ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE – MAT165

SOLUTIONS DE L'EXAMEN FINAL DE PRATIQUE

École de technologie supérieure — Version du 11 mai 2023

---

(11) **1.** Posons le système d'équations qu'il faudrait résoudre dans chacun des cas suivants. Nous **n'avons pas à résoudre le système**.

(a) On veut trouver les points critiques de la fonction $f(x,y,z) = x^2\,y\sin(yz)$.

On sait qu'il faut calculer les dérivées partielles et les annuler par la suite. La règle du produit devra être utilisée pour le calcul de la dérivée partielle par rapport à y. Voici les calculs requis qui utilisent le fait que la dérivée par rapport à w de l'expression w^n est nw^{n-1} et que, si a est une constante, alors la dérivée par rapport à la variable w de l'expression $\sin(aw)$ est $a\cos(aw)$.

$$f(x,y,z) = x^2\,y\sin(yz) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\sin(yz) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y^2\cos(yz)\,.$$

$$f(x,y,z) = x^2\,y\sin(yz) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}\big(y\sin(yz)\big) = x^2\big(\sin(yz) + yz\cos(yz)\big)\,.$$

Il faudrait donc trouver les solutions aux trois équations à trois inconnues suivantes :

$$\begin{cases} 2xy\sin(yz) = 0 \\ x^2y^2\cos(yz = 0 \\ x^2\big(\sin(yz) + yz\cos(yz)\big) = 0 \end{cases}$$

(b) On veut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs extrêmes de l'expression x^2yz^3 sous les contraintes $x+2y+3z=5$ et $x+y^2=z^3$.

Lorsqu'on cherche les valeurs extrêmes d'une fonction $f(x,y,z)$ sous les contraintes $g(x,y,z)=0$ et $h(x,y,z)=0$ par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on doit résoudre le système suivant de cinq équations à cinq inconnues x, y, z, λ et μ.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z) + \mu\nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Avec les données qu'on a, on aurait donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2xyz^3 = \lambda + \mu \\ x^2z^3 = 2\lambda + 2y\mu \\ 3x^2yz^2 = 3\lambda - 3z^2\mu \\ x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + y^2 - z^3 = 0 \end{cases}$$

---

(12) **2.** Nous devons calculer une intégrale double sur le domaine D qu'on voit à la figure 1. Ce domaine est délimité par la droite d'équation $y = x+3$ ainsi que par la parabole d'équation $x = 3 - y^2$. Nous **n'avons pas à calculer l'intégrale**.

La figure 1 est celle tirée du questionnaire mais nous avons rajouté les points d'intersection des deux courbes et considéré les deux portions de la parabole $x = 3 - y^2$. En effet, en résolvant pour y, on a $y = \pm\sqrt{3-x}$.

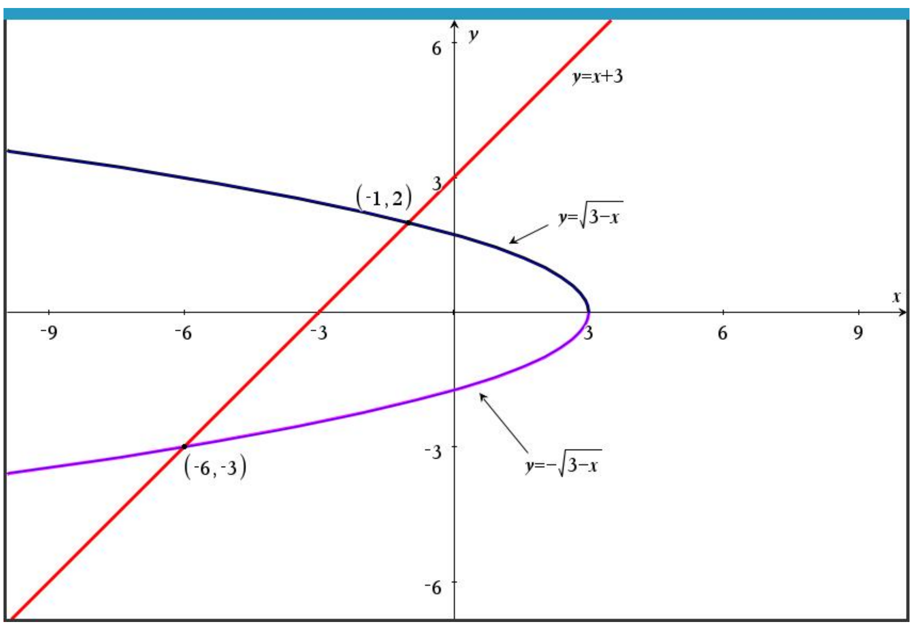


FIGURE 1 – Région d'intégration dans la question 2, rajout d'informations

(a) Considérons d'abord la région D comme une région de type I. Posons une intégrale double itétée avec les bornes appropriées.

