ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE – MAT165

SOLUTIONS DE L'EXAMEN INTRA DE PRATIQUE

École de technologie supérieure — Version du 18 février 2023

---

(12) **1.** Considérons les trois points suivants :

$$P = (1, 7, -2), Q = (-3, 2, 1), R = (2, -5, 3).$$

Considérons aussi les quatre droites suivantes de $\mathbb{R}^3$, certaines données par des équations paramétriques, d'autres par des équations symétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 4t \quad (t \in \mathbb{R}); \\ z = 5 - t \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 4 - s \\ y = -1 + 6s \quad (s \in \mathbb{R}); \\ z = 4 + s \end{cases}$$

$$d_3 : x - 3 = \frac{2 - y}{4} = z; \qquad d_4 : 4 - x = y - 3 = \frac{z + 2}{3}.$$

(a) Trouvons l'équation du plan passant par les trois points P, Q et R.
On sait que le vecteur

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left[-4, -5, 3\right] \times \left[1, -12, 5\right].$$

est normal au plan cherché. Sans calculatrice, on calcule ce produit vectoriel en appliquant la définition donnée ou en utilisant le truc du "déterminant symbolique", ce que nous faisons ici :

$$\mathbf{n} = \left[-4, -5, 3\right] \times \left[1, -12, 5\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -5 & 3 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$= \mathbf{i}\,(-25 + 36) - \mathbf{j}\,(-20 - 3) + \mathbf{k}\,(48 + 5) = 11\,\mathbf{i} + 23\,\mathbf{j} + 53\,\mathbf{k} = \left[11, 23, 53\right].$$

L'équation du plan est donc $11x + 23y + 53z = D$ et on trouve la valeur de D en substituant n'importe lequel des trois points dans l'équation. En prenant P par exemple, nous avons $D = 11 \cdot 1 + 23 \cdot 7 + 53 \cdot (-2) = 11 + 161 - 106 = 66$ et l'équation du plan est donc $11x + 23y + 53z = 66$.

(b) Montrons que les droites d_1 et d_2 se rencontrent et trouvons en quel point.

Remarquons au départ que ces droites ne sont pas parallèles puisque les vecteurs de direction respectifs ne le sont pas : en effet, $\mathbf{v_1} = \left[2, -4, -1\right]$ n'est pas un multiple de $\mathbf{v_2} = \left[-1, 6, 1\right]$. Cela ne signifie pas qu'elles sont nécessairement concourantes – elles pourraient être *gauches* – mais si nous allons trouver un point d'intersection. Pour cela, on doit résoudre le système de trois équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 1+2t=4-s \\ 1-4t=-1+6s \\ 5-t=4+s \end{cases}$$

Commençons par résoudre les deux premières équations en les réécrivant comme suit :

$$\begin{cases} 2t+s=3 \\ 4t+6s=2 \end{cases}$$

En doublant la première ligne du dernier système et en soustrayant ensuite membre à membre les deux équations, on trouve facilement que $s=-1$ et donc $t=2$. On vérifie ensuite que ces deux nombres satisfont bien **aussi** la troisième équation : en effet $5-2=4+-1$. En substituant la valeur $t=2$ dans les équations paramétriques de d_1 ou encore la valeur $s=-1$ dans les équations paramétriques de d_2, on trouve que le point de rencontre des droites d_1 et d_2 est le point $(5,-7,3)$.

(c) Trouvons l'équation du plan contenant les deux droites d_1 et d_2.

Un vecteur normal à ce plan s'obtient par le produit vectoriel des vecteurs de direction de chacune des droites. On effectue le calcul pour trouver que $\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}=[2,-1,8]$ et l'équation du plan est donc $2(x-5)-(y+7)+8(z-3)=0$, ce qui se simplifie en l'équation $2x-y+8z=41$.

(d) Montrons que les deux droites d_3 et d_4 sont *gauches* (donc ni concourantes, ni parallèles).

Réécrivons ces droites sous forme paramétrique en utilisant "t" comme paramètre de d_3 et "s" comme paramètre de d_4. En résolvant dans chacune d'elles pour les variables x, y et z, cela donne

$$d_3:\begin{cases} x=3+t \\ y=2-4t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}); \qquad d_4:\begin{cases} x=4-s \\ y=3+s \\ z=-2+3s \end{cases} \quad (s\in\mathbb{R}).$$

Il est clair que ces droites sont non parallèles puisque $\mathbf{v_3}=[1,-4,1]$ n'est pas un multiple de $\mathbf{v_4}=[-1,1,3]$. Elles sont aussi non concourantes puisque le système de trois équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 3+t=4-s \\ 2-4t=3+s \\ t=-2+3s \end{cases}$$

n'admet pas de solutions. En effet, les deux premières équations admettent la solution $s=\frac{5}{3}$ et $t=-\frac{2}{3}$ puisque

$$\begin{cases} 3+t=4-s \\ 2-4t=3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+s=1 \\ 4t+s=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t+4s=4 \\ 4t+s=-1 \end{cases} \Leftrightarrow s=\frac{5}{3},\ t=-\frac{2}{3}.$$

Mais les valeurs $s = \frac{5}{3}$ et $t = -\frac{2}{3}$ ne satisfont pas la troisième équation puisque

$$-\frac{2}{3} \neq -2 + 3 \cdot \frac{5}{3} = 3\,.$$

Les droites d_3 et d_4 sont bien gauches.

