AVERTISSEMENT

Cet examen de pratique vous est fourni à titre d'exemple. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans l'examen que vous aurez. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient se retrouver dans votre examen. La durée *ainsi que la pondération* de chaque partie de votre examen pourraient différer de cet examen de pratique. L'examen que vous passerez pourrait être plus court ou plus long, plus facile ou plus difficile.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE – MAT165

EXAMEN FINAL DE PRATIQUE – PARTIE I

École de technologie supérieure — Version du 11 mai 2023

DOCUMENTATION PERMISE
- Un résumé personnel de trois feuilles 8½ × 11, recto verso.
- La table de dérivées, la table d'intégrales et l'aide-mémoire d'algèbre et de trigonométrie.
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)
- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier supplémentaire d'examen*** (cahier blanc) et non sur le questionnaire.
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (5 questions pour 65 points)
- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

---

(11) **1.** Posez le système d'équations qu'il faudrait résoudre dans chacun des cas suivants. Vous **n'avez pas à résoudre le système**.

(a) On veut trouver les points critiques de la fonction $f(x, y, z) = x^2 y \sin(yz)$.

(b) On veut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs extrêmes de l'expression $x^2 y z^3$ sous les contraintes $x + 2y + 3z = 5$ et $x + y^2 = z^3$.

(12) **2.** Vous devez calculer une intégrale double sur le domaine D qu'on voit à la figure 1.

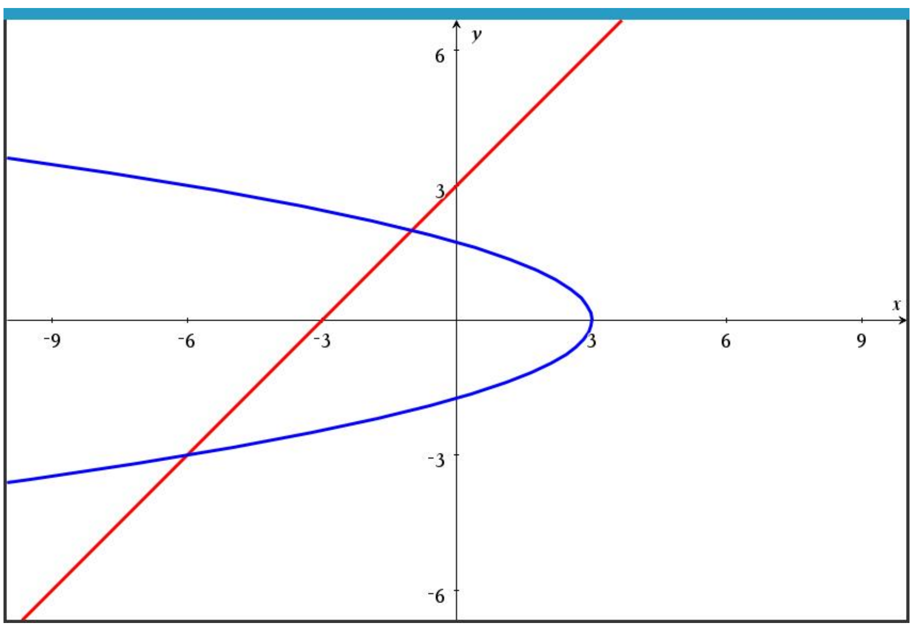

FIGURE 1 – Région d'intégration dans la question 2

Ce domaine est délimité par la droite d'équation $y = x+3$ ainsi que par la parabole d'équation $x = 3 - y^2$. Posez une intégrale double

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

qui permettra d'effectuer le calcul en procédant comme suit.

(a) Considérez d'abord la région D comme une région de type I. Posez une intégrale double itétée avec les bornes appropriées. Il est possible que vous soyiez obligé d'additionner deux intégrales. Vous **n'avez pas à calculer l'intégrale**.

(b) Considérez maintenant la région D comme une région de type II. Posez une intégrale double itétée avec les bornes appropriées. Il est possible que vous soyiez obligé d'additionner deux intégrales. Vous **n'avez pas à calculer l'intégrale**.

(12) **3.** Déterminez si chacun des énoncés est vrai (**Vrai**) ou faux (**Faux**). Si c'est vrai, expliquez pourquoi. Si c'est faux, expliquez pourquoi ou donnez un exemple qui contredit l'énoncé.

(a) Soit le champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y)$ représenté à la figure 2 ci-dessous. Ce champ est conservatif.