En regardant la figure 1, il est évident qu'on doit "couper" l'intégrale en deux parties. Puisque le domaine d'intégration D est l'union

$$\left\{(x,y) : -6 \le x \le -1, -\sqrt{3-x} \le y \le x+3\right\} \cup \left\{(x,y) : -1 \le x \le 3, -\sqrt{3-x} \le y \le \sqrt{3-x}\right\}.$$

Le résultat est donc

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-6}^{-1}\int_{-\sqrt{3-x}}^{x+3} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-1}^{3}\int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

(b) Considérons maintenant la région D comme une région de type II. Posons une intégrale double itétée avec les bornes appropriées.

Ici, une seule intégrale double est requise puisque la région D peut se décrire par l'ensemble suivant : $\{(x,y) : -3 \le y \le 2,\ y-3 \le x \le 3-y^2\}$. Mais alors

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-3}^{2}\int_{y-3}^{3-y^2} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

---

(12) **3.** Déterminons si chacun des énoncés est vrai (**Vrai**) ou faux (**Faux**). Si c'est vrai, expliquons pourquoi. Si c'est faux, expliquons pourquoi ou donnons un exemple qui contredit l'énoncé.

(a) Soit le champ de vecteur $\mathbf{F}(x,y)$ représenté à la figure 2 ci-dessous. Ce champ n'est pas conservatif, donc c'est **Faux**.

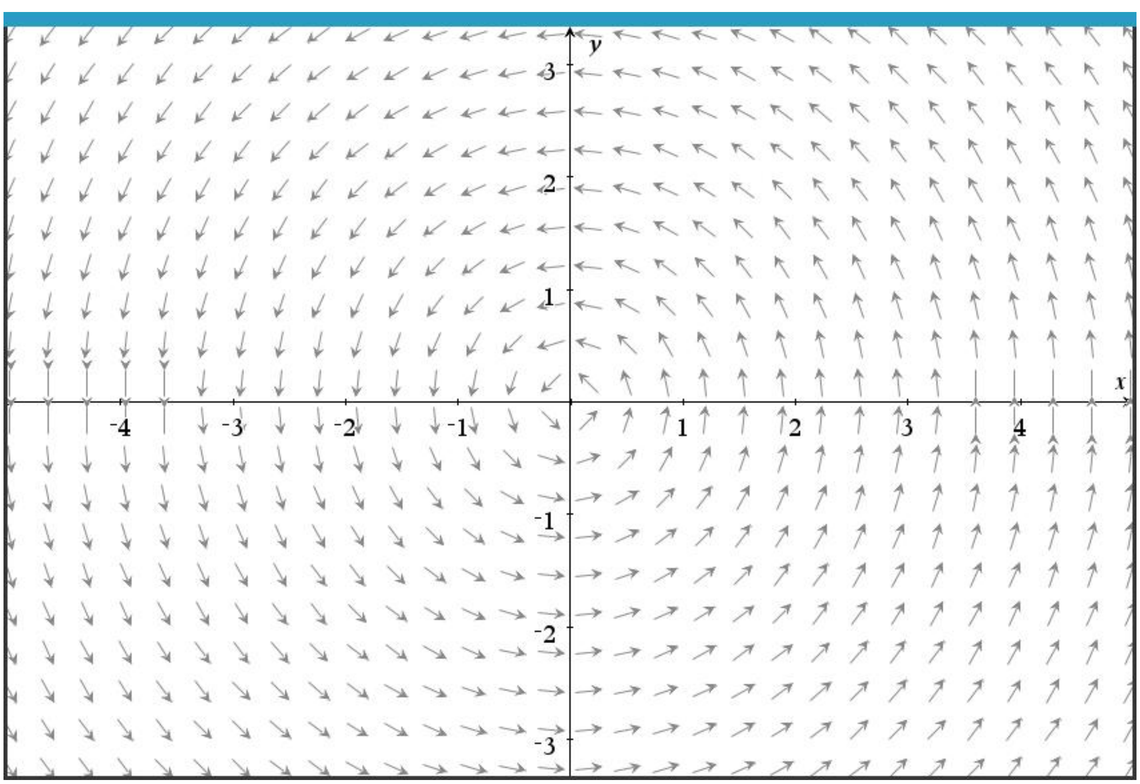


FIGURE 2 – Champ de vecteurs

En effet, le champ de la figure 2 est non-conservatif puisqu'il "tourne". Citons un théorème. Soit **F** un champ de vecteurs continu sur un ensemble ouvert connexe par arc U de $\mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

— **F** est conservatif (donc il existe un champ scalaire ϕ tel que $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

— Si C est un contour fermé de U paramétré par $\mathbf{r}(t)$, alors l'intégrale curviligne de **F** le long de C est nulle :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,.$$

— L'intégrale curviligne de **F** entre deux points A et B de U est indépendante du parcours (et vaut, en fait $\phi(A) - \phi(B)$).