---

(8) **2.** Suivons les étapes décrites ci-après afin de trouver des équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans suivants :

$$x + 2y + 5z = 1 \quad \text{et} \quad 2x + y - 3z = 0.$$

(a) *Montrons* que le point $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ est commun aux deux plans et *montrons* que le vecteur $\mathbf{v} = \left[-11, 13, -3\right]$ est *perpendiculaire* au vecteur normal de chacun des deux plans. Écrivons ensuite les équations paramétriques de la droite cherchée.

Le point P est bien commun aux deux plans puisqu'en subsitituant ses coordonnées dans chacune des équations, ces dernières sont satisfaites. Et le produit scalaire du vecteur $\mathbf{v}$ avec le vecteur normal à chacun des plans donne 0. En effet,

$$-\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot 0 = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{et} \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} - 3 \cdot 0 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0\,;$$

$$\left[-11, 13, -3\right] \cdot \left[1, 2, 5\right] = -11 + 26 - 15 = 0 \quad \text{et} \quad \left[-11, 13, -3\right] \cdot \left[2, 1, -3\right] = -22 + 13 + 9 = 0\,.$$

Des équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans sont donc

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - 11t \\ y = \dfrac{2}{3} + 13t \\ z = -3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

(b) Plutôt que d'utiliser l'approche vectorielle, décidons d'utiliser l'approche matricielle.

Donc utilisons les opérations de lignes ainsi que l'algorithme de Gauss-Jordan afin de résoudre le système suivant de deux équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

On forme la matrice augmentée de format 2×4 et on effectue les opérations de lignes utilisant le symbole $\sim$. La notation L_{ij} est utilisée ici pour indiquer qu'on permute les rangées i et j, la notation $L_i(c)$ indiquera qu'on multiplie la rangée i par c et la notation $L_{ij}(c)$ servira pour indiquer qu'à la rangée i on a ajouté c fois la rangée j.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_{21}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -13 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2(-1/3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \underset{L_{12}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right].$$

La variable libre est z. En posant $z = t$, nous trouvons que $x = \frac{11}{3}t - \frac{1}{3}$ et $y = -\frac{13}{3}t + \frac{2}{3}$. Posant $s = \frac{t}{3}$, cela donne bien comme tantôt :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - 11s \\ y = \dfrac{2}{3} + 13s \\ z = -3s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

---

(15) **3.** Soit $f(x, y) = -2x^2 + 12x - y^2 - 4y - 27$, une fonction admettant des dérivées partielles continues. Considérons le paraboloïde défini par $z = f(x, y)$.

(a) Quelles sont les coordonnées du point maximum de ce paraboloïde ? Justifions notre réponse en utilisant soit une complétion du carré, soit un calcul de dérivées partielles (bien que cela sera repris dans la seconde partie du cours après l'examen intra).

Un peu d'algèbre et une complétion du carré donnent ceci :

$$-2x^2 + 12x - y^2 - 4y - 27 = -2\big(x^2 - 6x\big) - \big(y^2 + 4y\big) - 27$$

$$= -2\big((x-3)^2 - 9\big) - \big((y+2)^2 - 4\big) - 27 = -2(x-3)^2 - (y+2)^2 - 5.$$

Pour annuler simultanément les deux carrés, on doit choisir $x = 3$ et $y = -2$, ce qui donne la valeur -5. Le paraboloïde est donc ouvert vers le bas et son point sommet est le point $(3, -2, 5)$. Si l'on préfère utliser le calcul différentiel, alors on calcule les dérivées partielles et résout le système pour trouver les points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -4x + 12 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} - 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Par le test des dérivées secondes, ce point critique est un maximum local puisqu'au point $(3, -2)$, le discriminant est bien positif :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = -4 < 0$$

et puisqu'on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0$, le point $(3, -2)$ est un maximum local (en fait global ici à cause que c'est un paraboloïde ouvert vers le bas).

(b) Notons que $f'_x(1,2) = 8$. Le chiffre 8 est la pente de quelle droite tangente ?

C'est une dérivée partielle par rapport à x au point $(1,2)$. Donc cela signifie que le paraboloïde (la surface définie par $z = f(x, y)$) a été coupé par le plan $y = 2$, ce qui a donné une courbe dans l'espace. La droite tangente à cette courbe au point $(1,2, f(1,2)) = (1, 2, -29)$ a une pente de 8.

(c) Trouvons l'équation du plan tangent au paraboloïde au point $(3,4,-41)$.

Au point $(3, 4)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = -4\cdot 3+12 = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = -2\cdot 4-4 = -12$. Mais alors l'équation du plan tangent est $z = -41+0\cdot(x-3)+-12\cdot(y-4) = -12y+7$ ou encore $12y+z-7 = 0$.

(d) Calculons la dérivée directionnelle de f au point $(2,3)$, dans la direction du vecteur $\left[-1,5\right]$. N'oublions pas de rendre unitaire le vecteur avant nos calculs.

On calcule le vecteur gradient de f au point $(2, 3)$ et on fait le produit scalaire de ce vecteur avec le vecteur *normalisé* du vecteur de direction $\left[-1,5\right]$:

$$\nabla f(x, y) = \left[-4x+12, -2y-4\right] \quad \Rightarrow \quad \nabla f(2, 3) = \left[4, -10\right].$$

Par conséquent, la réponse est

$$\left[4,-10\right]\cdot\frac{\left[-1,5\right]}{\sqrt{26}} = \frac{(-4-50)}{\sqrt{26}} = -\frac{27\sqrt{26}}{13}.$$

(e) Dans quelle direction la dérivée directionnelle au point $(2,3)$ est-elle maximale ? Quelle est alors cette valeur ?