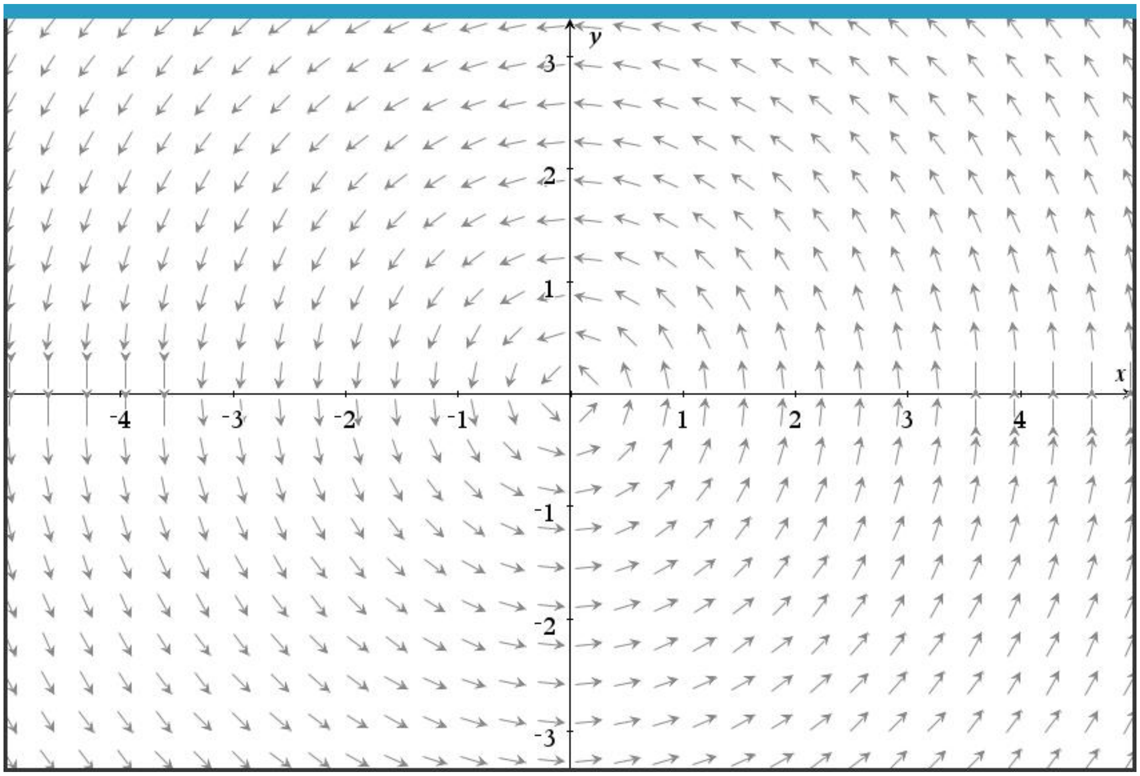

FIGURE 2 – Champ de vecteurs

(b) Si $f(x, y) = g(x)h(y)$, si a, b, c et d sont des constantes, alors

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy.$$

(c) Le domaine

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes est transformé en le domaine

$$\left\{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

lorsqu'on passe en coordonnées polaires.

(d) Lorsqu'on cherche le point sur la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2 - 6$ qui est le plus rapproché du point $(2, 3, 4)$, on doit minimiser l'expression

$$\sqrt{x^2 + 4y^2 - 6}\,.$$

ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE – MAT165

EXAMEN FINAL DE PRATIQUE – PARTIE II

École de technologie supérieure — Version du 19 avril 2023

DOCUMENTATION PERMISE

- Un résumé personnel de trois feuilles 8½ × 11, recto verso.
- La table de dérivées, la table d'intégrales et l'aide-mémoire d'algèbre et de trigonométrie.
- Une calculatrice TI **pour la deuxième partie de l'examen seulement**.

PARTIE I (3 questions pour 35 points)

- **Durée maximale de 1 heure** (l'étudiant peut passer à la partie II dès qu'il le désire, mais n'aura plus accès à la partie I).
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier supplémentaire d'examen*** (cahier blanc) et non sur le questionnaire.
- Toute réponse donnée sans une justification mathématique appropriée entraînera la note 0.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE 2 (5 questions pour 65 points)

- Durée totale de 3 heures pour les parties I et II.
- L'étudiant doit répondre dans un ***cahier d'examen*** et non sur le questionnaire.
- L'étudiant doit remettre le questionnaire avec le cahier (mais seules les réponses du cahier seront corrigées).

PARTIE II (65 points)

(10) **4.** On désire fabriquer une boîte rectangulaire. Le matériau utilisé pour les faces latérales coûte 0.04 \$ par cm^2 et celui pour la base coûte 0.10 \$ par cm^2. Le budget dont on dispose pour les matériaux est de 120 \$.

