Atelier d'algèbre 2

MAT145

Les fractions et les exposants

Valérie Gouaillier
École de technologie supérieure
Automne 2023
Présenté par Kathleen Pineau

Ressources en algèbre

Notes de cours en MAT144 :

PINEAU, K., GOUAILLIER, V., *MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : Notes de cours 1re partie, Mai 2022.* Disponibles en ligne sur le site du cours MAT144.

Tutorat par les pairs Nimbus offert à l'ÉTS

Aussi plusieurs sites web :

Alloprof, Khan Academy, Mathema-tic

RAPPEL Ordre de priorité des opérations

Sauriez-vous comment simplifier cette expression ?

$$C = 2\pi r \cdot \frac{60 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} \cdot 100 + 4\pi r^2 \cdot 200$$

$$= \frac{800\left(2\pi r^3 + 45\right)}{3r}$$

SAVARD G., MICHAUD R. et BORDELEAU A., MAT145 Calcul différentiel et intégral : Notes de cours, 1re partie. (Document révisé en décembre 2022), p. 144.

Les fractions

Simplification et opérations sur les fractions numériques et rationnelles

Fractions : multiplication

Produit des numérateurs sur produit des dénominateurs

1) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

Fraction numérique

2) $\frac{x}{7} \cdot \frac{(x+1)}{2} = \frac{x \cdot (x+1)}{7 \cdot 2} = \frac{x^2 + x}{14}$

Fraction rationnelle
(le numérateur et le dénominateur sont des polynômes)

Fractions : simplification

Éliminer les facteurs communs au numérateur et dénominateur d'une fraction.

1) $$\frac{21}{15}=\frac{3\cdot 7}{3\cdot 5}=\underbrace{\boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}}}_{1}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

2) $$\frac{2x(x+3)}{x^2-x-12}=\frac{2x(x+3)}{(x-4)(x+3)}=\frac{2x}{(x-4)}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}}}_{1}=\frac{2x}{(x-4)}\ \text{si}\ x\neq -3$$

Fractions : division

Multiplier par l'inverse de la fraction qui est le diviseur

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{\cancel{x}}{2} \cdot \frac{1-x}{\cancel{x}} = \frac{1-x}{2}, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

Fractions : addition et soustraction

Mettre au même dénominateur et additionner (ou soustraire) les numérateurs ensemble

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{5x}=\frac{x}{3}\cdot\underbrace{\frac{5x}{5x}}_{1}+\frac{2}{5x}\cdot\underbrace{\frac{3}{3}}_{1}=\frac{5x^2}{15x}+\frac{6}{15x}=\frac{5x^2+6}{15x}$$

Plus petit dénominateur commun

1. Factoriser les dénominateurs de toutes les fractions.
2. Écrire tous les facteurs du dénominateur de la première fraction.
3. Accoler les facteurs du deuxième dénominateur qui n'y sont pas déjà, et ainsi de suite avec les autres dénominateurs.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3} \longrightarrow \boxed{\frac{}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}}$$

Ce facteur est déjà présent dans le premier dénominateur, on ne l'écrit pas une seconde fois.

Exercice

$$\frac{1}{3x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{3}$$

Les négatifs dans les fractions

Chaque signe négatif dans une fraction peut être mis en avant de la fraction, au numérateur ou au dénominateur, mais une seule fois.

$$1)\quad -\frac{5}{9} = \frac{-5}{9} = \frac{5}{-9}$$

$$2)\quad -\frac{1}{-2} = (-1)(-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemple MAT145

$$\lim_{r\to 0^+} F(r) = \lim_{r\to 0^+}\left(\frac{K}{r^3}-\frac{C}{r^2}\right) = \lim_{r\to 0^+}\frac{K-Cr}{r^3} = \frac{K-C\cdot 0^+}{(0^+)^3} = \frac{K}{0^+} = +\infty$$

MAT145,P1 : p.32, ex. 1.18

Les exposants

Propriétés des exposants entiers et rationnels (fractionnaires)