On sait que c'est dans la direction du gradient et que sa valeur est la norme du gradient. Donc direction du vecteur $\left[4,-10\right]$ et valeur de $\sqrt{16+100} = \sqrt{4\cdot 29} = 2\sqrt{29}$.

(f) Notons que $f(2,3) = -32$. La figure 1 montre la courbe de niveau -32 de f, le point $(2,3)$ sur cette courbe ainsi que le vecteur unitaire utilisé à la question **(d)**. Une autre courbe de niveau de f est montrée. En justifiant notre réponse, ce niveau est-il plus grand ou plus petit que -32 ?

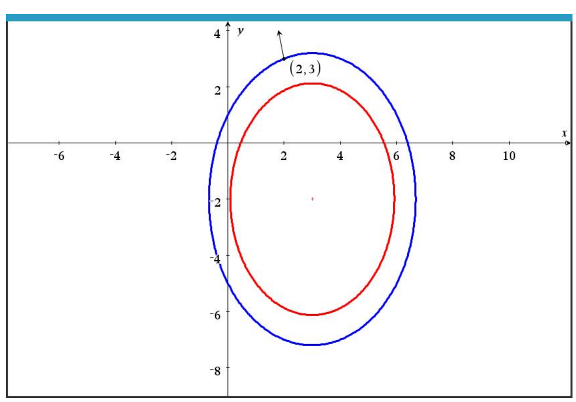

FIGURE 1 – Deux courbes de niveau de la fonction f

La dérivée directionnelle de f au point $(2,3)$ dans la direction du vecteur $\left[-1,5\right]$ est négative, donc la fonction f décroît dans cette direction. D'ailleurs, il est clair que la direction du vecteur unitaire illustré est presqu'en sens opposé au gradient. Donc le courbe qui est à l'intérieur a un niveau plus élevé. Donc ce niveau est plus grand que -32.

---

(15) **4.** En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, résolvons chacun des systèmes d'équations linéaires $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{K}$ suivants en utilisant la commande `rref()`. Dans le cas d'une infinité de solutions, donnons notre réponse sous forme paramétrique. Trouvons ce que vaut le déterminant de la matrice **A** et expliquons pourquoi on n'a pas à le calculer pour répondre à cette question! Les matrices **A**, **X**, et **K** sont

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

.

On peut déjà dire que si la solution au système $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ n'est pas la solution triviale, alors le déterminant de la matrice **A** sera 0. En effet, lorsque **A** est une matrice carrée *inversible*, alors le système $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale. Pour répondre aux questions, nous augmentons la matrice **A** de chacune des matrices (même si augmenter du vecteur-colonne **0** n'est pas nécessaire). Nous refilons les calculs à Nspire (qui ne distingue pas les lettres majustcules des minuscules) mais des couleurs similaires à celles des matrices précédentes ont été utilisées : voir la figure 2 suivante :

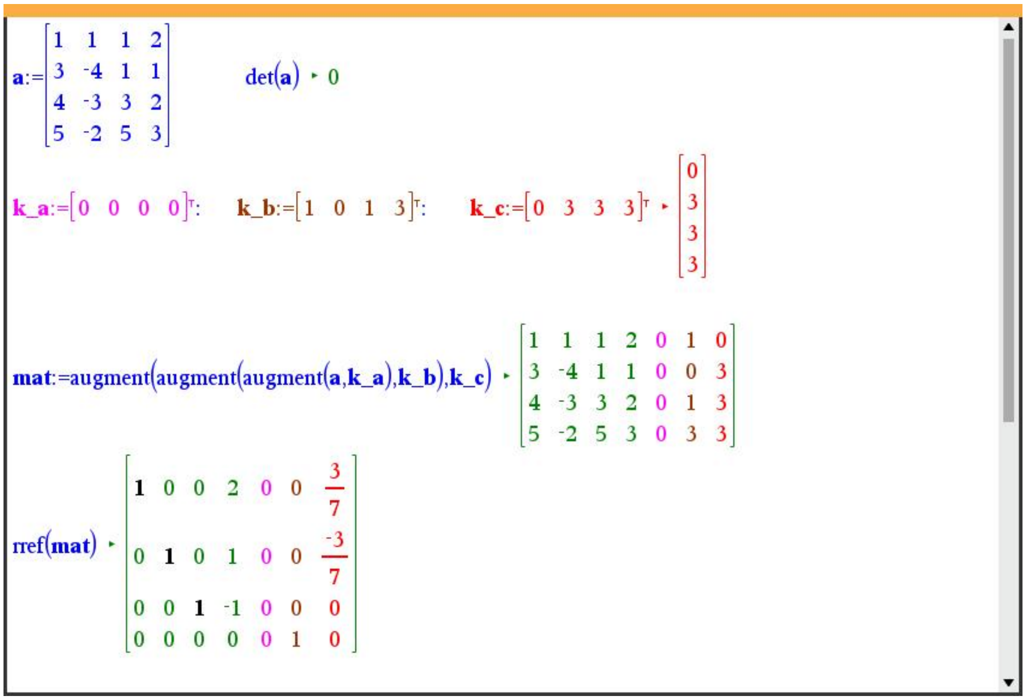

FIGURE 2 – Gauss-Jordan avec Nspire

La variable libre est w puisque les trois premières colonnes de la matrice **A** sont des colonnes pivots. Posons donc $w = t$.

