Atelier d’algèbre 2

MAT145

Les fractions et les exposants

Valérie Gouaillier
École de technologie supérieure
Automne 2023

Ressources en algèbre

Notes de cours en MAT144 :

PINEAU, K., GOUAILLIER, V., *MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : Notes de cours 1re partie, Mai 2022.* Disponibles en ligne sur le site du cours MAT144.

Tutorat par les pairs Nimbus offert à l'ÉTS

Aussi plusieurs sites web :

Alloprof, Khan Academy, Mathema-tic

Rappels

Opérations de base : l’addition et la multiplication

- Les manipulations permettant de simplifier des expressions algébriques et de résoudre des équations reposent sur quelques propriétés de l’addition et de la multiplication.

- La soustraction se ramène à une addition de l’opposé et la division se ramène à une multiplication par l’inverse.

Termes et facteurs

- Les termes sont des quantités additionnées

$$\boxed{x^2} + \boxed{3xy} + \boxed{(x-4)}$$

terme terme terme

- Les facteurs sont des quantités multipliées

$$3 \cdot y \cdot (x-4)$$

facteur facteur facteur

Coefficient et exposant

Le coefficient indique le nombre d'occurrences d'un terme dans une addition.

$$4a = a + a + a + a$$

Ici, 4 est un coefficient qui indique qu'il y a 4 termes a dans l'addition.

L'exposant indique le nombre d'occurrences d'un facteur dans une multiplication.

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Ici, 4 est un exposant qui indique qu'il y a 4 facteurs a dans la multiplication.

L’opposé et l’inverse

- Chaque nombre a possède un opposé qui est $-a$.

$$a + (-a) = 0$$

- Soustraire revient à additionner l’opposé.

$$a - b = a + (-b)$$

- Chaque nombre a non nul possède un inverse qui est $1/a$.

$$a \bullet \frac{1}{a} = 1$$

- Diviser revient à multiplier par l’inverse.

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Exemple d'inverses

1) $6^{-1} = \frac{1}{6}$

2) $(x+3)^{-1} = \frac{1}{(x+3)}$ si $x \neq -3$

3) $\left(\frac{x}{2y}\right)^{-1} = \frac{2y}{x}$ si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

ATTENTION !

4) $\cancel{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1} \neq x+y}$, $(x \neq 0$ et $y \neq 0)$

Les éléments neutres

Le nombre 0 est neutre pour l'addition (additionner 0 ne change rien à la somme).

$$a + 0 = 0 + a = a$$

On peut éliminer toute quantité égale à zéro d'une somme.

$$5 + \underbrace{\cancel{2x} - \cancel{2x}}_{0} = 5$$

Le nombre 1 est neutre pour la multiplication (multiplier par 1 ne change rien au produit).

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

On peut éliminer toute quantité égale à 1 d'un produit.

$$4 \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}}}_{1} = 4$$

Distributivité et mise en évidence

Distributivité : un facteur se distribue sur des termes

$$2x \cdot (3x + 5) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot + 2 \cdot 5 \cdot x = 6x^2 + 10x$$

DÉVELOPPER

(transformer un produit en somme)

Mise en évidence : on sort un facteur commun à tous les termes

$$6x^2 + 10x = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 5 = 2x \cdot (3x + 5)$$

FACTORISER

(transformer une somme en produit)

Les fractions

Simplification et opérations sur les fractions numériques et rationnelles

Fractions : multiplication

Produit des numérateurs sur produit des dénominateurs

$$1)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

Fraction numérique

$$2)\ \frac{x}{7}\cdot\frac{(x+1)}{2}=\frac{x\cdot(x+1)}{7\cdot 2}=\frac{x^2+x}{14}$$

Fraction rationnelle
(le numérateur et le dénominateur sont des polynômes)

Fractions : simplification

Éliminer les facteurs communs au numérateur et dénominateur d'une fraction.

1) $$\frac{21}{15}=\frac{3\cdot 7}{3\cdot 5}=\underbrace{\boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}}}_{1}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

2) $$\frac{2x(x+3)}{x^2-x-12}=\frac{2x(x+3)}{(x-4)(x+3)}=\frac{2x}{(x-4)}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}}}_{1}=\frac{2x}{(x-4)}\ \text{si}\ x\neq -3$$

Fractions : division

Multiplier par l'inverse de la fraction qui est le diviseur

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{2}\cdot\frac{1-x}{x} = \frac{\cancel{x}}{2}\cdot\frac{1-x}{\cancel{x}} = \frac{1-x}{2},\ \text{si}\ \ x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

Fractions : addition et soustraction

Mettre au même dénominateur et additionner (ou soustraire) les numérateurs ensemble

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{5x}=\frac{x}{3}\cdot\underbrace{\frac{5x}{5x}}_{1}+\frac{2}{5x}\cdot\underbrace{\frac{3}{3}}_{1}=\frac{5x^2}{15x}+\frac{6}{15x}=\frac{5x^2+6}{15x}$$

Plus petit dénominateur commun

1. Factoriser les dénominateurs de toutes les fractions.
2. Écrire tous les facteurs du dénominateur de la première fraction.
3. Accoler les facteurs du deuxième dénominateur qui n'y sont pas déjà, et ainsi de suite avec les autres dénominateurs.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3} \longrightarrow \boxed{\frac{}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}}$$

Ce facteur est déjà présent dans le premier dénominateur, on ne l'écrit pas une seconde fois.