(a) Quelles sont les dimensions de la boîte de volume maximal qui peut être fabriquée si l'on ne met pas de couvercle ?

(b) Quelles sont les dimensions de la boîte de volume maximal qui peut être fabriquée si l'on met un couvercle dont le coût est comme celui de la base, à savoir 0.10 \$ par cm^2 ?

(15) **5.** Soit le solide E correspondant à la région à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ et au-dessus du paraboloïde $z = x^2 + y^2$. Ce solide a été dessiné à la figure 3 en choisissant le domaine suivant : $-5 < x, y < 5$ et $0 < z < 5$.

(a) Trouvez des équations paramétriques de la courbe d'intersection de la sphère et du paraboloïde.

(b) Calculez le volume du solide E en posant une intégrale triple en **coordonnées cartésiennes**.

(c) Calculez le volume du solide E en posant une intégrale triple en **coordonnées cylindriques**.

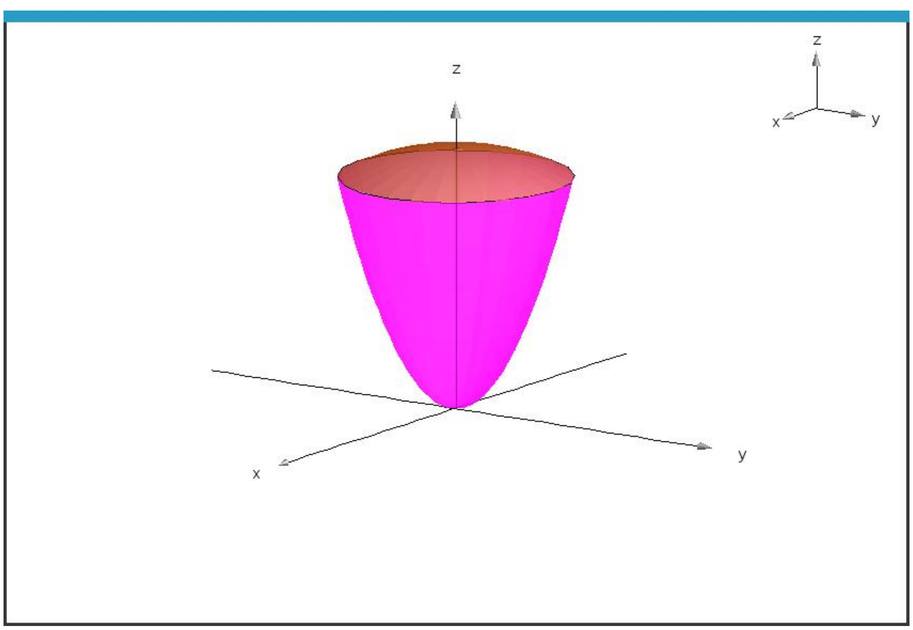

FIGURE 3 – Le solide E de la question 5

(10) **6.** Calculez en **coordonnées sphériques** l'intégrale suivante :

$$\iiint_E yz\,dV$$

où E est la région de l'espace comprise à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=9$, sous le cône d'équation $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et dans le premier octant. *Dessinez un schéma du solide E.*

---

(20) **7.** Soit **F** le champ vectoriel défini sur tout l'espace $\mathbb{R}^3$ par

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(2xy-5z^2\right)\mathbf{i}+\left(4yz+x^2\right)\mathbf{j}+\left(2y^2-10xz+1\right)\mathbf{k}.$$

Ici **i**, **j** et **k** désignent respectivement les vecteurs $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ et $[0,0,1]$.

(a) Vérifiez en premier que les conditons *nécessaires* pour que ce champ soit conservatif sont bien satisfaites.

(b) Trouvez maitenant une fonction potentiel f telle que $\mathbf{F}(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)$.

(c) Soit C le segment de droite allant du point $(1,1,1)$ au point $(3,-1,0)$. Évaluez l'intégrale curviligne $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ en utilisant la fonction potentiel trouvé en **(b)**.

(d) Calculez directement l'intégrale curviligne de la question **(c)** en utilisant une paramétrisation du segment de droite C.

---

(10) **8.** Soit **F** le champ vectoriel défini sur tout le plan $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(2xy-y^2\right)\mathbf{i}+\left(4y+x^2\right)\mathbf{j}.$$

Ici **i** et **j** désignent respectivement les vecteurs $[1,0]$ et $[0,1]$.

(a) Posez et calculez une intégrale curviligne de **F** le long de la courbe fermée C qui consiste en le cercle centré au point $(2,4)$ et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (c'est le sens contraire des aiguilles d'une montre).

(b) Reconfirmez votre réponse obtenue en **(a)** en utilisant cette fois le *théorème de Green.*

Bon examen !