Si $\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, alors la solution est $\begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \\ w = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Puisque le système homogène possède une infinité de solutions, cela signifie que e déterminant de la matrice **A** est nul. Un calcul de Nspire le montre au début de la figure 2 mais il était aussi possible de voir que ce déterminant serait nul : en effet, la troisième ligne de la matrice **A** est la somme des deux premières.

Si $\mathbf{K} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 3]^{\mathrm{T}}$, alors la solution est l'ensemble vide ($\varnothing$) puisqu'on a $0 = 1$.

Si $\mathbf{K} = [0 \quad 3 \quad 3 \quad 3]^{\mathrm{T}}$, alors la solution est $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} - 2t \\ y = -\dfrac{3}{7} - t \\ z = t \\ w = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Il est toujours utile de vérifier nos réponses. Il suffit de faire calculer le produit **AX** dans chacun des cas et voir si ça se simplifie en le **K** approprié. Évidemment, la commande `solve()` donne permet aussi de vérifier nos réponses : figure 3.

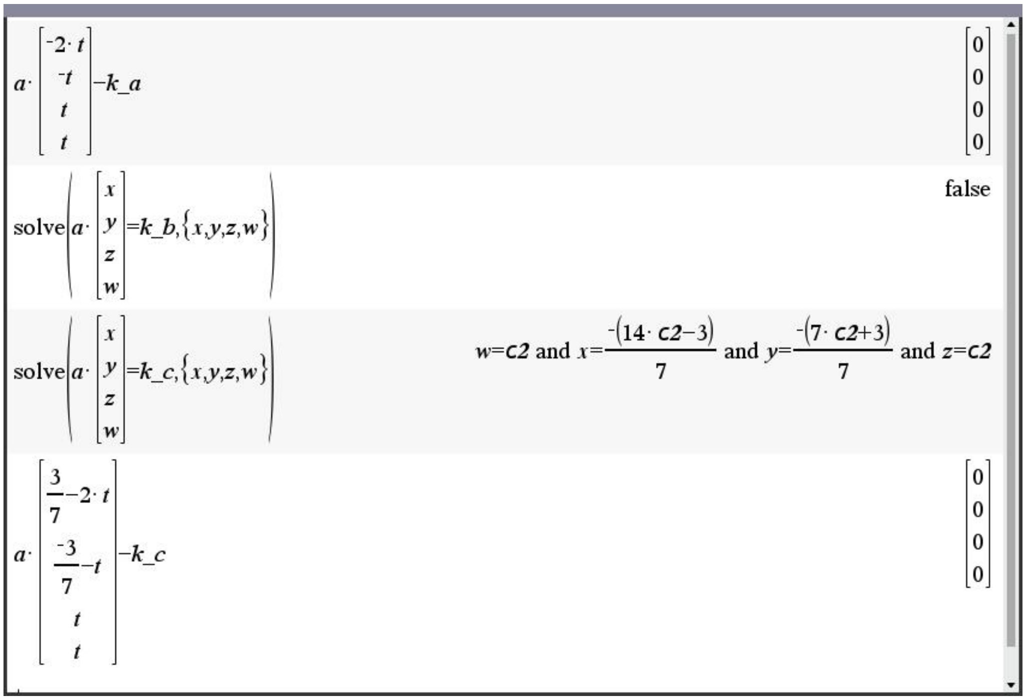

FIGURE 3 – Vérifications avec Nspire pour la question 4

---

(16) **5.** Répondons à chacune des questions suivantes.

(a) Trouvons la distance entre le point (1, 2, 7) et le plan $2x+3y+z=8$.

Il y a plusieurs façons de calculer cette distance. On peut trouver en quel point la droite partant du point (1, 2, 7) et qui est perpendiculaire au plan $2x+3y+z=8$ vient percer ce dernier et ensuite calculer la distance entre ces deux points. On peut aussi utiliser une formule (peut-être démontrée en classe) qui dit que la distance d'un point P à un plan Π est donnée par

$$\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}\right|}{\|\mathbf{n}\|} \quad \text{où} \quad Q\in\Pi\,.$$

On peut aussi considérer la fonction de deux variables indépendantes x et y calculant la distance entre le point $P=(1,2,7)$ et un point quelconque du plan, point de la forme $X=(x,y,8-2x-3y)$. Cette fonction sera un paraboloïde ouvert vers le haut, il possède donc un minimum absolu, là où son plan tangent est horizontal, donc il suffira d'annuler les dérivées partielles de cette fonction. La séance Nspire de la figure 4 utilise chacune des ces méthodes et montre à chaque fois que la distance cherchée est $\frac{\sqrt{14}}{2}$ unités de distance, atteinte au point $\left(0,\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$. On n'oublie pas que dans Nspire les points ainsi que les vecteurs sont entrés entre crochets.

