# Atelier d’algèbre 1

## MAT145

## Règles et manipulations algébriques de base

Kathleen Pineau et V. Gouaillier

École de technologie supérieure

Hiver 2024

# Ressources en algèbre

**Notes de cours en MAT144 :**

PINEAU, K., GOUAILLIER, V., MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : Notes de cours 1re partie, Mai 2022. Disponibles en ligne sur le site du cours.

**Tutorat par les pairs Nimbus offert à l'ÉTS**

**Aussi plusieurs sites web :**

Alloprof, Khan Academy, Mathema-tic

# Qu’est-ce qu’une expression algébrique ?

Une expression algébrique est une combinaison de nombres et de variables reliées par des opérations mathématiques.

$$\frac{3\left(x+y\right)-3x}{9}$$

# Coefficient et exposant

Le coefficient indique le nombre d’occurrences d’un terme dans une addition.

$$4a = a + a + a + a$$

Ici, 4 est un coefficient qui indique qu’il y a 4 termes $a$ dans l’addition.

L’exposant indique le nombre d’occurrences d’un facteur dans une multiplication.

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Ici, 4 est un exposant qui indique qu’il y a 4 facteurs $a$ dans la multiplication.

# L'opposé et l'inverse

- Chaque nombre $a$ possède un opposé qui est $-a$.

$$a + (-a) = 0$$

- Soustraire revient à additionner l'opposé.

$$a - b = a + (-b)$$

- Chaque nombre $a$ non nul possède un inverse qui est $1/a$.

$$a \bullet \frac{1}{a} = 1$$

- Diviser revient à multiplier par l'inverse.

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

# Exemples : opposé, inverse et opposé de l’inverse

# Les éléments neutres

Le nombre 0 est neutre pour l'addition (additionner 0 ne change rien à la somme).

$$a+0=0+a=a$$

On peut éliminer toute quantité égale à zéro d'une somme.

$$5+\underbrace{\cancel{2x}-\cancel{2x}}_{0}=5$$

Le nombre 1 est neutre pour la multiplication (multiplier par 1 ne change rien au produit).

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

On peut éliminer toute quantité égale à 1 d'un produit.

$$4\cdot\underbrace{\cancel{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}}_{1}=4$$

| Propriétés | Addition | Multiplication |
|---|---|---|
| Commutativité | Deux nombres réels peuvent être additionnés dans n'importe quel ordre.<br>$a + b = b + a$<br>Exemples<br>$15 + 9 = 9 + 15 = 24$<br>$15x + 9 = 9 + 15x$ | Deux nombres réels peuvent être multipliés dans n'importe quel ordre.<br>$a \cdot b = b \cdot a$<br>Exemples<br>$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$<br>$x \cdot 6 = 6 \cdot x = 6x$ |
| Associativité | Le résultat de l'addition de trois nombres réels est indépendant du choix des deux premiers nombres additionnés.<br>$a + (b + c) = (a + b) + c$<br>Exemples<br>$2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7 = 12$<br>$2 + (3 + x) = (2 + 3) + x = 5 + x$ | Le résultat de la multiplication de trois nombres réels est indépendant du choix des deux premiers nombres multipliés.<br>$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$<br>Exemples<br>$2 \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot 7 = 70$<br>$-2 \cdot (3 \cdot x) = (-2 \cdot 3) \cdot x = -6x$ |
| Distributivité de la multiplication sur l'addition<br>$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$<br>$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ | | Exemples<br>$7(4 + 5) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 63$<br>$5(3x + 7) = 5 \cdot 3x + 5 \cdot 7 = 15x + 35$<br>$(5 - 3x)2 = 5 \cdot 2 - 3x \cdot 2 = 10 - 6x$ |

Référence :
PINEAU, K., GOUAILLIER, V. *MAT144 Introduction aux mathématiques du génie* : Notes de cours 1re partie, Mai 2022.

# Réduire les termes d'une expression

$$2x + 5y - 2x = 2x + 5y + (-2x)$$

Soustraire revient à additionner l'opposé

$$= \underbrace{\cancel{2x} + (\cancel{-2x})}_{0} + 5y$$

Commutativité de l'addition

$$= 5y$$

Associativité de +
0 est neutre pour l'addition

# Réduire les termes d'une expression

$$\begin{aligned} 4(x+2)+1+x &= 4x+8+1+x && \text{Distributivité de x sur +} \\ &= 4x+x+8+1 && \text{Commutativité de +} \\ &= (4x+x)+(8+1) && \text{Associativité de +} \\ &= 5x+9 \end{aligned}$$

**L'ordre de priorité des opérations**

Lorsqu'on effectue une suite d'opérations sur des nombres réels, on doit respecter l'ordre de priorité suivant.

