

## MAT215 – Quelques théorèmes

### Théorème 3.6 : Théorème de Ore

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple non orienté avec  $n$  sommets ( $n \geq 3$ ). Si pour tous sommets non adjacents  $u, v \in V$ ,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

alors  $G$  possède un circuit hamiltonien.

### Théorème 3.7 : Théorème de Dirac

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple non orienté avec  $n$  sommets ( $n \geq 3$ ). Si pour chaque sommet  $v \in V$  on a

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

alors  $G$  possède un circuit hamiltonien.

### Théorème 5.1

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{R}$ .

- Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = b \text{ avec } 0 < b < \infty$$

alors les fonctions  $f$  et  $g$  sont du **même ordre de grandeur**:

$f(x) \in O(g(x))$  et  $g(x) \in O(f(x))$ .

- Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

alors les fonctions  $f$  et  $g$  **ne sont pas du même ordre de grandeur**:

$f(x) \in O(g(x))$  mais  $g(x) \notin O(f(x))$ . La fonction  $f$  est donc négligeable face à la fonction  $g$  quand  $x$  tend vers l'infini.

- Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$$

alors les fonctions  $f$  et  $g$  **ne sont pas du même ordre de grandeur**:

$g(x) \in O(f(x))$  mais  $f(x) \notin O(g(x))$ . La fonction  $g$  est donc négligeable face à la fonction  $f$  quand  $x$  tend vers l'infini.

### Théorème 5.2

Dans la liste de fonctions ci-dessous, chaque fonction est grand-O des fonctions qui sont situées plus à droite, mais n'est pas grand-O des fonctions situées plus à gauche.

$$1, \log(n), \sqrt{n}, n, n \log(n), n^2, n^3, n^4, \dots, 2^n, 3^n, 4^n, \dots, n!, n^n$$

Autrement dit:

$$O(1) \subset O(\log(n)) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \log(n)) \subset O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(n^4) \\ \subset \dots \subset O(2^n) \subset O(3^n) \subset O(4^n) \subset \dots \subset O(n!) \subset O(n^n).$$

### Théorème 5.6 : Manipulation des sommations

Étant donné  $j, m$  et  $n$  des nombres naturels:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=m}^n c &= \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{n-m+1 \text{ fois}} = (n-m+1)c \\ \text{(b)} \quad \sum_{i=m}^n (a_i + b_i) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i \\ \text{(c)} \quad \sum_{i=m}^n (ca_i) &= (ca_m) + (ca_{m+1}) + \dots + (ca_n) = c \cdot \sum_{i=m}^n a_i \\ \text{(d)} \quad \sum_{i=m}^n a_i &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{i=j}^n a_i - \sum_{i=j}^{m-1} a_i, \quad \text{si } j < m \end{aligned}$$

### Théorème 5.7 : Formules de sommation

Étant donné  $n \in \mathbb{N}$  une constante:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{(b)} \quad \sum_{i=1}^n i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \text{(c)} \quad \sum_{i=1}^n i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \text{(d)} \quad \sum_{i=0}^n r^i &= r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad \text{si } r \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

### Théorème 7.1 : Principe du raisonnement par récurrence.

Soit  $P(n)$  une fonction propositionnelle portant sur un nombre naturel  $n$  et soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

$$P(n_0) \wedge [\forall k \geq n_0, P(k) \rightarrow P(k+1)] \rightarrow \forall n \geq n_0, P(n)$$

### Théorème 7.2 : Principe de raisonnement par récurrence forte.

Soit  $P(n)$  une proposition portant sur un nombre naturel  $n$  et soit  $n_0, j \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} [P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \dots \wedge P(n_0+j)] \wedge [\forall k \geq (n_0+j), P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)] \\ \rightarrow \forall n \geq n_0, P(n) \end{aligned}$$

### Théorème 8.7

Le nombre d'arrangements de  $k$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments distincts est

$$P(n, k) = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ où } 1 \leq k \leq n.$$

Ainsi, lorsque l'**ordre de sélection a de l'importance**, il y a  $P(n, k)$  façons de choisir  $k$  objets parmi  $n$  objets distincts.

### Théorème 8.8

Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments dans un ensemble de  $n$  éléments distincts est

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

où  $0 \leq k \leq n$ . Lorsque l'**ordre de sélection n'a pas d'importance**, il y a  $C(n, k)$  façons de choisir  $k$  objets parmi  $n$  objets distincts.