Atelier d'algèbre 2 – MAT145

Fractions et exposants

Fractions rationnelles

1. Effectuez les opérations et simplifiez. Donnez la réponse en une seule fraction.

a) $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{x}\cdot x} = \dfrac{2}{x}$

b) $-\dfrac{1}{2a}\times\dfrac{6a^{-3}}{-b} = -\dfrac{1}{2a}\times\left(-\dfrac{6}{a^3b}\right) = \dfrac{1}{2a}\times\dfrac{6}{a^3b} = \dfrac{1}{\cancel{2}a}\times\dfrac{\cancel{2}\cdot 3}{a^3b} = \dfrac{3}{a^4b}$

c) $\dfrac{x}{2(x-1)^2} - \dfrac{3}{x(x-1)} = \dfrac{x}{2(x-1)^2}\cdot\dfrac{x}{x} - \dfrac{3}{x(x-1)}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{(x-1)}{(x-1)} = \dfrac{x^2-6(x-1)}{2x(x-1)^2} = \dfrac{x^2-6x+6}{2x(x-1)^2}$

Plus petit dénominateur commun : $\dfrac{*}{2(x-1)^2x}$

d) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}\cdot\dfrac{x^2+1}{(x-2)} = \dfrac{\cancel{(x-2)}^2}{(x+1)\cancel{(x-2)}}\cdot\dfrac{x^2+1}{\cancel{(x-2)}} \overset{\text{si } x\neq 2}{=} \dfrac{x^2+1}{x+1}$

(note : x^2+1 ne se factorise pas dans les réels.)

e) $\dfrac{x}{2y}\div\dfrac{x}{8(x+y)} \overset{\substack{\text{si } x\neq -y\\ \text{si } x\neq 0}}{=} \dfrac{x}{2y}\cdot\dfrac{8(x+y)}{x} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{2}y}\cdot\dfrac{\cancel{2}\cdot 4\cdot(x+y)}{\cancel{x}} = \dfrac{4(x+y)}{y}$

f) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}{1+\frac{3}{xy}} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{y}-\frac{2}{y}\cdot\frac{x}{x}}{1\cdot\frac{xy}{xy}+\frac{3}{xy}} = \dfrac{\frac{y-2x}{xy}}{\frac{xy+3}{xy}} = \dfrac{y-2x}{\cancel{xy}}\cdot\dfrac{\cancel{xy}}{xy+3} \overset{\substack{\text{si } x\neq 0\\ \text{et } y\neq 0}}{=} \dfrac{y-2x}{xy+3}$

Exposants

2. Simplifiez les expressions suivantes.

$-5^2 = -5\cdot 5 = -25$	$\dfrac{7a^{-1}b^4}{a^2b^2} = \dfrac{7b^4}{aa^2b^2} = \dfrac{7b^2}{a^3}$
$(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$	$\dfrac{8x^4x\,y}{4x^2y^3} = \dfrac{2x^5y}{x^2y^3} = \dfrac{2x^3}{y^2}$, si $x \neq 0$
$\left(-6x^3x^4\right)^2 = \left(-6x^7\right)^2$ $= \left(-6\right)^2\left(x^7\right)^2$ $= 36x^{14}$	$\pi\left(\dfrac{2h}{3}\right)^2 h\,\dfrac{dh}{dt} = \pi\dfrac{(2h)^2}{3^2}h\dfrac{dh}{dt}$ $= \dfrac{\pi}{1}\cdot\dfrac{2^2h^2}{9}\cdot\dfrac{h}{1}\dfrac{dh}{dt}$ $= \dfrac{4\pi h^3}{9}\dfrac{dh}{dt}$
$\dfrac{1}{9x}\cdot\left(\dfrac{3x}{-y^2}\right)^3 = \dfrac{1}{3^2x}\cdot\dfrac{(3x)^3}{\left(-y^2\right)^3}$ $= \dfrac{1}{3^2x}\cdot\dfrac{3^3x^3}{(-1)^3\left(y^2\right)^3}$ $= \dfrac{1}{3^2x}\cdot\dfrac{3^3x^3}{-y^{2\times 3}}$ $= -\dfrac{3^{3-2}x^{3-1}}{y^6}$ $= -\dfrac{3x^2}{y^6}$, si $x \neq 0$	$\dfrac{(n+1)\,x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n\,x^n} = \dfrac{(n+1)}{n}\cdot\dfrac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{x^n}$ $= \dfrac{(n+1)}{n}\cdot 2^{n-(n+1)}\cdot x^{n+1-n}$ $= \dfrac{(n+1)}{n}\cdot 2^{-1}\cdot x^1$, si $x \neq 0$ $= \dfrac{(n+1)x}{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$

3. Simplifiez les expressions, si possible. Donnez les réponses avec des exposants fractionnaires.

$a^2a^{1/2}=a^{2+\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$	$\left(-8x^3y^2\right)^{1/3}=(-8)^{1/3}(x^3)^{1/3}(y^2)^{1/3}$ $=-2x^{3/3}y^{2/3}=-2xy^{2/3}$
$\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=x^{\frac{2}{3}-1}=x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}$ $=\dfrac{1}{x^{1/3}}$	$\sqrt{81x^4y}=\left(3^4x^4y\right)^{1/2}=3^{4/2}x^{4/2}y^{1/2}$ $=3^2x^2y^{1/2}=9x^2y^{1/2}$
$\left(a^2+b^2\right)^{1/2}$ Ne se simplifie pas, car on ne peut appliquer l'exposant $1/2$ aux termes a^2 et b^2.	$\sqrt{\dfrac{9x^{-2}}{5y^8}}=\left(\dfrac{3^2}{5x^2y^8}\right)^{1/2}=\dfrac{\left(3^2\right)^{1/2}}{\left(5x^2y^8\right)^{1/2}}$ $=\dfrac{3^{2/2}}{5^{1/2}x^{2/2}y^{8/2}}=\dfrac{3}{5^{1/2}x\,y^4}$

4. Simplifiez les expressions suivantes. Donner les réponses avec des radicaux.

Rappel : On ne laisse pas de puissance n sous une racine n^e. $\sqrt{24}=\sqrt{8\cdot 3}$ $=\sqrt{2^3 3}$ $=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}$ $=\sqrt{2^2}\sqrt{2\cdot 3}$ $=2\sqrt{6}$	On peut choisir d'utiliser les propriétés des racines ou exprimer les racines en exposants fractionnaires, puis appliquer les propriétés des exposants. Ici, on montre comment utiliser les propriétés des exposants fractionnaires. $\sqrt[3]{\dfrac{-16x^5}{y}}=\left(\dfrac{-2^4x^5}{y}\right)^{1/3}=\dfrac{\left((-1)\,2^4x^5\right)^{1/3}}{y^{1/3}}$ $=\dfrac{(-1)^{1/3}2^{4/3}x^{5/3}}{y^{1/3}}=\dfrac{-2^{4/3}x^{5/3}}{y^{1/3}}$ $=\dfrac{-2^{3/3}2^{1/3}x^{3/3}x^{2/3}}{y^{1/3}}=\dfrac{-2\cdot 2^{1/3}\cdot x\cdot x^{2/3}}{y^{1/3}}$ $=-2x\cdot\dfrac{\left(2x^2\right)^{1/3}}{y^{1/3}}=-2x\cdot\left(\dfrac{2x^2}{y}\right)^{1/3}$ $=-2\,x\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{y}}$