AVERTISSEMENT

Cet examen de pratique vous est fourni à titre d'exemple. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans l'examen que vous aurez. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient se retrouver dans votre examen. La durée de chaque partie de votre examen pourrait différer de cet examen de pratique. L'examen que vous passerez pourrait être plus court ou plus long, plus facile ou plus difficile.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE – MAT165

EXAMEN INTRA DE PRATIQUE – PARTIE I

École de technologie supérieure — Version du 15 février 2023

- Aucune calculatrice **pour la première partie de l'examen**.
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.
- Les étudiants seront informés par leur enseignant de la documentation permise.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier supplémentaire d'examen*** (cahier blanc) et non sur le questionnaire.
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (4 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE I (35 points)

---

(12) **1.** Rappelons que si $\mathbf{u} = \left[u_1, u_2, u_3\right]$ et $\mathbf{v} = \left[v_1, v_2, v_3\right]$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors un vecteur perpendiculaire au plan engendré par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est donné par le *produit vectoriel* de ces deux vecteurs qui est défini et dénoté par

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left[u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1\right].$$

Considérons les trois points suivants :

$$P = (1, 7, -2), Q = (-3, 2, 1), R = (2, -5, 3).$$

Considérons aussi les quatre droites suivantes de $\mathbb{R}^3$, certaines données par des équations paramétriques, d'autres par des équations symétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad d_2 : \begin{cases} x = 4 - s \\ y = -1 + 6s \\ z = 4 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R});$$

$$d_3 : x - 3 = \frac{2 - y}{4} = z; \qquad d_4 : 4 - x = y - 3 = \frac{z + 2}{3}.$$

(a) Trouvez l'équation du plan passant par les trois points P, Q et R.

(b) Montrez que les droites d_1 et d_2 se rencontrent et trouvez en quel point.

(c) Trouvez l'équation du plan contenant les deux droites d_1 et d_2.

(d) Montrez que les deux droites d_3 et d_4 sont *gauches* (donc ni concourantes, ni parallèles).

---

(8) **2.** Vous allez suivre les étapes décrites ci-après afin de trouver des équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans suivants :

$$x + 2y + 5z = 1 \quad \text{et} \quad 2x + y - 3z = 0.$$

(a) *Montrez* que le point $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ est commun aux deux plans et *montrez* que le vecteur $\mathbf{v} = \left[-11, 13, -3\right]$ est *perpendiculaire* au vecteur normal de chacun des deux plans. Écrivez ensuite des équations paramétriques de la droite cherchée.

(b) Plutôt que d'utiliser l'approche vectorielle, vous décidez d'utiliser l'approche matricielle. Donc utilisez les opérations de lignes ainsi que l'algorithme de Gauss-Jordan afin de résoudre le système suivant de deux équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

---

(15) **3.** Rappelons que si $z = f(x,y)$ est une fonction de deux variables indépendantes x et y, alors son graphique est une surface S dans l'espace. Si k est une constante, une courbe $f(x,y) = k$ est appelée *courbe de niveau* k de f. Si (a,b) est un point du domaine de f et si l'on suppose que les dérivées partielles premières de f existent en (a,b), alors l'*équation du plan tangent* à la surface S au point $\big(a,b,f(a,b)\big)$ est donnée par

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)\,(x-a) + f'_y(a,b)\,(y-b)\,, \quad \left(f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

De plus, si $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$ est un vecteur *unitaire*, la *dérivée directionnelle* de f au point (a,b) dans la direction du vecteur $\mathbf{v}$ est dénotée par $D_{\mathbf{v}}f(P)$ et peut se calculer par le produit scalaire suivant : $D_{\mathbf{v}}f(P) = \nabla f(a,b)\cdot\mathbf{v}$. Ici le symbole ∇ sert pour désigner le vecteur gradient de f, défini par $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$. Ce vecteur est toujours *perpendiculaire* aux courbes de niveau de f.

Voici les questions. Soit $f(x,y) = -2x^2 + 12x - y^2 - 4y - 27$, une fonction admettant des dérivées partielles continues. Considérez le paraboloïde défini par $z = f(x,y)$.

(a) Quelles sont les coordonnées du point maximum de ce paraboloïde ? Justifiez votre réponse en utilisant soit une complétion du carré, soit un calcul de dérivées partielles.

(b) Notez que $f'_x(1,2) = 8$. Le chiffre 8 est la pente de quelle droite tangente ?