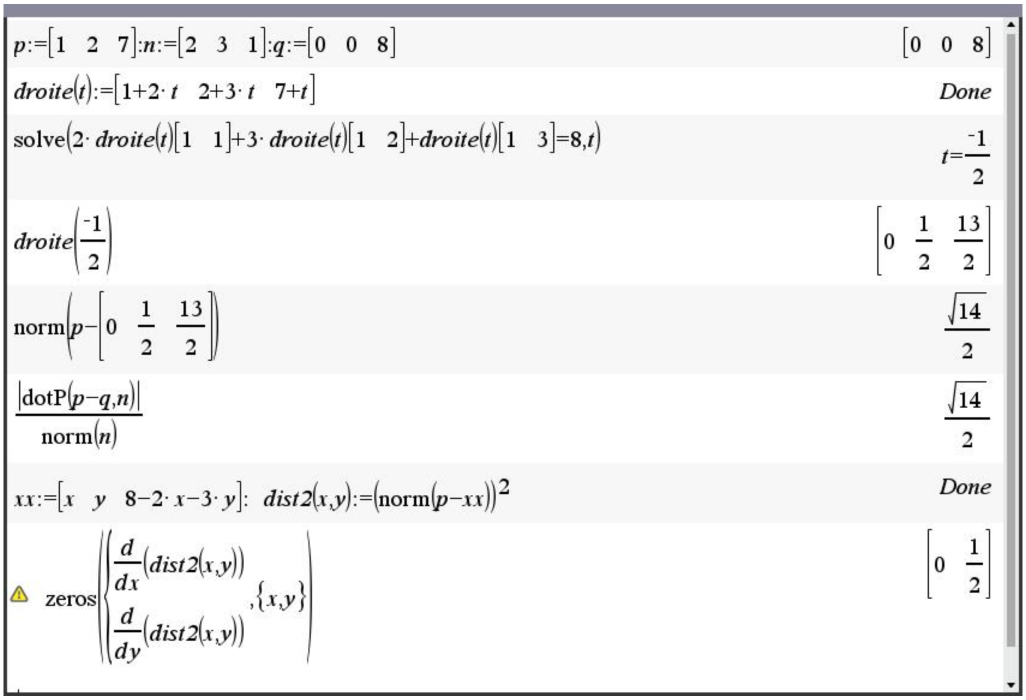

FIGURE 4 – Distance du point au plan de la question 5(a)

(b) Trouvons la distance entre le point (1, 4, 1) et la droite $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$.

On réécrit la droite sous forme paramétrique et utilise l'une des deux approches suivantes. La fonction qui minimise la distance entre le point (1,4,1) et cette droite en est une d'une seule variable. Le calcul à une variable peut donc être utilisé. Ou encore, on se sert d'une formule (possiblement démontrée en classe) qui dit que la distance d'un point P à une droite D parallèle au vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ est donnée par la formule

$$\frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{où} \quad Q \in D.$$

On trouve que le point $\left(\frac{49}{19}, \frac{26}{19}, \frac{37}{19}\right)$ est celui sur la droite qui est le plus proche du point (1,4,1) et que la distance est $\frac{14\sqrt{19}}{19}$ unités de distance.

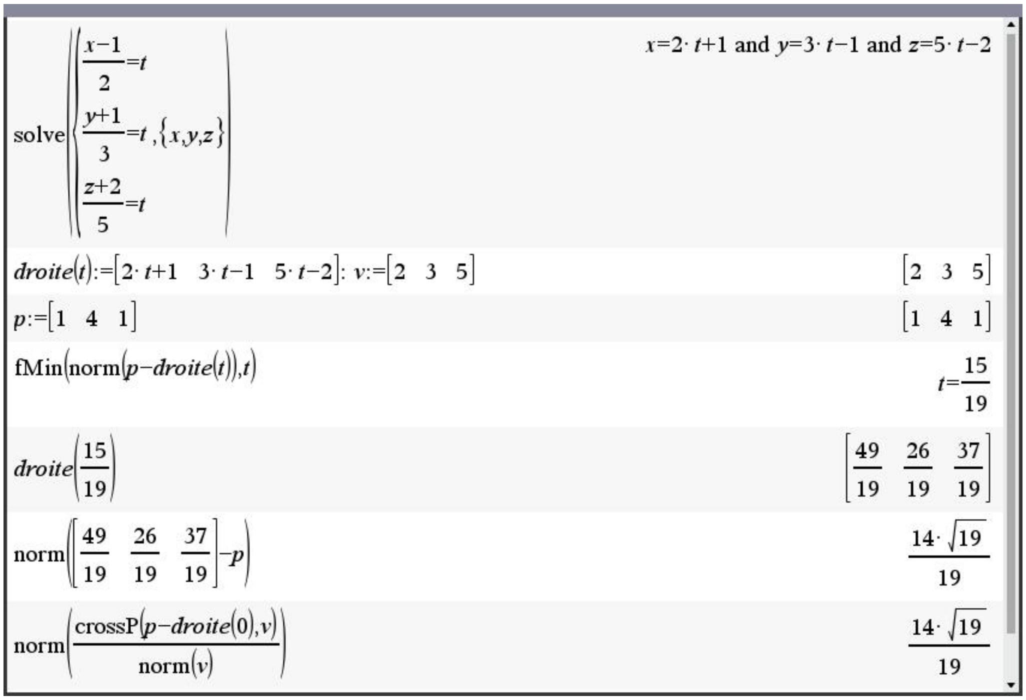

FIGURE 5 – Distance du point à la droite de la question 5(b)

(c) Soit le triplet d'équations paramétriques à deux paramètres s et t :

$$\begin{cases} x = 3+5s-2t \\ y = -8+s-t \\ z = 1-2s+t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Montrons qu'il s'agit d'un plan en retrouvant la forme standard $Ax+By+Cz=D$.

