MAT210 – Quelques théorèmes

Théorème 4.1

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

- Si
$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = b \quad \text{avec} \quad 0 < b < \infty$$
alors les fonctions f et g sont du **même ordre de grandeur** :
$f(x) \in O(g(x))$ et $g(x) \in O(f(x))$.
- Si
$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$
alors les fonctions f et g **ne** sont **pas du même ordre de grandeur** :
$f(x) \in O(g(x))$ mais $g(x) \notin O(f(x))$. La fonction f est donc négligeable face à la fonction g quand x tend vers l'infini.
- Si
$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$$
alors les fonctions f et g **ne** sont **pas du même ordre de grandeur** :
$g(x) \in O(f(x))$ mais $f(x) \notin O(g(x))$. La fonction g est donc négligeable face à la fonction f quand x tend vers l'infini.

Théorème 4.2

Dans la liste de fonctions ci-dessous, chaque fonction est grand-O des fonctions qui sont situées plus à droite, mais n'est pas grand-O des fonctions situées plus à gauche.

$$1,\ \log(n),\ \sqrt{n},\ n,\ n\log(n),\ n^2,\ n^3,\ n^4,\ \ldots,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ \ldots,\ n!,\ n^n$$

Autrement dit :

$$O(1) \subset O(\log(n)) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n\log(n)) \subset O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(n^4)$$
$$\subset \cdots \subset O(2^n) \subset O(3^n) \subset O(4^n) \subset \cdots \subset O(n!) \subset O(n^n).$$

Théorème 4.6 : Manipulation des sommations

Étant donné j, m et n des nombres naturels :

$$\begin{array}{llcll}
\text{(a)} & \sum_{i=m}^{n} c & = & \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{n-m+1 \text{ fois}} & = (n-m+1)c \\
\text{(b)} & \sum_{i=m}^{n} (a_i+b_i) & = & (a_m+b_m)+(a_{m+1}+b_{m+1})+\ldots+(a_n+b_n) & = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \\
\text{(c)} & \sum_{i=m}^{n} (ca_i) & = & (ca_m)+(ca_{m+1})+\ldots+(ca_n) & = c\cdot \sum_{i=m}^{n} a_i \\
\text{(d)} & \sum_{i=m}^{n} a_i & = & a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n & = \sum_{i=j}^{n} a_i - \sum_{i=j}^{m-1} a_i, \quad \text{si } j < m
\end{array}$$

Théorème 4.7 : Formules de sommation

Étant donné $n \in \mathbb{N}$ une constante :

$$\begin{array}{llclcl}
\text{(a)} & \sum_{i=1}^{n} i & = & 1+2+3+\ldots+n & = & \dfrac{n(n+1)}{2} \\
\text{(b)} & \sum_{i=1}^{n} i^2 & = & 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 & = & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\text{(c)} & \sum_{i=1}^{n} i^3 & = & 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 & = & \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \\
\text{(d)} & \sum_{i=0}^{n} r^i & = & r^0+r^1+r^2+\ldots+r^n & = & \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad \text{si } r \in \mathbb{R}\setminus\{1\}
\end{array}$$

Théorème 6.1 : Principe du raisonnement par récurrence.

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle portant sur un nombre naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$P(n_0) \wedge [\forall k \geq n_0,\ P(k) \rightarrow P(k+1)] \quad \longrightarrow \quad \forall n \geq n_0,\ P(n)$$

Théorème 6.2 : Principe de raisonnement par récurrence forte.

Soit $P(n)$ une proposition portant sur un nombre naturel n et soit $n_0, j \in \mathbb{N}$.

$$\left[P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(n_0+j)\right] \wedge \left[\forall k \geq (n_0+j),\ P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)\right] \\ \longrightarrow \quad \forall n \geq n_0,\ P(n)$$

Théorème 7.7

Le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble de n éléments distincts est

$$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{où } 1 \leq k \leq n.$$

Ainsi, lorsque l'**ordre de sélection a de l'importance**, il y a $P(n,k)$ façons de choisir k objets parmi n objets distincts.

Théorème 7.8

Le nombre de combinaisons de k éléments dans un ensemble de n éléments distincts est

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

où $0 \leq k \leq n$. Lorsque l'**ordre de sélection n'a pas d'importance**, il y a $C(n,k)$ façons de choisir k objets parmi n objets distincts.

Théorème 8.6 : Théorème de Ore

Soit $G = (V,E)$ un graphe simple non orienté avec n sommets ($n \geq 3$). Si pour tous sommets non adjacents $u, v \in V$,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

alors G possède un circuit hamiltonien.

Théorème 8.7 : Théorème de Dirac

Soit $G = (V,E)$ un graphe simple non orienté avec n sommets ($n \geq 3$). Si pour chaque sommet $v \in V$ on a

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

alors G possède un circuit hamiltonien.