Le champ de la figure 2 tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et ainsi si l'on prenait pour parcours un cercle centré à l'origine parcouru dans le même sens, l'intégrale curviligne serait positive et non pas nulle.

(b) Si $f(x, y) = g(x)h(y)$, si a, b, c et d sont des constantes, alors

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy\,.$$

C'est **Vrai**. En effet, on peut écrire, utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y)\,dx\right) dy =$$

$$\int_c^d \left(h(y) \int_a^b g(x)\,dx\right) dy = \int_c^d h(y) \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) dy\,.$$

L'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$ représente une constante, appelons-la "k". Alors, par linéarité, on a $\int_c^d h(y)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) dy = \int_c^d h(y)k\,dy = k\int_c^d h(y)dy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$.

(c) Le domaine $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes est transformé en le domaine $\{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$ lorsqu'on passe en coordonnées polaires.

C'est **Faux**. Le domaine D est une région *triangulaire* du premier quadrant tandis que $\{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$ est une *secteur circulaire* du premier quadrant. En fait, lorsqu'on passe en coordonnées polaires, voici ce que devient la région D :

$$\left\{(r,\theta) : 0 \le r \le \frac{1}{\cos(\theta)}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}.$$

(d) Lorsqu'on cherche le point sur la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2 - 6$ qui est le plus rapproché du point $(2, 3, 4)$, on doit minimiser l'expression $\sqrt{x^2 + 4y^2 - 6}$.

C'est **Faux**. Si l'on décidait d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, alors on devrait minimiser l'expression $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}$ (bien qu'il serait plus facile de considérer son carré). La surface $z = x^2 + 4y^2 - 6$ serait alors la contrainte. Sans utiliser Lagrange, on minimiserait l'expression $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (x^2 + 4y^2 - 10)^2$.

(10) **4.** On désire fabriquer une boîte rectangulaire. Le matériau utilisé pour les faces latérales coûte 0.04 \$ par cm^2 et celui pour la base coûte 0.10 \$ par cm^2. Le budget dont on dispose pour les matériaux est de 120 \$.

(a) Quelles sont les dimensions de la boîte de volume maximal qui peut être fabriquée si l'on ne met pas de couvercle ?

Nous allons voir que, sans couvercle, une boîte rectangulaire mesurant 20 cm × 20 cm × 25 cm est celle de volume maximal, volume valant 10 000 cm^3.

(b) Quelles sont les dimensions de la boîte de volume maximal qui peut être fabriquée si l'on met un couvercle dont le coût est comme celui de la base, à savoir 0.10 \$ par cm^2 ?

Nous allons voir qu'avec un couvercle, une boîte rectangulaire mesurant $10\sqrt{2}$ cm $\times 10\sqrt{2}$ cm $\times\, 25\sqrt{2}$ cm est celle de volume maximal, volume valant $5000\sqrt{2}$ cm^3.

La fonction à maximiser est celle du volume, donc l'expression xyz. Sans couvercle, la contrainte est

$$0.10xy + 0.04(2yz + 2xz) = 120$$

tandis qu'avec un couvercle, la contrainte est

$$0.10(2xy) + 0.04(2yz + 2xz) = 120\,.$$

Il est possible de résoudre pour la variable z dans chacune des contraintes et donc de se passer de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Des séances Nspire illustrent chacune des ces approches : à la figure 3, on a utilisé le test des dérivées secondes pour le problème sans couvercle et à la figure 4, on a utilisé la méthode de Lagrange pour la question avec couvercle. Pour les étudiants qui ont appris à utliser certaines fonctions programmées dans la librairie `kit_ets_mb`, les solutions sont données de nouveau à la figure 5.

Notez que dans le cas de la boîte sans couvercle, la fonction volume est l'expression suivante :

$$\frac{5xy(1200 - xy)}{4(x+y)}\,.$$

Cette expression est définie pour $x > 0$ et $y > 0$ et est continue sur ce domaine. Même si ce domaine n'est pas fermé et borné, il est clair qu'un seul maximum doit exister (un graphe pourra vous en convaincre). Quant au calcul des dérivées partielles, si nous devions le faire à la main, alors il serait mieux réécrire l'expression sous la forme

$$\frac{5(1200xy - x^2y^2)}{4(x+y)}$$

et il faudrait donc utiliser la règle du quotient pour calculer chacune des dérivées partielles. Dans ce genre de problèmes d'application, l'utilisation de la calcularice symbolique est justifiée.