1. On commence par effectuer les opérations situées à l'intérieur des parenthèses. *La barre d'une fraction, un radical ou une valeur absolue joue le rôle de parenthèses.*
2. On calcule ensuite les puissances (exposants).
3. On poursuit avec les multiplications et les divisions de gauche à droite.
4. On termine avec les additions et les soustractions de gauche à droite.

Lorsqu'on veut modifier cet ordre, on introduit des parenthèses.

$$=\left(3\left(5+2\right)-3\cdot 2\right)\div 9$$

$$\frac{3\left(5+2\right)-3\cdot 2}{9}=\frac{3\cdot 7-3\cdot 2}{9}=\frac{21-6}{9}=\frac{15}{9}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 3}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{3\left(x+y\right)-3x}{9}=\frac{3x+3y-3x}{9}=\frac{3x+3y+(-3x)}{9}$$

$$=\frac{3x+(-3x)+3y}{9}=\frac{3y}{9}=\frac{3y}{3\cdot 3}=\frac{y}{3}$$

# Les expressions algébriques sont composées de termes et de facteurs.

- Les termes sont des quantités additionnées

$$\boxed{x^2} + \boxed{3xy} + \boxed{(x-4)}$$

terme terme terme

- Les facteurs sont des quantités multipliées

$$3 \cdot y \cdot (x-4)$$

facteur facteur facteur

$$2^3 x + 4x \div (12 - 10)$$

# Développer versus factoriser…

$$15x(x-3)^2-20x^3(x-3)=15x(x^2-6x+9)-20x^3(x-3)$$
$$=15x^3-90x^2+135x-20x^4-60x^3$$
$$=-20x^4-45x^3-90x^2+135x$$

$$15x(x-3)^2-20x^3(x-3)=5x(x-3)\left[3(x-3)-4x^2\right]$$
$$=5x(x-3)\left[-4x^2+3x-9\right]$$

# Distributivité et mise en évidence

**Distributivité :** un facteur se distribue sur des termes

$$2x \cdot (\boxed{3x} + \boxed{5}) = \boxed{2x \cdot 3x} + \boxed{2x \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot + 2 \cdot 5 \cdot x = 6x^2 + 10x$$

DÉVELOPPER
(transformer un produit en somme)

FACTORISER
(transformer une somme en produit)

**Mise en évidence :** on sort un facteur commun à tous les termes

# Simplifier une fraction

$$\frac{36}{42} = \frac{6\cdot 6}{6\cdot 7} = \underbrace{\boxed{\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}}}_{1} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{x^2+5x}{5x} = \frac{x\cdot x+5x}{5x} = \frac{x(x+5)}{5x} = \underbrace{\boxed{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}}_{1} \cdot \frac{(x+5)}{5} \overset{\text{si } x\neq 0}{=} \frac{(x+5)}{5}$$

# Exemple MAT145

Factorisation par mise en évidence du facteur $x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-2x}{(x-2)^3}\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{\boxed{x\cdot(x-2)}}{(x-2)^3}\right) && \text{limite de la forme } \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{(x-2)^2}\right) && \text{limite de la forme } \frac{2}{0^+} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et on simplifie un facteur ($x$-2) qui est commun au numérateur et dénominateur.

# Exemple MAT145

Factorisation d’une différence de carrés

$$\lim_{t\to 4}\frac{t^2-16}{t-4} = \lim_{t\to 4}\frac{\boxed{(t\cancel{-4})(t+4)}}{t\cancel{-4}}$$

$$= \lim_{t\to 4}(t+4)$$

$$= 4+4$$

$$= 8$$

Parfois on ne peut faire une mise en évidence. Voir la section 2.3 de la partie 1 des notes de cours de MAT144 pour la factorisation de certains polynômes.

# Exemple MAT145

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+10}{2x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(4+\frac{10}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right) \\
&= \frac{4+\frac{10}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}} = \frac{4+0}{2+0} = 2
\end{aligned}$$

# Résoudre une équation

$$\frac{5x + 4}{2} = 3$$

Quelle est la dernière opération ?