Exercice

$$\frac{1}{3x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3x}\cdot\frac{x}{x}+\frac{5}{x^2}\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\frac{x^2}{x^2} = \frac{x+15-x^2}{3x^2}$$

$$= \frac{-x^2+x+15}{3x^2}$$

déjà présent

$$\frac{\quad}{3xx}$$

puisqu'il y a déjà un facteur x, on accole l'autre facteur x du 2e dénominateur.

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.55, exercice. 2.5

2.5 Dérivez les fonctions suivantes. Donnez le résultat avec exposants positifs et dénominateur commun.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x - 80$

(b) $f(x) = x^3 + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + x$

(d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

(e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - x^4$

(g) $f(x) = \pi x^2$

(h) $f(x) = \dfrac{2}{x^4}$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^5$

(j) $f(x) = \dfrac{2 + x + 8x^3}{x^4}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}$

(l) $f(x) = x^2(2x^4 - 6x^3)$

(m) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 5}{x^2}$

(n) $f(x) = x + \pi^2$

(o) $f(x) = \dfrac{16x^8 + 6x^4 + 1}{2x^4}$

(p) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2}{x^2}$

(q) $f(x) = 10\sqrt[5]{x^6}$

(r) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

(s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$

(t) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

(u) $f(x) = \dfrac{12x^{10} - 3x^3 + 4}{4x^2}$

Les négatifs dans les fractions

Chaque signe négatif dans une fraction peut être mis en avant de la fraction, au numérateur ou au dénominateur, mais une seule fois.

$$1)\quad -\frac{5}{9}=\frac{-5}{9}=\frac{5}{-9}$$

$$2)\quad -\frac{1}{-2}=(-1)(-1)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Les fractions « à étages »

$$1)\ \frac{\frac{2}{x}+3}{\frac{1}{2x}+1}=\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{1}\cdot\frac{x}{x}}{\frac{1}{2x}+\frac{1}{1}\cdot\frac{2x}{2x}}=\frac{\frac{2+3x}{x}}{\frac{1+2x}{2x}}=\frac{2+3x}{\cancel{x}}\cdot\frac{2\cancel{x}}{1+2x}\ \overset{\text{si } x\neq 0}{=}\ \frac{4+6x}{1+2x}$$

Faire les opérations pour qu'il n'y ait qu'une seule fraction au numérateur et une seule fraction au dénominateur.

Multiplier le numérateur par l'inverse du dénominateur, simplifier et multiplier.

Exemple MAT145

$$\lim_{r\to 0^+} F(r) = \lim_{r\to 0^+}\left(\frac{K}{r^3}-\frac{C}{r^2}\right) = \lim_{r\to 0^+}\frac{K-Cr}{r^3} = \frac{K-C\cdot 0^+}{(0^+)^3} = \frac{K}{0^+} = +\infty$$

MAT145,P1 : p.32, ex. 1.18

Les exposants

Propriétés des exposants entiers et rationnels (fractionnaires)

Exposants entiers

$$\text{car } 1 = \frac{x^2}{x^2} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}} = x^{2-2} = x^0$$

1) $x^3x^2 = x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x = x^{3+2} = x^5$

5) $x^0 \overset{\text{déf}}{=} 1$, si $x \neq 0$

2) $(x^3)^2 = x^3\cdot x^3 = x^{3\times 2} = x^6$

6) $(xy)^2 = (xy)(xy) = x^2y^2$

3) $\frac{x^3}{x^2} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}} \overset{\overbrace{}^{\text{si } x\neq 0}}{=} x^{3-2} = x^1 = x$

7) $-3^2 = -9$ mais $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

4) $\frac{x^2}{x^3} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x} \overset{\overbrace{}^{\text{si } x\neq 0}}{=} x^{2-3} = x^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$

Exercices

1) $\dfrac{a^{-3}b}{a^2b^2} = \dfrac{b}{a^3a^2\,b^2} = \dfrac{b}{a^5\,b^2} = \dfrac{1\cdot \cancel{b}}{a^5 b \cancel{b}} = \dfrac{1}{a^5 b}$

ou

$\to\; = a^{-3-2}\,b^{1-2} = a^{-5}\,b^{-1} = \dfrac{1}{a^5 b}$ en appliquant les propriétés des exposants.