$$vol1(x,y):=\frac{-5\cdot x\cdot (x\cdot y-1200)\cdot y}{4\cdot (x+y)} \qquad \textit{Terminé}$$

$$\frac{d}{dx}(vol1(x,y)) \qquad \frac{-5\cdot \left(x^2+2\cdot x\cdot y-1200\right)\cdot y^2}{4\cdot (x+y)^2}$$

$$\frac{d}{dy}(vol1(x,y)) \qquad \frac{-5\cdot \left(y^2+2\cdot y\cdot x-1200\right)\cdot x^2}{4\cdot (y+x)^2}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\frac{-5\cdot \left(x^2+2\cdot x\cdot y-1200\right)\cdot y^2}{4\cdot (x+y)^2}=0\\ \frac{-5\cdot \left(y^2+2\cdot y\cdot x-1200\right)\cdot x^2}{4\cdot (y+x)^2}=0\end{cases},\{x,y\}\right) \qquad x=-20 \text{ and } y=-20 \text{ or } x=20 \text{ and } y=20$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}(vol1(x,y))\cdot \frac{d^2}{dy^2}(vol1(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(vol1(x,y))\right)\right)^2 \quad \frac{d^2}{dx^2}(vol1(x,y))\right] \qquad \left[\frac{-25\cdot x^2\cdot \left(x^2+4\cdot x\cdot y+y^2-3600\right)\cdot y^2}{4\cdot (x+y)^4} \quad \frac{-5\cdot y^2\cdot \left(y^2+1200\right)}{2\cdot (x+y)^3}\right]$$

$$\left[\frac{-25\cdot x^2\cdot \left(x^2+4\cdot x\cdot y+y^2-3600\right)\cdot y^2}{4\cdot (x+y)^4} \quad \frac{-5\cdot y^2\cdot \left(y^2+1200\right)}{2\cdot (x+y)^3}\right]\Bigg|x=20 \text{ and } y=20 \qquad \left[\frac{1875}{4} \quad -25\right]$$

FIGURE 3 – Calculs pour la question 4(a)

$$volume(x,y,z):=x\cdot y\cdot z \qquad \textit{Terminé}$$

$$contrainte:=x\cdot \left(\frac{y}{5}+\frac{2\cdot z}{25}\right)+\frac{2\cdot y\cdot z}{25}-120 \qquad x\cdot \left(\frac{y}{5}+\frac{2\cdot z}{25}\right)+\frac{2\cdot y\cdot z}{25}-120$$

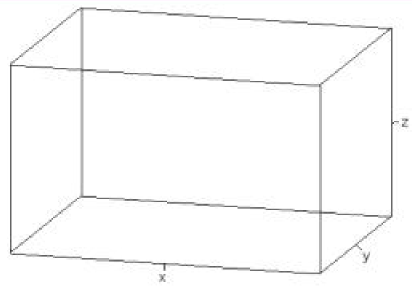
$$\begin{cases}\frac{d}{dx}(volume(x,y,z))=\lambda\cdot \frac{d}{dx}(contrainte)\\ \frac{d}{dy}(volume(x,y,z))=\lambda\cdot \frac{d}{dy}(contrainte)\\ \frac{d}{dz}(volume(x,y,z))=\lambda\cdot \frac{d}{dz}(contrainte)\\ contrainte=0\end{cases} \qquad \left\{y\cdot z=\frac{\lambda\cdot (5\cdot y+2\cdot z)}{25},x\cdot z=\frac{\lambda\cdot (5\cdot x+2\cdot z)}{25},x\cdot y=\frac{2\cdot \lambda\cdot (x+y)}{25},x\cdot \left(\frac{y}{5}+\frac{2\cdot z}{25}\right)+\frac{2\cdot y\cdot z}{25}-120=0\right\}$$

$$\text{solve}\left(\left\{y\cdot z=\frac{\lambda\cdot (5\cdot y+2\cdot z)}{25},x\cdot z=\frac{\lambda\cdot (5\cdot x+2\cdot z)}{25},x\cdot y=\frac{2\cdot \lambda\cdot (x+y)}{25},x\cdot \left(\frac{y}{5}+\frac{2\cdot z}{25}\right)+\frac{2\cdot y\cdot z}{25}-120=0\right\},\{x,y,z,\lambda\}\right)$$

$$x=-10\cdot \sqrt{2} \text{ and } y=-10\cdot \sqrt{2} \text{ and } z=-25\cdot \sqrt{2} \text{ and } \lambda=\frac{-125\cdot \sqrt{2}}{2} \text{ or } x=10\cdot \sqrt{2} \text{ and } y=10\cdot \sqrt{2} \text{ and } z=25\cdot \sqrt{2} \text{ and } \lambda=\frac{125\cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$volume\left(10\cdot \sqrt{2},10\cdot \sqrt{2},25\cdot \sqrt{2}\right) \qquad 5000\cdot \sqrt{2}$$

