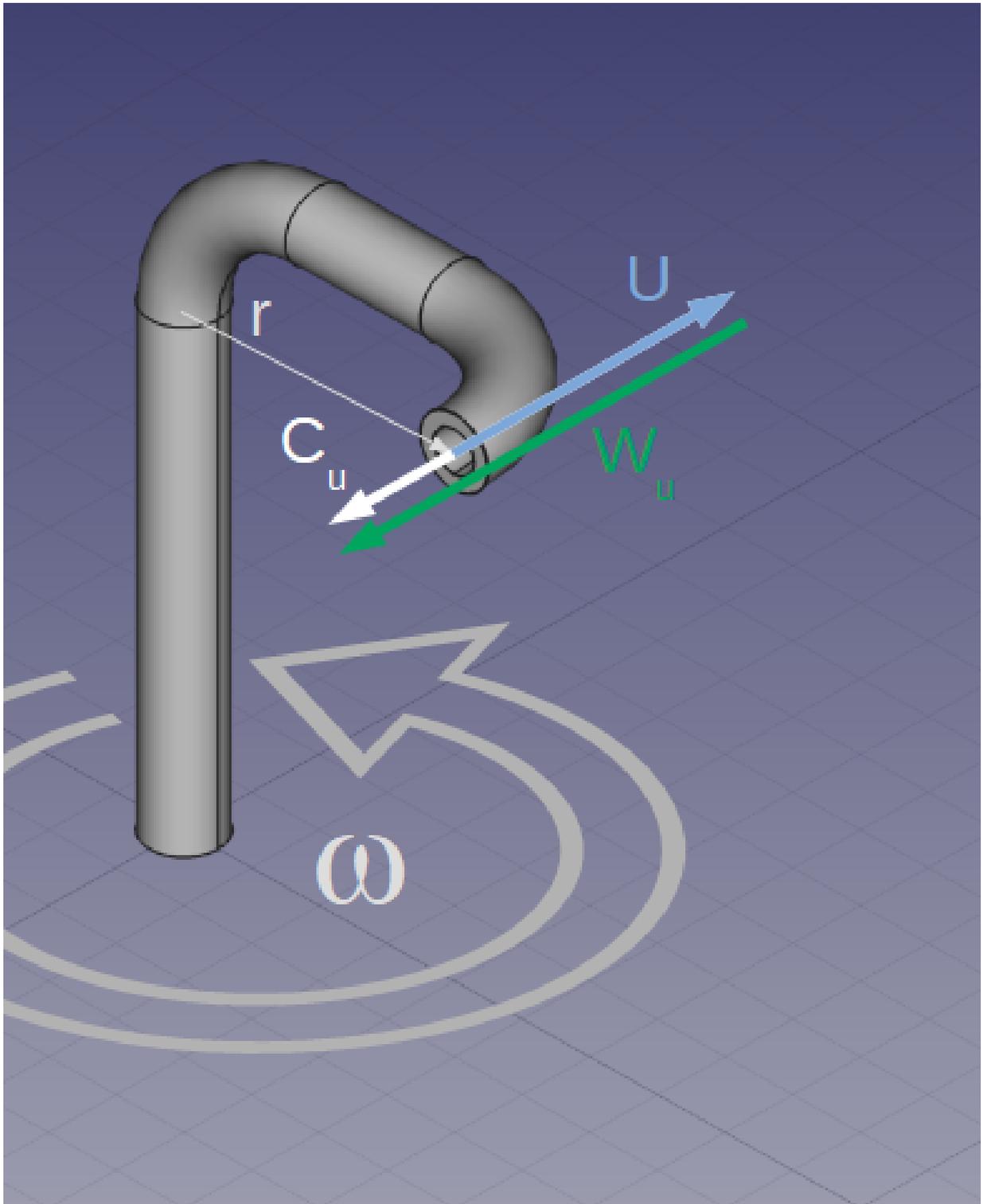
- une vitesse débitante ( $W_u$ ) à la sortie du moulinet égale à  $-20m/s$  et qui correspond à un débit de  $1m^3/s$ .

La vitesse tangentielle du moulinet à la sortie reste à  $10m/s$

$C_u = U + W_u$  et donc  $C_u = (10 - 20)m/s = -10m/s$

La force exercée sera de  $F_i = -\rho Q \Delta v_i = -1000 * 1 * -10 = 10000N$

La puissance produite sera  $P = M \omega = -(\rho Q C_u \times r) * \omega$   
 $= -(1000 * 1 * -10 * 1) * 10 = 100000W = 100kW$



*Vitesses à la sortie du moulinet*

## 5. Équation de la conservation de la quantité de mouvement

$$F = \frac{-d(mv)}{dt} = -ma$$

$F \rightarrow$  force en N

$m \rightarrow$  est le scalaire masse en kg

$v \rightarrow$  est la vitesse en m/s

$t \rightarrow$  est le temps en s

$a \rightarrow$  est le vecteur accélération en  $m/s^2$

## 6. Calcul de l'effort dans un coude

$$F_x = \rho Q (v_{x1} - v_{x2})$$

$F \rightarrow$  force en N

$\rho \rightarrow$  est la densité exprimé en kg/m<sup>3</sup>

$Q \rightarrow$  est le débit volumique exprimé en m<sup>3</sup>/s

$v \rightarrow$  est la vitesse en m/s

## 7. Étude du moulinet

$$E = -C_u r \omega = -C_u U$$

$C_u \rightarrow$  composante tangentielle de la vitesse du fluide en m/s

$r \rightarrow$  est le rayon en m

$\omega \rightarrow$  est la vitesse angulaire en rad/s

$E \rightarrow$  est l'énergie massique en J/kg ou en m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>

## 8. Perte singulière

$$h_c = k \frac{V^2}{2g}$$

$h_c \rightarrow$  perte par choc ou singulière exprimée en m

$k \rightarrow$  coefficient de perte singulière

$V \rightarrow$  est la vitesse en m/s

$g \rightarrow$  est l'accélération de la gravité en m/s<sup>2</sup>