Exposants entiers

$$1)\ x^3x^2 = x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x = x^{3+2} = x^5$$

$$5)\ x^0 \overset{\text{déf}}{=} 1\text{ , si } x \neq 0$$

$$2)\ (x^3)^2 = x^3\cdot x^3 = x^{3\cdot 2} = x^6$$

$$6)\ (xy)^2 = (xy)(xy) = x^2y^2$$

$$3)\ \frac{x^3}{x^2} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}} \overset{\overbrace{\text{si } x\neq 0}}{=} x^{3-2} = x^1 = x$$

$$7)\ -3^2 = -9 \ \text{ mais } \ (-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

$$4)\ \frac{x^2}{x^3} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x} \overset{\overbrace{\text{si } x\neq 0}}{=} x^{2-3} = x^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{x},\ \text{si } x \neq 0$$

Exercices

1) $\dfrac{a^{-3}b}{a^2b^2}$

2) $\dfrac{9a\left(bc\right)^0}{\left(-3ab\right)^2}$

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.53, ex. 2.11

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{6x^7}{x^3} - \frac{7x^2}{x^3} + \frac{10}{x^3}\right]' \\
&= [6x^4 - 7x^{-1} + 10x^{-3}]' \\
&= [6x^4]' - [7x^{-1}]' + [10x^{-3}]' \\
&= 6[x^4]' - 7[x^{-1}]' + 10[x^{-3}]' \\
&= \boxed{6\cdot 4x^3 - 7\cdot(-1)x^{-2} + 10\cdot(-3)x^{-4}} \\
&= 24x^3 + \frac{7}{x^2} - \frac{30}{x^4}
\end{aligned}
$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$

Donner la réponse finale sans exposant négatif.

Exposants fractionnaires : $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

1) $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$

2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5^{1/2} \cdot 5^{1/2}$

$= 5^{1/2 + 1/2}$

$= 5^1$

$= 5$

ATTENTION !

$$\sqrt{\underbrace{4 \cdot x^2}_{\text{produit}}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}$$

mais

$$\sqrt{\underbrace{4 + x^2}_{somme}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{x^2}$$

Racines d'indices pairs et impairs

b est une racine n^e de a si $b^n = a$, et on écrit $\sqrt[n]{a} = b$

Dans les réels, la racine d'indice pair d'un nombre négatif n'existe pas.

1) $\sqrt[4]{16} = 2$

Par convention, on ne donne que la racine positive dans le cas d'une racine paire.

2) $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$

3) $\sqrt[3]{-125} = -5$

Il y a une seule racine impaire possible dans les réels.

Propriétés des exposants et des radicaux

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a\,b)^n = a^n\, b^n \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$* \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\ \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Sur l’aide-mémoire de MAT145

* Les propriétés des exposants entiers s’appliquent aux exposants fractionnaires, en autant que les racines existent.

Exercices

1) $\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{2/3}$

2) $\sqrt{\dfrac{9x}{20y^4}}$

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.53, ex. 2.12

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[8\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}\right]' \\
&= \left[8x^{1/2} - 5x^{1/3}\right]' \\
&= [8x^{1/2}]' - [5x^{1/3}]' \\
&= 8\,[x^{1/2}]' - 5\,[x^{1/3}]' \\
&= \boxed{8 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 5 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}
$$

Expression des exposants fractionnaires sous forme de radicaux

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.55, exercice. 2.5

2.5 Dérivez les fonctions suivantes. Donnez le résultat avec exposants positifs et dénominateur commun.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x - 80$

(b) $f(x) = x^3 + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + x$

(d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

(e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - x^4$

(g) $f(x) = \pi x^2$

(h) $f(x) = \dfrac{2}{x^4}$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^5$

(j) $f(x) = \dfrac{2 + x + 8x^3}{x^4}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}$

(l) $f(x) = x^2(2x^4 - 6x^3)$

(m) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 5}{x^2}$

(n) $f(x) = x + \pi^2$

(o) $f(x) = \dfrac{16x^8 + 6x^4 + 1}{2x^4}$

(p) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2}{x^2}$

(q) $f(x) = 10\sqrt[5]{x^6}$

(r) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

(s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$

(t) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

(u) $f(x) = \dfrac{12x^{10} - 3x^3 + 4}{4x^2}$