FIGURE 4 – Calculs pour la question 4(b)



$$\textbf{cont\_a}:=\text{exact}(0.1\cdot x\cdot y+0.04\cdot(2\cdot y\cdot z+2\cdot x\cdot z)=120)$$

$$\text{solve}\left(x\cdot\left(\frac{y}{10}+\frac{2\cdot z}{25}\right)+\frac{2\cdot y\cdot z}{25}=120,z\right) ▸ z=\frac{-5\cdot(x\cdot y-1200)}{4\cdot(x+y)} \qquad \textbf{vol}(x,y):=x\cdot y\cdot z|z=\frac{-5\cdot(x\cdot y-1200)}{4\cdot(x+y)} ▸ \textit{Done}$$

$$\textbf{kit\_ets\_mb\textbackslash pteri}(\textbf{vol}(x,y),[x\ \ y]) ▸ \begin{bmatrix}20 & 20\\ -20 & -20\end{bmatrix} \qquad \textbf{kit\_ets\_mb\textbackslash nature}(\textbf{vol}(x,y),[x\ \ y],[20\ \ 20]) ▸ \begin{bmatrix}\text{"hessien"} & \text{"dp seconde"}\\ \frac{1875}{4} & -25\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\textbf{vol}(x,y) & \frac{-5\cdot(x\cdot y-1200)}{4\cdot(x+y)}\end{bmatrix}|x=20 \text{ and } y=20 ▸ [10000\ \ 25] \qquad |\textbf{cont\_b}:=\text{exact}(0.2\cdot x\cdot y+0.04\cdot(2\cdot y\cdot z+2\cdot x\cdot z)-120)$$

$$\textbf{lag1}:=\textbf{kit\_ets\_mb\textbackslash lagrange1}(x\cdot y\cdot z,\textbf{cont\_b},[x\ \ y\ \ z],\lambda)$$

$$\text{zeros}(\textbf{lag1},\{x,y,z,\lambda\}) ▸ \begin{bmatrix}10\cdot\sqrt{2} & 10\cdot\sqrt{2} & 25\cdot\sqrt{2} & \frac{125\cdot\sqrt{2}}{2}\\ -10\cdot\sqrt{2} & -10\cdot\sqrt{2} & -25\cdot\sqrt{2} & \frac{-125\cdot\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

FIGURE 5 – Calculs pour la question 4 utilisant des fonctions d'une librairie

---

(15) **5.** Soit le solide E correspondant à la région à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=20$ et au-dessus du paraboloïde $z=x^2+y^2$. Ce solide est dessiné à la figure 6 en choisissant le domaine suivant : $-5<x,y<5$ et $0<z<5$.

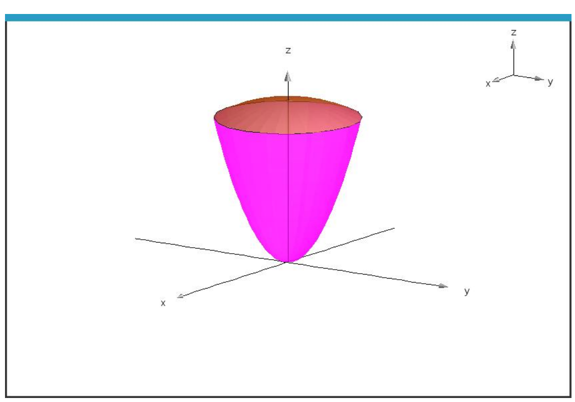


FIGURE 6 – Le solide E de la question 5

(a) Trouvons des équations paramétriques de la courbe d'intersection de la sphère et du paraboloïde. On peut facilement trouver dans quel plan se trouve la courbe d'intersection des deux surfaces : on a alors l'équation $z + z^2 = 20$ dont les solutions sont $z = 4$ et $z = -5$. La courbe d'intersection est donc située dans le plan $z = 4$ et alors on a que la surface latérale bornant le solide E est le cylindre $x^2 + y^2 = 4$. Mais alors, la courbe d'intersection des deux surfaces est un cercle situé dans le plan $z = 4$, centré au point $(0, 0, 4)$, de rayon 2 qu'on peut décrire, en coordonnées cartésiennes par les équations $x^2 + y^2 = 4, z = 4$. On peut donc la paramétrer par

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)\,.$$

(b) Calculons le volume du solide E en posant une intégrale triple en **coordonnées cartésiennes**.

(c) Calculons le volume du solide E en posant une intégrale triple en **coordonnées cylindriques**.

En coordonnées rectangulaires, le solide E peut être décrit par l'ensemble suivant :

$$E = \left\{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{20 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Et en utilisant les coordonnées cylindriques, l'ensemble E est transformé en

$$\left\{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{20 - r^2}\right\}.$$

On trouve la valeur 28.1544 unités de volume et ce nombre est même trouvé en mode exact lorsque les coordonnées cylindriques sont utilisés comme le montre la figure 7. Nous savons qu'il ne faut pas oublier de multiplier par r lorsqu'on passe en coordonnées cylindriques et nous avons utilisé le fait que le volume d'un solide W décrit en coordonnées rectangulares est égal à $\iiint\limits_W 1\,dV$.

