Atelier d'algèbre 3

MAT145

Simplification des expressions algébriques

Valérie Gouaillier
École de technologie supérieure
Automne 2023
Présenté par Kathleen Pineau

Ressources en algèbre

Notes de cours en MAT144 :

PINEAU, K., GOUAILLIER, V., *MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : Notes de cours 1re partie, Mai 2022.* Disponibles en ligne sur le site du cours MAT144.

Tutorat par les pairs Nimbus offert à l'ÉTS

Aussi plusieurs sites web :

Alloprof, Khan Academy, Mathema-tic

Simplifier une expression algébrique

- Simplifier une expression algébrique signifie l’écrire sous une forme plus compacte ou efficace. Il faut donc éliminer les éléments superflus de l’expression.

- En principe, on donne en réponse l’expression algébrique sous sa forme la plus simple.

1er principe : la réduction des termes

Additionner les termes semblables (parfois, il faut développer l'expression pour pouvoir le faire)

Les dernières opérations sont des additions ou soustractions

$$2x+4(x-1)-3x\cdot 5$$

$$=2x+4x+(-4)+(-15x)$$

$$=2x+4x+(-15x)+(-4)$$

$$=-9x+(-4)$$

2^e principe : simplification des fractions

Attention ! Le numérateur et le dénominateur doivent être factorisés. Sinon, il faut les factoriser. S'il n'y a plus de facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur, la fraction est irréductible.

1) $$\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}=\frac{x}{x+1},\ \text{si } x\neq 1$$

2) $$\frac{4x^3+5}{2x+1}$$

La dernière opération au numérateur et dénominateur est une addition. Il n'est pas possible de les factoriser pour qu'il y ait des facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur, alors la fraction est irréductible.

2e principe : simplification des fractions (suite)

Attention aux fractions « à étages » ! S'assurer que le numérateur et dénominateur ne contiennent pas de fraction.

$$\frac{\frac{1}{x}+3}{3x+1}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{1}\cdot\frac{x}{x}}{3x+1}=\frac{\frac{1+3x}{x}}{3x+1}$$

Ramener le numérateur à une seule fraction.

$$=\frac{\frac{1+3x}{x}}{3x+1}=\frac{\cancel{1+3x}}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{3x+1}}=\frac{1}{x},\ \text{si } x\neq -1/3$$

Diviser par $3x+1$ revient à multiplier par son inverse, puis simplifier.

3e principe : regroupement des facteurs

Écrire le produit de facteurs identiques avec un seul exposant.

$$ab^2 \cdot a - ab^2 \cdot b$$

$$= ab^2 \cdot a - ab^2 \cdot b$$

$$= a^2b^2 - ab^3$$

Les unités des grandeurs physiques se simplifient comme des nombres

$\boxed{\text{Ex}}$ On veut convertir $2\,cm^3$ en litres

$1\,cm^3 = 1\,mL$

$$\frac{\cancel{2}^{1}\,\cancel{cm^3}}{} \times \frac{1\,\cancel{mL}}{1\,\cancel{cm^3}} \times \frac{1\,L}{\underset{500}{\cancel{1000}}\,\cancel{mL}} = \frac{1}{500}\,L = 0{,}002\,L$$

$\boxed{\text{Ex}}$ En physique

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10\,m/s - 5\,m/s}{5\,s} = \frac{\cancel{5}\,m/s}{\cancel{5}\,s} = 1\,\frac{m/s}{s} = 1\,\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$= 1\,\frac{m}{s^2}$$

Autres conventions de simplification (1)

- Pas de puissance n sous une racine n^e

$$\sqrt{72x^4} = \sqrt{36 \cdot 2x^4} = \sqrt{6^2 \cdot 2x^4} = \sqrt{6^2}\sqrt{2}\sqrt{x^4} = 6\sqrt{2}x^2$$

- Pas de racines au dénominateur d'une fraction (rationaliser)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Pas d'exposants négatifs en réponse

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} - 3x^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} - 3\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^{1/2}} - \frac{3}{x^2}$$

Autres conventions de simplification (2)

- Forme factorisée ou développée ? Selon les besoins.

Détermination des valeurs critiques de f et f' : Puisque

MAT145, P1, p.139

$$f'(x) = \frac{-\left(3x^2+16x-12\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^2} = \frac{-(x+6)(3x-2)}{(x-4)^2(x+1)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x=-6 \text{ ou } x=\frac{2}{3} \\ \nexists & \text{si } x=4 \text{ ou } x=-1 \end{cases}$$

- Mise au même dénominateur ? Selon les besoins.

$$\frac{d}{dx}\left((x+5)\cdot(x-3)^{\frac{2}{3}}\right) = (x-3)^{\frac{2}{3}} + \frac{2\cdot x}{3\cdot(x-3)^{\frac{1}{3}}} + \frac{10}{3\cdot(x-3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5\cdot x+1}{3\cdot(x-3)^{\frac{1}{3}}}$$

Exemples

$$1) -5+2x-(x-7) = -5+2x-x+7 = x+2$$

Somme et soustraction : réduction des termes

$$2)\ \frac{4(x-5)^2}{16(x-5)} = \frac{\cancel{4}(x-5)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\cdot 4\cdot \cancel{(x-5)}} = \frac{x-5}{4},\ \text{si } x \neq 5$$

Fraction : numérateur et dénominateur factorisés, on élimine les facteurs communs

Exemples

$$3)\ \frac{5(x-2)+10(x-2)^2}{20(x-2)} = \frac{5(x-2)\big(1+2(x-2)\big)}{20(x-2)}$$

Fraction : numérateur non factorisé, on le factorise et on élimine les facteurs communs

$$= \frac{\cancel{5}\ \cancel{(x-2)}\ \big(1+2(x-2)\big)}{\cancel{5}\cdot 4\cdot \cancel{(x-2)}}$$

Réduire les termes au numérateur

$$= \frac{\big(1+2(x-2)\big)}{4} = \frac{2x-3}{4}$$

Exemples

$$4)\ \frac{2x}{\frac{4}{9}} = \frac{2x}{1}\cdot\frac{9}{4} = \frac{\cancel{2}x}{1}\cdot\frac{9}{\cancel{2}\cdot 2} = \frac{9x}{2}$$

Fraction à étages : ici, aucune opération à faire au numérateur et dénominateur, donc multiplier par l'inverse du dénominateur.

Simplification possible ?

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$

4) $\sqrt{x^2-4}$

2) $\dfrac{3x^2-x^4}{x^2}$

5) $\dfrac{3x^2}{x^2}$

3) $\dfrac{x^2+4}{x+2}$

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.86, exemple 2.24

$$f'(x) \quad = \quad \left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]'$$