Atelier d'algèbre 1 – MAT145

Règles et manipulations algébriques de base

Opposé et inverse

1. Donnez l'opposé, l'inverse et l'opposé de l'inverse de chacune des expressions suivantes, en supposant qu'il n'y ait pas de division par 0.

Expression	Opposé	Inverse	Opposé de l'inverse
-3	$-(-3)=3$	$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$
$1/\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$-1/4$	$-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{-1/4}=-\frac{4}{1}=-4$	$-(-4)=4$
$\frac{x}{2y}$	$-\frac{x}{2y}$	$\frac{1}{x/2y}=\frac{2y}{x}$	$-\frac{2y}{x}$
$-a+b$	$-(-a+b)=-(-a)-b$ $=a-b$	$\frac{1}{-a+b}$	$-\frac{1}{-a+b}=\frac{1}{-(-a+b)}$ $=\frac{1}{a-b}$

2. Donnez **l'inverse** des expressions suivantes, en supposant qu'il n'y ait pas de division par 0.

$7a^{-2}$ inverse : $\frac{1}{7a^{-2}}=\frac{1}{\frac{7}{a^2}}=\frac{a^2}{7}$	$\frac{A}{BC^{-3}}=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{C^{-3}}=\frac{A}{B}\cdot\frac{C^3}{1}=\frac{AC^3}{B}$ inverse : $\frac{B}{AC^3}$
$\frac{1}{x+3y}$ inverse : $x+3y$	$\left(\frac{x+y}{7}\right)^{-1}$ inverse : $\left(\left(\frac{x+y}{7}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{x+y}{7}$

Simplification des termes et facteurs

3. Pour chaque expression du tableau, indiquez si la partie en gras est un terme ou un facteur. Dites ensuite si on peut faire la simplification indiquée et justifiez votre réponse.

Expression	Terme (T) ou facteur (F)	Simplification correcte (oui/non)	Justification
$\frac{3\cancel{\boldsymbol{a}}b^2}{8\cancel{\boldsymbol{a}}}=\frac{3b^2}{8}$	T F Numérateur ☐ ☒ Dénominateur ☐ ☒	oui	Le numérateur et le dénominateur étant factorisés, on peut simplifier les facteurs communs. $\frac{3ab^2}{8a}=\frac{3b^2}{8}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}}_{1}=\frac{3b^2}{8}$
$\frac{\cancel{\boldsymbol{x}}+4}{\cancel{\boldsymbol{x}}+1}=4$	T F Numérateur ☒ ☐ Dénominateur ☒ ☐	non	Le numérateur et le dénominateur ne sont pas factorisés. On ne peut simplifier un terme du numérateur avec un terme du dénominateur. Il ne s'agit pas d'une multiplication par 1.
$\left(\boldsymbol{x}^3\right)^2=x^5$	T F ☐ ☒	non	$\left(\boldsymbol{x}^3\right)^2=x^3\cdot x^3=x^6$
$\frac{\cancel{\boldsymbol{5y}}+2}{\cancel{\boldsymbol{5y}}}=2$	T F Numérateur ☒ ☐ Dénominateur ☒ ☐	non	On ne peut simplifier un terme du numérateur avec un terme ou un facteur du dénominateur.
$\frac{\cancel{\boldsymbol{x-2}}}{7\left(\cancel{\boldsymbol{x-2}}\right)}=\frac{1}{7}$	T F Numérateur ☐ ☒ Dénominateur ☐ ☒	oui	(x-2) peut être considéré comme un facteur. Les numérateur et dénominateur étant factorisés, on peut simplifier les facteurs communs.
$\frac{7\boldsymbol{x}^4}{5\boldsymbol{x}^4}=2x^4$	T F Numérateur ☐ ☒ Dénominateur ☐ ☒	non	$\frac{7\boldsymbol{x}^4}{5\boldsymbol{x}^4}=\frac{7}{5}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}}}_{1}=\frac{7}{5}\neq 2x^4$
$\frac{x+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}}{2}=\frac{x+1}{2y}$	T F ☒ ☐	non	$\frac{x+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}}{2}=\frac{\frac{xy+1}{y}}{2}=\frac{xy+1}{y}\cdot\frac{1}{2}$ $=\frac{\boldsymbol{xy}+1}{2y}$