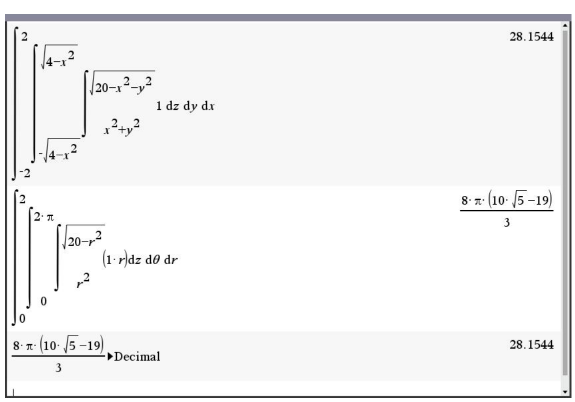


FIGURE 7 – Calculs pour la question 5

(10) **6.** Calculons en **coordonnées sphériques** l'intégrale suivante :

$$\iiint_E yz\,dV$$

où E est la région de l'espace comprise à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=9$, sous le cône d'équation $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et dans le premier octant. *Dessinons un schéma du solide E.*

Nous avons dessiné cette région avec Nspire (figure 8) bien qu'il est tout à fait possible de faire cette figure à la main afin de visualiser le solide. Le cône rencontre la sphère le long d'un arc de cercle de rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ situé dans le plan $z=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

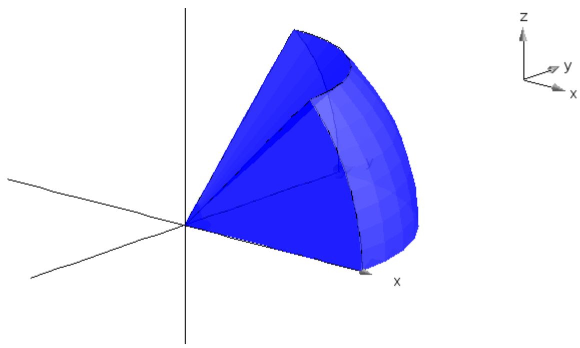


FIGURE 8 – Le solide E de la question 6

En coordonnées sphériques, l'équation du cône est $\phi=\frac{\pi}{4}$ et ainsi l'angle ϕ va varier de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$. L'équation de la sphère est $\rho=3$ et on restera dans le premier octant avec θ qui variera de 0 à $\frac{\pi}{2}$. N'oubliant pas qu'en passant en coordonnées sphériques, un élément de volume dV devient $\rho^2\sin(\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$, l'expression à intégrer devient alors

$$yzdV=\big(\rho\sin(\theta)\sin(\phi)\big)\big(\rho\cos(\phi)\rho^2\sin(\phi)\big)\,d\rho\,d\theta\,d\phi=\rho^4\sin(\theta)\sin(\phi)^2\cos(\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

et puisque c'est une expression à trois variables *séparables* et que le domaine d'intégration est une boîte dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de multiplier trois intégrales simples :

$$\iiint_E yz\,dV=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta)\,d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\phi)^2\cos(\phi)\,d\phi\int_0^3\rho^4\,d\rho=\frac{81\left(4-\sqrt{2}\right)}{20}\approx 10.4724.$$

On peut aussi calculer l'intégrale triple directement sans faire un produit de 3 intégrales simples :

$$\iiint_E yz\,dV=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3\rho^4\sin(\theta)\sin(\phi)^2\cos(\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Une vérification de la réponse en utilisant aussi les coordonnées cylindriques est faite à la figure 9, partie inférieure. Notez qu'il aurait même été facile de calculer, sans calculatrice, chacune des intégrales précédentes. En effet :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\, d\theta = -\cos(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1\,;$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi)^2 \cos(\phi)\, d\phi = \frac{\sin(\phi)^3}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(4-\sqrt{2}\right)}{12}$$

$$\int_0^3 \rho^4\, d\rho = \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^3 = \frac{243}{5}.$$

