Atelier d’algèbre 3 – MAT145

Simplification d’expressions algébriques

Principes de simplification

1. Pour pratiquer les principes de bases de la simplification, les exercices suivants de la partie 1 des notes de cours de MAT144 sont suggérés[1] :

    a) Réduction des termes : p. 29, exercice 1.25
    b) Simplification de fractions : p. 40, exercices 1.28, 1.29, 1.32
    c) Regroupement des facteurs identiques : p. 48, exercice 1.40
    d) Application des différents principes : p. 99, exercice 2.33

Simplification d’expressions algébriques

2. Les expressions suivantes ont été obtenues en appliquant des règles de dérivation. Simplifiez ces expressions et donnez la réponse sous forme d’une seule fraction simplifiée et, si possible, dont le numérateur et le dénominateur sont factorisés.

    a) $\frac{2x}{3}+\frac{5}{3x^{2/3}}+\frac{1}{x^2}$

    Les dernières opérations dans l’ordre priorité des opérations sont des additions, alors on cherche à additionner les termes semblables, mais il n’y en a pas. On demande de donner la réponse sous forme d’une seule fraction, alors il faut mettre les fractions au même dénominateur. Le dénominateur commun doit contenir un facteur 3 et au moins 2 facteurs x. Le dénominateur est donc $3x^2$. Le premier dénominateur contient un facteur 3, il manque donc le facteur x^2. Le deuxième dénominateur contient les facteurs 3 et $x^{2/3}$, il faut donc le multiplier par $x^{4/3}$ pour obtenir $3x^2$, car $x^{2/3}x^{4/3}=x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=x^{\frac{6}{3}}=x^2$. Le dernier dénominateur contient x^2, il manque donc le facteur 3. Pour mettre chaque fraction au dénominateur commun, on multiplie son numérateur et son dénominateur par les facteurs manquants (ci-dessous en bleu).

$$\frac{2x}{3}+\frac{5}{3x^{2/3}}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x}{3}\cdot\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{3x^{2/3}}\cdot\frac{x^{4/3}}{x^{4/3}}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2x^3+5x^{4/3}+3}{3x^2}$$

[1] PINEAU, K., GOUAILLIER, V. MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : Notes de cours 1re partie, Mai 2022.

b) Les dernières opérations dans l'ordre de priorité des opérations sont des multiplications. Le dernier facteur, $\dfrac{(x+2)-(x-5)}{(x+2)^2}$ étant une fraction, on se demande si on peut le simplifier. Le numérateur n'est pas factorisé et il n'y a pas de facteur commun entre les deux termes qui peut être mis en évidence. On peut cependant réduire les termes :

$$3\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^2\cdot\frac{(x+2)-(x-5)}{(x+2)^2}=3\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^2\cdot\frac{x+2-x+5}{(x+2)^2}=3\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^2\cdot\frac{7}{(x+2)^2}$$

Il n'y aucun facteur commun qui pourrait être simplifié entre les numérateurs et les dénominateurs. On effectue la multiplication et on rassemble les facteurs identiques sous un seul exposant.

$$\frac{3}{1}\cdot\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^2\cdot\frac{7}{(x+2)^2}=\frac{3}{1}\cdot\frac{(x-5)^2}{(x+2)^2}\cdot\frac{7}{(x+2)^2}=\frac{3\cdot7\cdot(x-5)^2}{(x+2)^4}=\frac{21(x-5)^2}{(x+2)^4}$$

c) L'expression est une fraction (la dernière opération dans l'ordre de priorité des opérations est une division). On cherche à simplifier les facteurs communs au numérateur et dénominateur, mais avant, il faut s'assurer que ces derniers sont factorisés. La dernière opération au numérateur étant la soustraction, celui-ci n'est pas sous forme factorisé. On remarque qu'il y a un facteur 2 et deux facteurs $(x+2)$ communs à chaque terme. On peut les mettre en évidence pour factoriser le numérateur.

$$\begin{aligned}\frac{2(x+2)^3-2\cdot3\cdot x(x+2)^2}{(x+2)^6}&=\frac{2(x+2)^2((x+2)-3x)}{(x+2)^6}\\&=\frac{2(x+2)^2(x+2-3x)}{(x+2)^6}\\&=\frac{2(x+2)^2(-2x+2)}{(x+2)^6}\\&=\frac{2(x+2)^2(-2)(x-1)}{(x+2)^6}\end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de la fraction étant maintenant factorisés, on peut simplifier les facteurs $(x+2)$ qui sont communs.

$$\frac{2(x+2)^2(-2)(x-1)}{(x+2)^6}=\frac{2(-2)\cancel{(x+2)^2}(x-1)}{\cancel{(x+2)^2}(x+2)^4}=\frac{-4(x-1)}{(x+2)^4}$$

3. Pour chaque expression du tableau, dites si l'on peut faire la simplification indiquée. Sinon, expliquez pourquoi. Si oui, écrivez la forme simplifiée lorsqu'elle n'est pas donnée.