Mise en évidence

4. (MAT144, partie 1, p.100, exercice 2.34)[1] Effectuez la mise en évidence des facteurs communs pour factoriser chacun des polynômes suivants. Simplifiez chaque facteur lorsque possible.

b) $\boxed{A\cdot B^2}-\boxed{4B}=B(AB-4)$

c) $\boxed{6(y-3)^5\cdot(y-2)^3}-\boxed{6(y-3)^6\cdot 3(y-2)^2}=6\cdot(y-3)^5\cdot(y-2)^2\cdot\underbrace{\big((y-2)\ -3(y-3)\big)}_{réduire}$

$$=6\cdot(y-3)^5\cdot(y-2)^2\cdot(y-2-3y+9)$$
$$=6\cdot(y-3)^5\cdot(y-2)^2\cdot(-2y+7)$$

i) $\boxed{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 4(x-4)^3}+\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3(x-4)^2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-4)^2\underbrace{\left(2\cdot 4\cdot(x-4)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 3\right)}_{réduire}$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-4)^2\left(8x-32+3x-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-4)^2\left(11x-\frac{67}{2}\right)$$

Isoler une variable dans une équation

5. Résolvez l'équation par rapport à la variable spécifiée.

a) $A=\dfrac{h(b+B)}{2}$, pour h

$$2\cdot A=h(b+B)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$$
$$2A\cdot\frac{1}{(b+B)}=h\,\cancel{(b+B)}\cdot\cancel{\frac{1}{(b+B)}}$$
$$\frac{2A}{(b+B)}=h$$

[1] PINEAU, K., GOUAILLIER, V. MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : Notes de cours 1re partie, Mai 2022.

b) $$A=\frac{h(b+B)}{2}\text{, pour } B$$

$$A=\frac{hb+hB}{2}$$

$$A\cdot 2=\frac{hb+hB}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$$

$$2A-hb=\cancel{hb}-\cancel{hb}+hB$$

$$\frac{1}{h}\cdot(2A-hb)=\cancel{\frac{1}{h}}\cdot\cancel{h}B$$

$$\frac{(2A-hb)}{h}=B$$

c) $$y^2+2xyy'=5-3y'\text{, pour } y'$$

$$y^2+2xyy'+3y'=5\cancel{-3y'}\cancel{+3y'}$$

$$\cancel{y^2}\cancel{-y^2}+2xyy'+3y'=5-y^2$$

$$(2xy+3)y'=5-y^2$$

$$\cancel{\frac{1}{(2xy+3)}}\cancel{(2xy+3)}y'=\left(5-y^2\right)\cdot\frac{1}{2xy+3}$$

$$y'=\frac{5-y^2}{2xy+3}$$

d) $$\cos\left(xy^2\right)\left(y^2+2xyy'\right)=y'\text{, pour } y'$$

$$y^2\cos\left(xy^2\right)+2xyy'\cos\left(xy^2\right)=y'$$

$$\cancel{y^2\cos\left(xy^2\right)}\cancel{-y^2\cos\left(xy^2\right)}+2xy\cos\left(xy^2\right)y'=y'-y^2\cos\left(xy^2\right)$$

$$2xy\cos\left(xy^2\right)y'=y'-y^2\cos\left(xy^2\right)$$

$$2xy\cos\left(xy^2\right)y'-y'=\cancel{y'}\cancel{-y'}-y^2\cos\left(xy^2\right)$$

$$\left(2xy\cos\left(xy^2\right)-1\right)y'=-y^2\cos\left(xy^2\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{\left(2xy\cos\left(xy^2\right)-1\right)}}\cdot\cancel{\left(2xy\cos\left(xy^2\right)-1\right)}y'=-y^2\cos\left(xy^2\right)\cdot\frac{1}{2xy\cos\left(xy^2\right)-1}$$

$$y'=\frac{-y^2\cos\left(xy^2\right)}{2xy\cos\left(xy^2\right)-1}$$