En "pensant" vecteur-colonne, on peut réécrire ces équations sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On voit donc que ce plan passe par le *point* $P = (3, -8, 1)$ et est engendré par les *vecteurs* $\mathbf{v} = [5, 1, -2]$ et $\mathbf{w} = [-2, -1, 1]$. Un vecteur normal (perpendiculaire) au plan est donc donné par le produit vectoriel de ces deux vecteurs, qui est, après calcul, $[-1, -1, -3]$. On peut aussi prendre $[1, 1, 3]$ et donc l'équation du plan est de la forme $x+y+3z = D$ et en subsitutant le point P dans cette dernière équation, on trouve que $D = -2$. Donc la réponse est le plan d'équation $x+y+3z = -2$. Il est bon de vérifier cette réponse :

$$3+5s-2t+(-8+s-t)+3(1-2s+t) = 3+5s-2t-8+s-t+3-6s+3t = -2.$$

(d) Trouvons l'équation du plan tangent à la sphère $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 49$ au point $(2, 4, 5)$.

Le point de tangence étant dans l'hémisphère Nord, on résout pour z dans l'équation de la sphère en conservant la solution appropriée. On sait ensuite comment procéder (retournez voir la théorie de la question **3**). Remarquons qu'on peut aussi laisser l'équation de la sphère sous forme implicite et utiliser le fait que si $F(x, y, z) = 0$ est l'équation d'une surface, alors le vecteur $\nabla F(x, y, z)$ est perpendiculaire à cette surface. Chaque approche va nous mener au même résultat et nous allons trouver que l'équation du plan tangent cherché est $z = -\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{23}{3}$. La figure 6 montre les calculs pour y arriver.

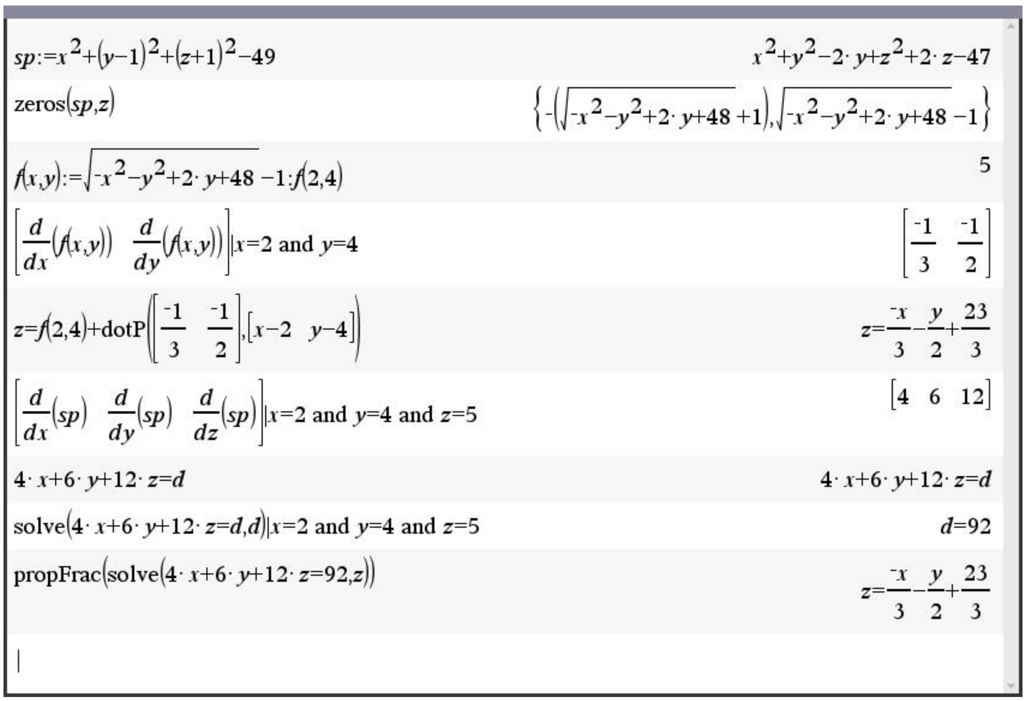

FIGURE 6 – Calculs pour la question 5(d)

---

(9) **6.** Deux particules C_1 et C_2 se déplacent dans le plan. Les trajectoires respectives à l'instant t sont données par les courbes paramétriques suivantes :

$$C_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\cos(t) \\ y = 3 + 2\sin(t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 4)\,,$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 1 - \dfrac{t^2}{4} \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (0 \le t \le 4)\,.$$

(a) Nommons chacune des ces courbes ("cercle", "parabole", "segment de droite"???).

La toute première identité de trigonométrie nous dit que la courbe C_1 est une portion de cercle centré au point (1,3) et de rayon 2. Si t variait de 0 à 2π, ce serait un cercle complet dont l'équation cartésienne est $(x-1)^2+(y-3)^2=4$. Quant à la courbe C_2, on trouve facilement qu'on a $x = y - \frac{y^2}{4}$, c'est donc une (portion) de parabole ouverte vers la gauche.

(b) Montrons que les deux trajectoires se sont croisées et qu'il y a eu presque collision !

Un graphique en mode paramétrique 2D avec l'utilisation de la trace (ou une animation) permet de voir que les deux trajectoires se sont croisées au moment où chacun des paramètres est environ égal à 2.4.

(c) Trouvons les coordonnées (x, y) du point d'intersection des deux courbes.

Si l'on n'élimine pas les paramètres, il est important d'utiliser deux symboles différents puisqu'on ne peut présumer d'une collision. Guider le solveur du système est très utile. Voir la figure 7 qui montre que les deux trajectoires se sont croisées au point $(x, y) = (-0.433545, 4.39461)$.