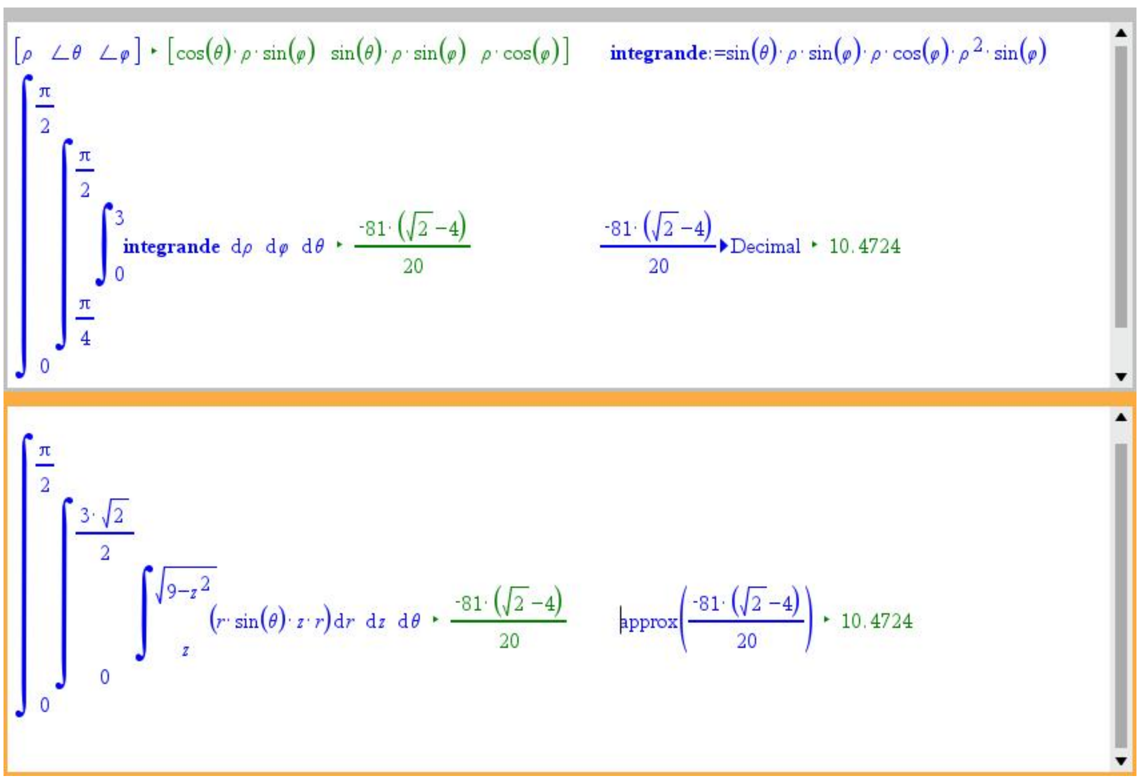


FIGURE 9 – Calculs pour l'intégrale de la question 6

---

(20) **7.** Soit **F** le champ vectoriel défini sur tout l'espace $\mathbb{R}^3$ par

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xy - 5z^2\right)\mathbf{i} + \left(4yz + x^2\right)\mathbf{j} + \left(2y^2 - 10xz + 1\right)\mathbf{k}.$$

Ici **i**, **j** et **k** désignent respectivement les vecteurs $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ et $[0,0,1]$.

(a) Vérifions en premier que les conditons *nécessaires* pour que ce champ soit conservatif sont bien satisfaites.

(b) Et trouvons ensuite une fonction potentiel f telle que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

En appelant respectivement P, Q et R les composantes du champ $\mathbf{F}$, nous avons

$$\begin{cases} P = 2xy - 5z^2 \\ Q = 4yz + x^2 \\ R = 2y^2 - 10xz + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -10z = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 4y = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

On va maintenant trouver une fonction potentiel f en résolvant, par intégration le système $\nabla f = \mathbf{F} = [P, Q, R]$. On calcule nos intégrales "partielles" n'oubliant pas que, dans ce cas, la "constante d'intégration" peut dépendre des deux autres variables.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 5z^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4yz + x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2y^2 - 10xz + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = x^2y - 5xz^2 + C_1(y, z) \\ f = 2y^2z + x^2y + C_2(x, z) \\ f = 2y^2z - 5xz^2 + z + C_3(x, y) \end{cases}$$

Il est alors clair qu'un potentiel est donné par $f(x, y, z) = x^2y - 5xz^2 + 2y^2z + z + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. D'ailleurs on pourrait vérifier que le gradient de la fonction $f(x, y, z)$ redonne bien $\mathbf{F}$.

(c) Soit C le segment de droite allant du point $(1, 1, 1)$ au point $(3, -1, 0)$. Évaluons l'intégrale curviligne $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en utilisant la fonction potentiel trouvé en **(b)**.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(3, -1, 0) - f(1, 1, 1) = -9 - (-1) = -8.$$

(d) Calculons directement l'intégrale curviligne de la question **(c)** en utilisant une paramétrisation du segment de droite C.

On utilise le fait que tout segment de droite allant d'un point A à un point B peut toujours se paramétriser par $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$ avec $0 \leq t \leq 1$. On met en mémoire les fonctions et fait effectuer le calcul suivant avec $\mathbf{r}(t) = [1 + 2t, 1 - 2t, 1 - t]$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