Expression	**Simplification correcte (oui ou non)**	**Sinon, pourquoi ?**
$\dfrac{\overbrace{\boxed{\cancel{x}}}^{\text{terme}}+3}{\boxed{\cancel{x}}+1}$	non	Le numérateur et le dénominateur ne sont pas factorisés. On ne peut simplifier un terme du numérateur avec un terme du dénominateur.
$\dfrac{\cancel{2}x-\cancel{4}}{\cancel{2}}=x-2$	oui	$\dfrac{2x-4}{2}=\dfrac{\cancel{2}(x-2)}{\cancel{2}}=x-2$
$\dfrac{\overbrace{\boxed{3\cancel{(x^2+1)}}}^{\text{terme}}-(3x-4)(2x)}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}$	non	Le numérateur et le dénominateur ne sont pas factorisés. Le facteur (x^2+1) fait partie d'un terme et on ne peut simplifier un terme du numérateur avec un terme ou un facteur du dénominateur.
$\dfrac{1}{4+(x^3)^2}=\dfrac{1}{4+x^5}$	non	$\dfrac{1}{4+(x^3)^2}=\dfrac{1}{4+x^3x^3}=\dfrac{1}{4+x^6}$
$\sqrt{25-x^2}=5-x$ $25-x^2$ est-il le carré de $5-x$?	non	$(5-x)(5-x)=25-10x+x^2\neq 25-x^2$ Sous la racine, il y a une soustraction et non une multiplication. On ne peut appliquer la racine carrée à chacun des termes : $\sqrt{25-x^2}\neq\sqrt{25}-\sqrt{x^2}$.
$\dfrac{3\cancel{(x-1)}+(x-1)^{\cancel{2}}}{4\cancel{(x-1)}}$	oui	$\dfrac{(x-1)\big(3+(x-1)\big)}{4(x-1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(3+x-1)}{4\cancel{(x-1)}}$ $=\dfrac{x+2}{4}$
$\dfrac{5x+\dfrac{1}{x+1}}{(x-4)^2}=\dfrac{5x+1}{(x-4)^2(x+1)}$	non	$\dfrac{\dfrac{5x}{1}\cdot\dfrac{x+1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}}{(x-4)^2}$ $=\dfrac{\dfrac{5x(x+1)+1}{x+1}}{(x-4)^2}=\dfrac{\dfrac{5x^2+5x+1}{x+1}}{(x-4)^2}$ $=\dfrac{5x^2+5x+1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{(x-4)^2}=\dfrac{5x^2+5x+1}{(x-4)^2(x+1)}$

4. Lorsque possible, écrivez chacune des expressions algébriques suivantes sous une forme plus simple. Ne laissez pas d'exposants négatifs dans les réponses.

a) $\dfrac{36}{24} \overset{\substack{\text{Factoriser,}\\ \text{Simplifier}\\ \text{les facteurs}}}{\overbrace{=}} \dfrac{\cancel{6}\cdot\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{6}\cdot\cancel{2}\cdot 2} = \dfrac{3}{2}$

b) $6a-3(2a+b) \overset{\substack{\text{Réduire}\\ \text{les termes}}}{\overbrace{=}} 6a-6a-3b=-3b$

c) $\dfrac{a}{a+2} =$

Il y a une somme au dénominateur qui ne peut être factorisée. Aucune simplification.

d) $\dfrac{x^2-4}{x+2} = \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} = x-2, \text{ si } x \neq -2$

e) $\dfrac{a}{2a^2} = \dfrac{\cancel{a}}{2\cancel{a}\cdot a} = \dfrac{1}{2a}$

f) $\sqrt{x^2+4} =$ Il y a une somme sous la racine. Aucune simplification.

g) $\dfrac{2x+1}{2x+2} =$ On ne peut pas factoriser le numérateur et le dénominateur de façon à ce qu'il y ait des facteurs communs. Aucune simplification.

h) $\dfrac{\frac{x}{3}}{\frac{2}{x}} \overset{\substack{\text{Multiplier par}\\ \text{l'inverse de } \frac{2}{x}}}{\overbrace{=}} \dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{6}, \text{ si } x \neq 0$

i) $-x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}, \text{ si } x \neq 0$

j) $\dfrac{7}{5x^{-2}} = \dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{1}{x^{-2}} = \dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{x^2}{1} = \dfrac{7x^2}{5}$