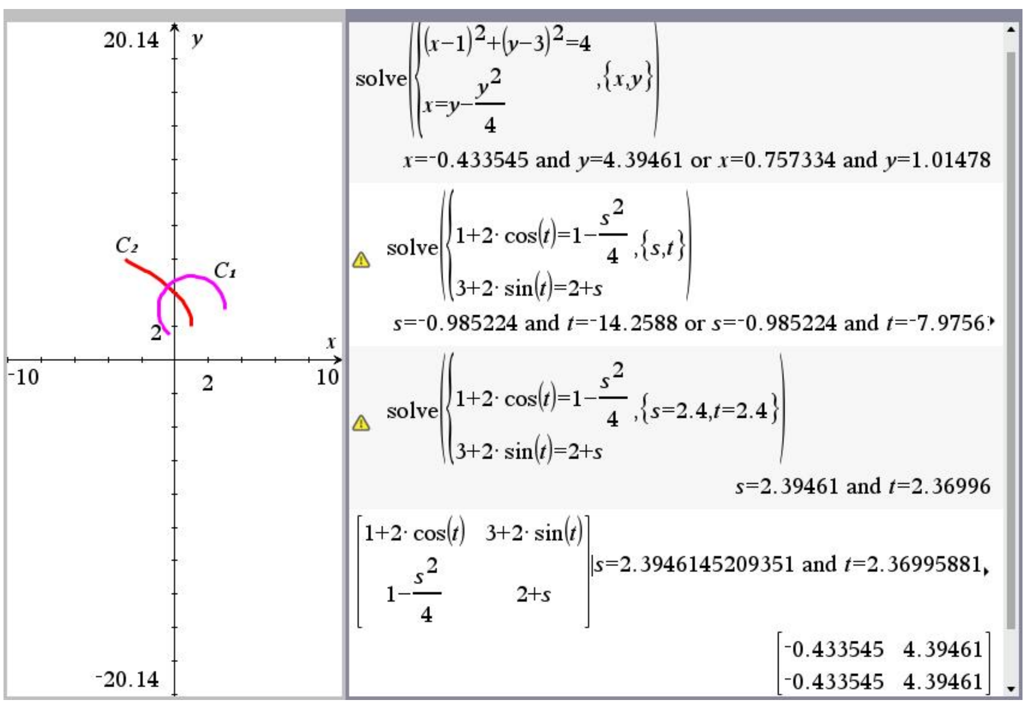

FIGURE 7 – Graphique et calculs pour la question 6

(d) Au point d'intersection des deux trajectoires, trouvons l'angle (en degrés) que forment les deux courbes.

(e) Dans l'intervalle de temps $0 \le t \le 4$, trouvons laquelle des deux particules parcourt la plus grande distance.

Nous savons que l'angle entre deux courbes est défini comme étant l'angle entre les droites tangentes respectives et nous savons que si

$$\mathbf{r}(t) = \left[x(t), y(t)\right] \quad (a \leq t \leq b).$$

désigne le vecteur-position d'un objet à l'instant t, alors la longueur de la trajectoire (longueur de la courbe décrite par le vecteur-position) est donnée par l'intégrale de la norme du vecteur-vitesse $\mathbf{v}$(t) qui est la dérivée du vecteur-position :

$$\int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| \; dt = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt.$$

La séance Nspire de la figure 8 nous montre que l'angle entre les deux courbes est d'un peu plus de 85° tandis que c'est la courbe C_1 qui est la plus longue.

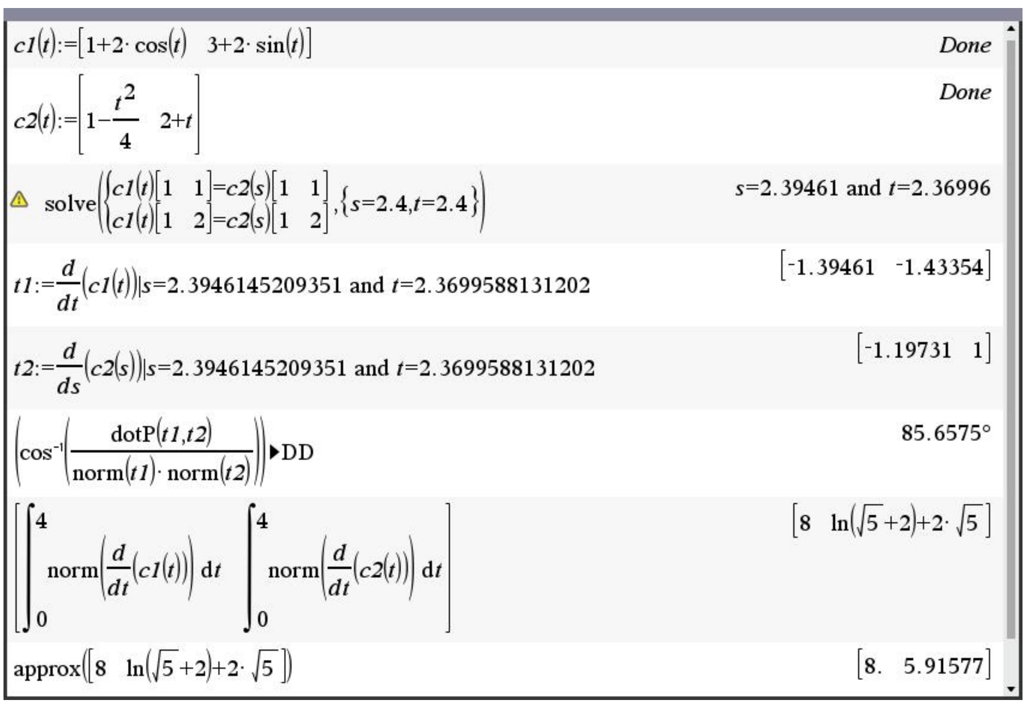

FIGURE 8 – Autres calculs pour la question 6

---

(25) **7.** On considère deux courbes dans l'espace, C_1 et C_2 ainsi que trois surfaces S_1, S_2 et S_3 :

$$C_1 : \begin{cases} x = -1 + 4\cos(t) \\ y = 11 - 8\cos(t) \qquad (0 < t < 2\pi); \\ z = 2\sin(t) \end{cases}$$