$champ(x,y,z):=[2\cdot x\cdot y-5\cdot z^2 \quad 4\cdot y\cdot z+x^2 \quad 2\cdot y^2-10\cdot x\cdot z+1]$	*Done*
$f(x,y,z):=x^2\cdot y-5\cdot x\cdot z^2+2\cdot y^2\cdot z+z$	*Done*
$f(3,^-1,0)$	$^-9$
$f(1,1,1)$	$^-1$
$f(3,^-1,0)-f(1,1,1)$	$^-8$
$a:=[1 \quad 1 \quad 1]:b:=[3 \quad ^-1 \quad 0]$	$[3 \quad ^-1 \quad 0]$
$a+t\cdot(b-a)$	$[2\cdot t+1 \quad 1-2\cdot t \quad 1-t]$
$\mathrm{dotP}(champ(2\cdot t+1,1-2\cdot t,1-t),[2 \quad ^-2 \quad ^-1])$	$^-78\cdot t^2+54\cdot t-9$
$\int_0^1 (^-78\cdot t^2+54\cdot t-9)\,dt$	$^-8$

FIGURE 10 – Calculs pour l'intégrale curviligne de la question 7

---

(10) **8.** Soit **F** le champ vectoriel défini sur tout le plan $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(2xy - y^2\right)\mathbf{i} + \left(4y + x^2\right)\mathbf{j}.$$

Ici **i** et **j** désignent respectivement les vecteurs $[1,0]$ et $[0,1]$.

(a) Posons et calculons une intégrale curviligne de **F** le long de la courbe fermée C qui consiste en le cercle centré au point $(2,4)$ et de rayon un, parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens direct). Posons

$$P(x,y) = 2xy - y^2 \quad \text{et} \quad Q(x,y) = 4y + x^2.$$

Il est clair que le champ $\mathbf{F}(x,y)$ n'est pas conservatif puisque

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

On peut paramétriser la courbe C en utilisant $x = 2+\cos(t)$, $y = 4+\sin(t)$ avec $0 \le t \le 2\pi$. On a alors $dx = -\sin(t)dt$, $dy = \cos(t)dt$ et

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

On a refilé ce calcul à Nspire à la figure 11 et la réponse trouvée est 8π.

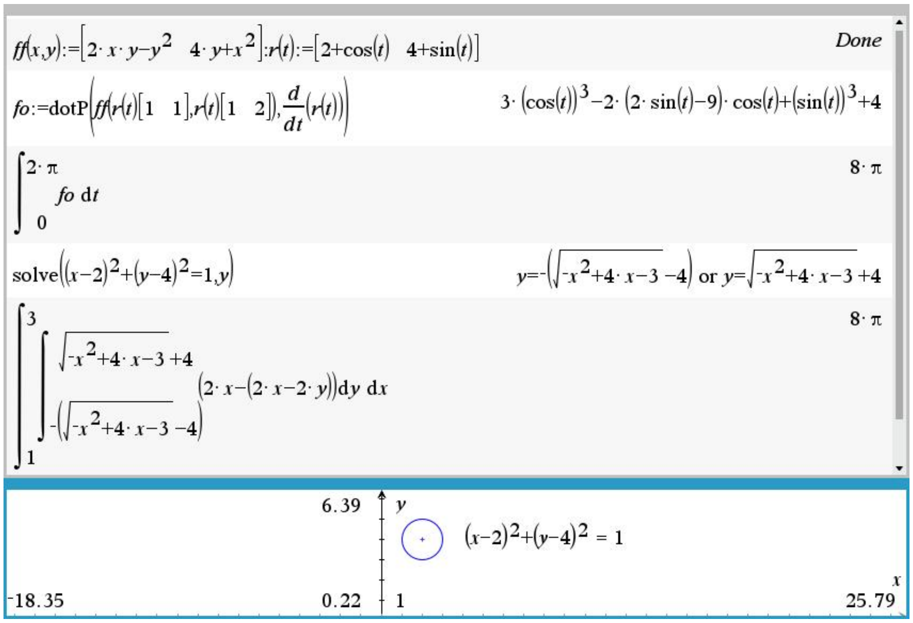


FIGURE 11 – Calculs pour la question 8

(b) Reconfirmons notre réponse obtenue en **(a)** en utilisant cette fois le *théorème de Green*.

On sait que si C est une courbe fermée parcourue dans le sens direct (contraire des aiguilles d'une montre) et dont la région intérieure est dénoté D, alors la formule de Green dit que

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

La région D intérieure du cercle C est un disque et on la considérant comme région de type I, on pose les bornes de l'intégrale double qui vaut bien 8π : voir encore la figure 11. Notez toutefois qu'aucun calcul n'était en fait requis. En effet, on a

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D 2y\,dA = 2\iint_D y\,dA = 2\cdot(\text{Aire de } D)\cdot\overline{y} = 2\cdot\pi\cdot 4 = 8\pi\,.$$

La raison est la suivante. Si D est une région fermée bornée du plan et si, en chaque point (x,y) une fonction de densité $\delta(x,y)$ est définie, alors les coordonnées du centre de masse de D sont données par les formules

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA, \quad ,\overline{y} = \frac{1}{M}\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA \quad \text{où} \quad M = \iint_D \delta(x,y)\,dA.$$

Et en prenant $\delta(x,y) = 1\ (\forall x \forall y)$, on a alors que $M = \text{Aire de } D$.