# Résoudre une équation

Si on veut résoudre une équation, on procède selon l'ordre contraire des priorités des opérations

$$5x + \boxed{4} = 6$$

Quelle est la dernière opération ?
L'addition de 4.

$$5x + \cancel{4} + \cancel{(-4)} = 6 + (-4)$$

Pour éliminer le terme 4,
on additionne son opposé -4.

$$5\,x = 2$$

Quelle est la dernière opération ?
La multiplication par 5.

$$\cancel{\frac{1}{5}} \cdot \cancel{5}\,x = 2 \cdot \frac{1}{5}$$

Pour éliminer le facteur 5,
on multiplie par son inverse 1/5.

$$x = \frac{2}{5}$$

# Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.114, exemple 2.34

On isole la dérivée $y'$

$$
\begin{aligned}
& & 3x^2y^2 + 2x^3y\,y' - 6x\,y^3 - 9x^2y^2\,y' &= 0 \\
&\Longrightarrow & 3x^2y^2 - 6x\,y^3 + \left(2x^3y - 9x^2y^2\right)y' &= 0 \\
&\Longrightarrow & \left(2x^3y - 9x^2y^2\right)y' &= 6x\,y^3 - 3x^2y^2 \\
&\Longrightarrow & y' = \frac{6x\,y^3 - 3x^2y^2}{2x^3y - 9x^2y^2} &= \frac{\cancel{x}\;\cancel{y}\left(6\,y^2 - 3x\,y\right)}{\cancel{x}\;\cancel{y}\left(2x^2 - 9x\,y\right)} \\
&\Longrightarrow & y' &= \frac{3y\left(2y - x\right)}{x\left(2x - 9y\right)}
\end{aligned}
$$

# Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.86, exemple 2.24

Si on veut dériver, on procède selon l'ordre contraire des priorités des opérations

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]' \\
&= \frac{[1-x^2]'\,[1+x^2] - [1-x^2]\,[1+x^2]'}{[1+x^2]^2} && \text{règle de la dérivée d'un quotient} \\
&= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} && \text{formule 2 de la table de la page } \boxed{80} \text{ (puissance)} \\
&= \frac{(-2x-2x^3) - (2x-2x^3)}{(1+x^2)^2} && \text{distributivité} \\
&= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} && \text{simplifications algébriques}
\end{aligned}
$$

**2.26** Dérivez les fonctions suivantes et comparez votre résultat avec celui d'un calculateur symbolique.

(a) $f(x) = \cos(2x)$

(b) $f(x) = \sin^3(x)$

(c) $f(x) = \arcsin(x^3)$

(d) $f(x) = \ln(\cos x) - 4x^3$

(e) $f(x) = e^{3x+1}$

(f) $f(x) = \left(5x^2 + x + 10\right)^6$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(h) $f(x) = \sin(x^3 + 4x)$

(i) $f(x) = \sin(5)$

(j) $f(x) = \log_2(x^3 - 1)$

(k) $f(x) = 2\arctan(3x)$

(l) $f(x) = 3\pi^2 \ln(2x + 1)$

(m) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

(n) $f(x) = e^{-3x}\cos(5x)$

(o) $f(x) = e^{-x/2}(\cos(3x) + \sin(3x))$

(p) $f(x) = \left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^3$

(q) $f(x) = (4x - 3)^9(5 - x)^4$

(r) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(s) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}}$

(t) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x - 1}}$

(u) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arccos(x^4)$

(v) $f(x) = \cos^2(\sqrt{2x + 1})$

**2.27** Dérivez les fonctions suivantes et comparez votre résultat avec celui d'un calculateur symbolique.

(a) $f(x) = \dfrac{20}{9+5x}$

(b) $f(x) = \dfrac{9+5x}{20}$

(c) $f(x) = -\dfrac{6}{x^3}$

(d) $f(x) = \dfrac{10+9x+20x^2}{5x}$

(e) $f(t) = t^2 e^{-2t}$

(f) $g(t) = \sqrt{4-t^2}$

(g) $x(t) = \dfrac{t^2+3}{\sqrt{t}}$

(h) $x(t) = 4 - 3t\sin(t^3)$

(i) $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} + e^{\sqrt{t}}$

(j) $h(t) = e^{-t}\sin(t)$

(k) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+5}$

(l) $x(t) = \dfrac{5}{\left(t^2-4\right)^3}$

(m) $T(t) = t^2\sqrt{t^2+1}$

(n) $f(t) = t^3 e^{\sin(t)}$

(o) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

(p) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

(q) $y(x) = e^{\pi} + x^{\pi}$

(r) $y(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$

(s) $f(x) = \dfrac{x^2+a^2}{x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$

# Sauriez-vous comment simplifier cette expression ?

$$C = 2\pi r \cdot \frac{60 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} \cdot 100 + 4\pi r^2 \cdot 200$$

$$= \frac{800\left(2\pi r^3 + 45\right)}{3r}$$

**Participez à**

**Atelier 2 : Les fractions et les exposants**
**Atelier 3 : La simplification d'expressions algébriques**

SAVARD G., MICHAUD R. et BORDELEAU A., MAT145 Calcul différentiel et intégral : Notes de cours, 1re partie. (Document révisé en décembre 2022), p. 144.