$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = \left[t^3, t^2, 2t+1\right] \quad (t \in \mathbb{R});$$

$$S_1 : y = x^2 + 4z^2 - 6\,;$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 21\,;$$
$$S_3 : 2x + y - 9 = 0\,.$$

(a) Trouvons la longueur de C_1.

En 3D, pour trouver la longueur d'une courbe $\mathbf{r}(t) = \left[x(t), y(t), z(t)\right]$ avec $a \leq t \leq b$, on utilise la formule

$$\int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt\,.$$

Dans la séance Nspire de la figure 9, nous définissons la courbe C_1 en tant qu'*expression*, la courbe C_2 en tant que *fonction* et nous définissons chacune des trois surfaces en tant que *fonction* $S_i(x, y, z)$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous avons choisi d'écrire les surfaces en "envoyant tous les termes du côté gauche". La longueur de C_1 est trouvée et vaut 37.9407 unités de longueur.

(b) Trouvons des équations paramétriques de la droite tangente à C_2 au point où $t = 2$.

Notons que si $t = 2$, alors la courbe C_2 passe par le point $P = (8, 4, 5)$. Des équations paramétriques de la droite tangente sont trouvées à la figure 9 et sont données par (en renommant $2t$ par t)

$$d_1 : \begin{cases} x = 6 + 8t \\ y = 2t + 4 \\ z = t + 5 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

(c) En *justifiant* nos calculs, montrons que la seule des trois surfaces sur laquelle ne se retrouve pas la courbe C_1 est la surface S_2.

On substitue les composantes paramétriques de C_1 dans chacune des trois surfaces. Seule la substitution dans S_2 laisse une présence de la variable t. La figure 9 montre combien utile il peut être d'extraire un élément d'une matrice. Dans Nspire, si **MAT** est une matrice, l'élément situé à l'intersection de la rangée i et de la colonne j s'obtient en tapant **MAT**$[i, j]$.

(d) Il semble bien que la surface S_2 soit une sphère que la courbe C_1 vient percer. Trouvons le centre et le rayon de cette sphère et trouvons le point ou les points où la courbe C_1 perce la surface S_2.

Une complétion du carré donne

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 21 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 = 21 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25 = 5^2\,.$$

Il est maintenant clair que la surface S_2 est une sphère centrée au point $(0, 0, 2)$ et de rayon 5. Et les coordonnées des deux points de percée sont les suivants :

$$(2.3353, 4.32939, 1.10405) \quad \text{et} \quad (2.87844, 3.24313, -0.489321)$$

Restreindre le domaine de recherche d'une solution est toujours utile comme le montre la figure 9 lorsqu'on veut trouver les deux points de percée de la courbe C_1 dans la surface S_2.

$c1:=\begin{bmatrix} ^{-}1+4\cdot\cos(t) & 11-8\cdot\cos(t) & 2\cdot\sin(t)\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4\cdot\cos(t)-1 & 11-8\cdot\cos(t) & 2\cdot\sin(t)\end{bmatrix}$
$c2(t):=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & 2\cdot t+1\end{bmatrix}$	*Done*
$s1(x,y,z):=y-x^2-4\cdot z^2+6:s2(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-4\cdot z-21:s3(x,y,z):=2\cdot x+y-9$	*Done*
$\displaystyle\int_0^{2\cdot\pi} \mathrm{norm}\left(\frac{d}{dt}(c1)\right)\,\mathrm{d}t$	37.9407
$c2(2)+t\cdot\left(\frac{d}{dt}(c2(t)) \mid t=2\right)$	$\begin{bmatrix} 12\cdot t+8 & 4\cdot t+4 & 2\cdot t+5\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} s1(c1[1,1],c1[1,2],c1[1,3]) & s2(c1[1,1],c1[1,2],c1[1,3]) & s3(c1[1,1],c1[1,2],c1[1,3])\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 76\cdot(\cos(t))^2-184\cdot\cos(t)-8\cdot\sin(t)+105 & 0\end{bmatrix}$
$\mathrm{completeSquare}(s2(x,y,z),\lbrace x,y,z\rbrace)$	$x^2+y^2+(z-2)^2-25$
$pt:=\mathrm{zeros}(s2(c1[1,1],c1[1,2],c1[1,3]),t) \mid 0\le t\le 2\cdot\pi$	$\lbrace 0.584794, 6.03602\rbrace$
$c1 \mid t=pt[1]$	$\begin{bmatrix} 2.3353 & 4.32939 & 1.10405\end{bmatrix}$
$c1 \mid t=pt[2]$	$\begin{bmatrix} 2.87844 & 3.24313 & ^{-}0.489321\end{bmatrix}$

FIGURE 9 – Calculs pour la question 7