(c) Trouvez l'équation du plan tangent au paraboloïde au point $(3,4,-41)$.

(d) Calculez la dérivée directionnelle de f au point $(2,3)$, dans la direction du vecteur $[-1,5]$. N'oubliez pas de rendre unitaire le vecteur avant vos calculs.

(e) Dans quelle direction la dérivée directionnelle au point $(2,3)$ est-elle maximale ? Quelle est alors cette valeur ?

(f) Notez que $f(2,3) = -32$. La figure 1 montre la courbe de niveau -32 de f, le point $(2,3)$ sur cette courbe ainsi que le vecteur unitaire utilisé à la question **(d)**. Une autre courbe de niveau de f est montrée. En justifiant votre réponse, ce niveau est-il plus grand ou plus petit que -32 ?

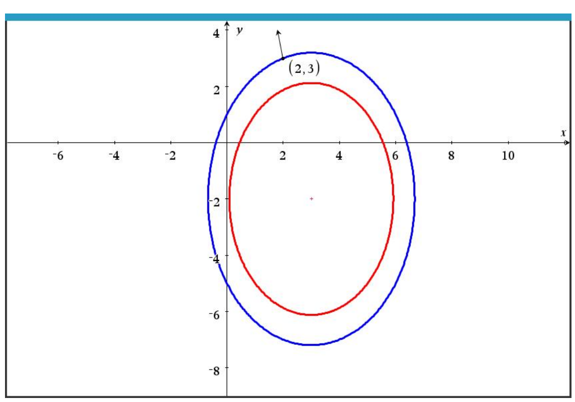

FIGURE 1 – Deux courbes de niveau de la fonction f

ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE – MAT165

EXAMEN INTRA DE PRATIQUE – PARTIE II

École de technologie supérieure Version du 15 février 2023

DOCUMENTATION PERMISE

- Aucune calculatrice **pour la première partie de l'examen**.
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.
- Les étudiants seront informés par leur enseignant de la documentation permise.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier supplémentaire d'examen*** (cahier blanc) et non sur le questionnaire.
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (4 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE II (65 points)

---

(15) **4.** En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, résolvez chacun des systèmes d'équations linéaires $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{K}$ suivants en utilisant la commande `rref()`. Dans le cas d'une infinité de solutions, donnez votre réponse sous forme paramétrique. Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{X}$ sont

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Et la matrice-colonne des inconnues $\mathbf{K}$ est

(a) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(d) Que vaut le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$? Expliquez pourquoi on n'a pas à le calculer pour répondre à cette question !

---

(16) **5.** Répondez à chacune des questions suivantes.

(a) Trouvez la distance entre le point (1, 2, 7) et le plan $2x + 3y + z = 8$.

(b) Trouvez la distance entre le point (1, 4, 1) et la droite $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$.

(c) Soit le triplet d'équations paramétriques à deux paramètres s et t :

$$\begin{cases} x = 3 + 5s - 2t \\ y = -8 + s - t \\ z = 1 - 2s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Montrez qu'il s'agit d'un plan en retrouvant la forme standard $Ax + By + Cz = D$.

(d) Trouvez l'équation du plan tangent à la sphère $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 49$ au point (2,4,5).

---

(9) **6.** Deux particules C_1 et C_2 se déplacent dans le plan. Les trajectoires respectives à l'instant t sont données par les courbes paramétriques suivantes :

$$C_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\cos(t) \\ y = 3 + 2\sin(t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 4),$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 1 - \dfrac{t^2}{4} \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 4).$$

(a) Nommez chacune des ces courbes ("cercle", "parabole", "segment de droite"???).

(b) Montrez que les deux trajectoires se sont croisées et qu'il y a eu presque collision!

(c) Trouvez les coordonnées (x, y) du point d'intersection des deux courbes.

(d) Au point d'intersection des deux trajectoires, trouvez l'angle (en degrés) que forment les deux courbes.

(e) Dans l'intervalle de temps $[0, 4]$, laquelle des deux particules parcourt la plus grande distance?

---

(25) **7.** On considère deux courbes dans l'espace, C_1 et C_2 ainsi que trois surfaces S_1, S_2 et S_3 :

$$C_1 : \begin{cases} x = -1 + 4\cos(t) \\ y = 11 - 8\cos(t) \\ z = 2\sin(t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi); \qquad C_2 : \mathbf{r}_2(t) = \left[t^3, t^2, 2t + 1\right] \quad (t \in \mathbb{R});$$

$$S_1 : y = x^2 + 4z^2 - 6;$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 21;$$
$$S_3 : 2x + y - 9 = 0.$$

(a) Trouvez la longueur de C_1.