2) $\dfrac{9a\overbrace{(bc)^0}^{1}}{(-3ab)^2} \underset{\text{si } b\neq 0 \text{ et } c\neq 0}{=} \dfrac{9a}{(-3ab)(-3ab)} = \dfrac{\cancel{9}a}{\cancel{9}a^2b^2} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot a\,b^2} = \dfrac{1}{ab^2}$

ou

$\to\; = \dfrac{9a}{(-3ab)^2} = \dfrac{9a}{(-3)^2a^2b^2} = \dfrac{9a}{9a^2b^2} = \dfrac{9^{1-1}a^{1-2}}{b^2} = \dfrac{9^0a^{-1}}{b^2} = \dfrac{1}{ab^2}$

Exposants fractionnaires : $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

1) $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$

2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5^{1/2} \cdot 5^{1/2}$

$$= 5^{1/2 + 1/2}$$

$$= 5^1$$

$$= 5$$

ATTENTION !

$$\sqrt{\underbrace{4 \cdot x^2}_{\text{produit}}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}$$

mais

$$\cancel{\sqrt{\underbrace{4 + x^2}_{somme}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{x^2}}$$

Racines d'indices pairs et impairs

$$b \text{ est une racine } n^e \text{ de } a \text{ si } b^n = a, \text{ et on écrit } \sqrt[n]{a} = b$$

Dans les réels, la racine d'indice pair d'un nombre négatif n'existe pas.

1) $\sqrt[4]{16} = 2$

Par convention, on ne donne que la racine positive dans le cas d'une racine paire.

2) $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$

3) $\sqrt[3]{-125} = -5$

Il y a une seule racine impaire possible dans les réels.

Propriétés des exposants et des radicaux

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

*

Sur l'aide-mémoire de MAT145

* Les propriétés des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires, en autant que les racines existent.

Exercices

1) $\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{2/3} = \left(\left(\dfrac{-8}{27}\right)^{1/3}\right)^2 = \left(\left(\dfrac{(-2)^3}{3^3}\right)^{1/3}\right)^2 = \left(\dfrac{(-2)^{3/3}}{3^{3/3}}\right)^2 = \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

En travaillant avec les exposants rationnels

2) $\sqrt{\dfrac{9x}{20y^4}} = \left(\dfrac{3^2x}{2^2\cdot 5\, y^4}\right)^{1/2} = \dfrac{(3^2x)^{1/2}}{(2^2\cdot 5\cdot y^4)^{1/2}} = \dfrac{3^{2/2}x^{1/2}}{2^{2/2}5^{1/2}y^{4/2}} = \dfrac{3x^{1/2}}{2\cdot 5^{1/2}y^2}$

ou

en travaillant avec les racines

$= \dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt{20y^4}} = \dfrac{\sqrt{9}\sqrt{x}}{\sqrt{20}\sqrt{y^4}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{4\cdot 5}\, y^2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{5}\, y^2} = \dfrac{3}{2y^2}\sqrt{\dfrac{x}{5}}$

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.53, ex. 2.11

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{6x^7}{x^3} - \frac{7x^2}{x^3} + \frac{10}{x^3}\right]' \\
&= \left[6x^4 - 7x^{-1} + 10x^{-3}\right]' \\
&= \left[6x^4\right]' - \left[7x^{-1}\right]' + \left[10x^{-3}\right]' \\
&= 6[x^4]' - 7[x^{-1}]' + 10[x^{-3}]' \\
&= \boxed{6\cdot 4x^3 - 7\cdot(-1)x^{-2} + 10\cdot(-3)x^{-4}} \\
&= 24x^3 + \frac{7}{x^2} - \frac{30}{x^4}
\end{aligned}
$$

Donner la réponse finale sans exposant négatif.

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.53, ex. 2.12

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[8\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}\right]' \\
&= \left[8x^{1/2} - 5x^{1/3}\right]' \\
&= [8x^{1/2}]' - [5x^{1/3}]' \\
&= 8\,[x^{1/2}]' - 5\,[x^{1/3}]' \\
&= \boxed{8 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 5 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}$$

Expression des exposants fractionnaires sous forme de radicaux

Exemple MAT145

MAT145,P2 : p.43, exemple 4.12

N'oublions pas qu'il est parfois possible de calculer une intégrale en utilisant tout simplement des manipulations algébriques et les règles de base : aucun changement de variable n'est nécessaire. Ne nous lançons pas trop vite dans une substitution !

Ici on obtient successivement :

Il faut savoir simplifier les fractions et bien utiliser les propriétés des exposants.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+3x}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{x}}\right) dx \\
&= \int \frac{2x^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{3x}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= 2\int x^{3/2}\,dx + 3\int x^{1/2}\,dx \quad \text{(la formule 1 avec } n = \tfrac{3}{2} \text{ et } n = \tfrac{1}{2} \text{ où } u = x\text{)} \\
&= 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + C \\
&= \frac{4}{5}x^{5/2} + 2x^{3/2} + C.
\end{aligned}$$