(b) Trouvez des équations paramétriques de la droite tangente à C_2 au point où $t = 2$.

(c) En *justifiant* vos calculs, montrez que la seule des trois surfaces sur laquelle ne se retrouve pas la courbe C_1 est la surface S_2. D'ailleurs, des graphiques confirment cela. En effet, jetez un coup d'œil aux graphiques de la courbe C_1 avec chacune des trois surfaces, Nous les avons tracées avec Nspire en choisissant les réglages suivants pour la plage : $-20 < x, y, z < 20$: figures 2, 3 et 4.

(d) Il semble bien que la surface S_2 soit une sphère que la courbe C_1 vient percer. Trouvez le centre et le rayon de cette sphère et trouvez le point ou les points où la courbe C_1 perce la surface S_2.

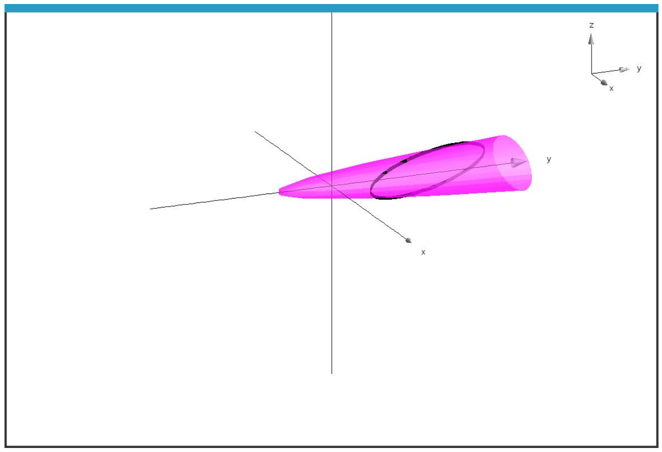

FIGURE 2 – Courbe C_1 et surface S_1

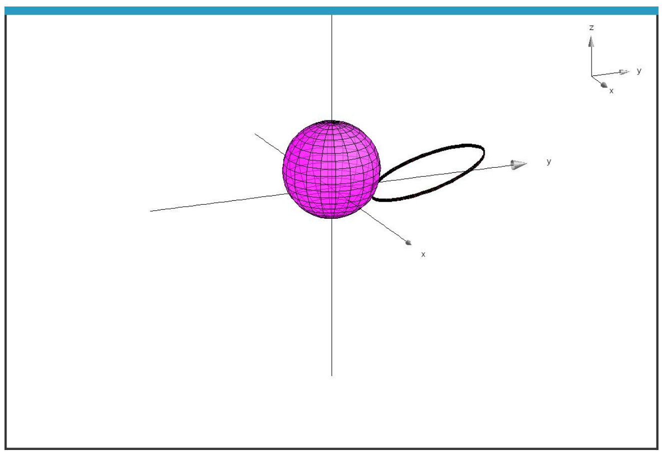

FIGURE 3 – Courbe C_1 et surface S_2

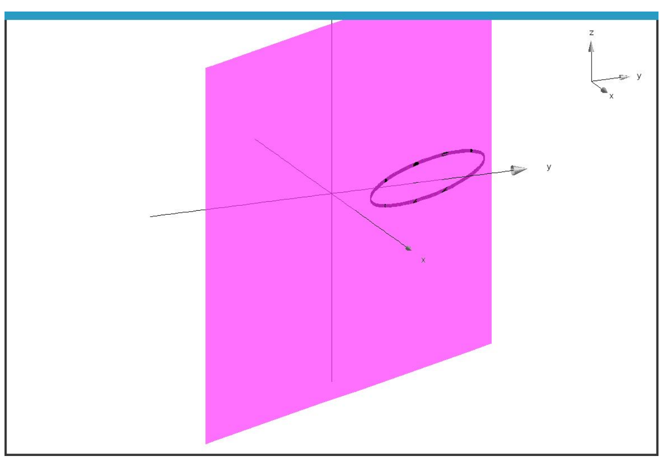

FIGURE 4 – Courbe C_1 et surface S_3

Bon examen!