ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

Le génie pour l'industrie

Algèbre linéaire et géométrie de l'espace

MAT 472

PARTIE 1

Par
El Mostapha FRIH Ph.D.

Rédigé en mars 2023

Table des matières

Chapitre 1

Géométrie de l'espace

1.1 Repère cartésien et coordonnées

Dans ce cours, on appellera repère cartésien la donnée de trois droites perpendiculaires qui se rencontrent en un point qu'on appellera l'origine. Chacune des droites est appelée un axe et chaque axe représente les nombres réels. Les axes sont appelés axe des x, axe des y et axe des z. Ce repère est orienté positivement : si on enroule la main droite en allant de l'axe des x vers l'axe des y, le pouce indiquera l'axe des z. L'espace est divisé en huit octants et l'espace sera noté $\mathbb{R}^3$.
Une fois un repère choisi, chaque point de l'espace est repéré par trois nombres réels comme illustré ci-dessous :

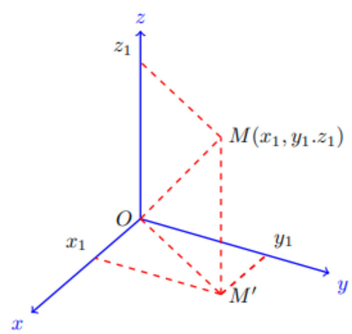


FIGURE 1.1 – Coordonnées d'un point

Les réels x_1, y_1 et z_1 sont les coordonnées du point M et on écrit $M(x_1, y_1, z_1)$. Le point $M'(x_1, y_1, 0)$ est le point obtenu par la projection orthogonale de M sur le plan xy.
Les coordonnées ne mesurent pas les distances du point aux plans de coordonnées. La distance par exemple d'un point $M(x, y, z)$ au plan xy n'est pas z mais $|z|$.

Question : Que représente chacune des équations suivantes en 3 dimensions :

a) $z = 2$

b) $y = 0$

c) $x = 1$

Solution :

a) L'équation $z = 2$ est une équation qui représente l'ensemble de points $\{(x, y, z) | z = 2\}$ qui est le plan parallèle au plan des xy (i.e. horizontal) et qui passe par le point $(0, 0, 2)$.

b) L'équation $y = 0$ est le plan des xz.

c) L'équation $x = 1$ est le plan parallèle au plan des yz et qui passe par le point $(1, 0, 0)$.

Distance entre deux points et applications

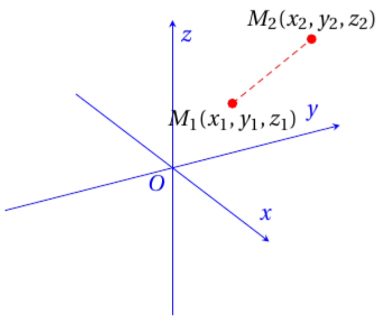


FIGURE 1.2 – Distance entre deux points

La distance entre M_1 et M_2 est $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ et ceci est une conséquence du théorème de Pythagore.

On montre facilement que le mileu du segment M_1M_2 où $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est le point :

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Question : Caractérisez les points de la sphère centrée au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R.

Réponse :

Tout simplement la sphère cherchée est :

$$\begin{aligned}\{(x, y, z) \,|\, \text{distance de } (x, y, z) \text{ au centre est } R\} &= \left\{(x, y, z) \,|\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R\right\} \\ &= \{(x, y, z) \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}.\end{aligned}$$

On dira simplement que l'équation cartésienne de la sphère est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Question : Donnez l'équation de la sphère centrée au point $(1, -2, 3)$ et de rayon 4.

Réponse :

On utilise la formule précédente et on obtient $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$.

Question : Donnez le centre et le rayon de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$.

Réponse :

On écrit l'équation en complétant le carré

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9.$$

La sphère est donc centrée en $(2, -1, 0)$ et de rayon 3.

1.2 Vecteurs

Certaines quantités sont représentées par des nombres par exemple une aire, un volume ou une masse, on les appelle des scalaires. D'autres quantités comme la vitesse, la force ou le champ magnétique ont des grandeurs, des directions et des sens, on les appelle des vecteurs.
La direction est définie comme étant une propriété que possèdent toutes les droites qui sont parallèles à une droite donnée. Une fois la direction choisie, il y a deux sens possibles. Un segment orienté est un segment AB qui a une grandeur, une direction et un sens. Deux segments orientés qui sont parallèles, de même sens et de même grandeur (ou norme) sont considérés équivalents. Un vecteur $\vec{u}$ est donc un ensemble de segments orientés équivalents (classe d'équivalence) et chaque segment orienté de cet ensemble est dit un représentant du vecteur. On notera un vecteur par $\vec{u}$ et aussi par $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ avec les segments orientés AB et CD équivalents. Ils sont des représentants de la classe d'équivalence. En tout point, un vecteur a un représentant unique qui commence en ce point.

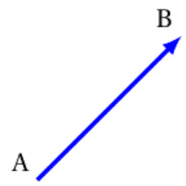


FIGURE 1.3 – Vecteur $\vec{AB}$

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc équivalents revient à dire que la figure ABDC est un parallélogramme qui peut être applati lorsque les points sont alignés. Une autre caractérisation qui servira à prouver certains faits est que les segments AD et BC ont le même milieu.

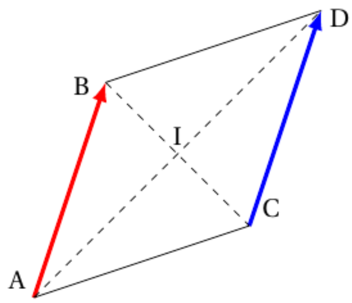


FIGURE 1.4 – Équivalence de 2 segments orientés

Le vecteur nul sera noté $\vec{0}$ et il est représenté par tout segment AA.

Dans la figure suivante, les segments orientés sont équivalents et représentent le même vecteur.

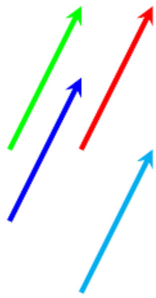


FIGURE 1.5 – Équivalence de segments orientés

Somme de vecteurs

Pour définir la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on considère un représentant du vecteur $\vec{u}$ disons $\overrightarrow{AB}$ et on sait qu'il existe un repésentant unique de $\vec{v}$ de point initial B, disons $\overrightarrow{BC}$. On définit la somme de deux vecteurs par la relation communément dite de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. On montre facilement que si on choisit un autre représentant de $\vec{u}$, on obtient un vecteur équivalent à $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur obtenu $\overrightarrow{AC}$ servira donc de représentant à $\vec{u}+\vec{v}$.

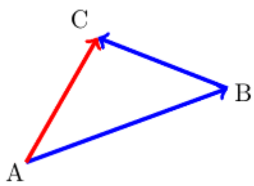


FIGURE 1.6 – Relation de Chasles

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on peut les mettre dans une des situations suivantes afin de définir la somme de deux vecteurs.

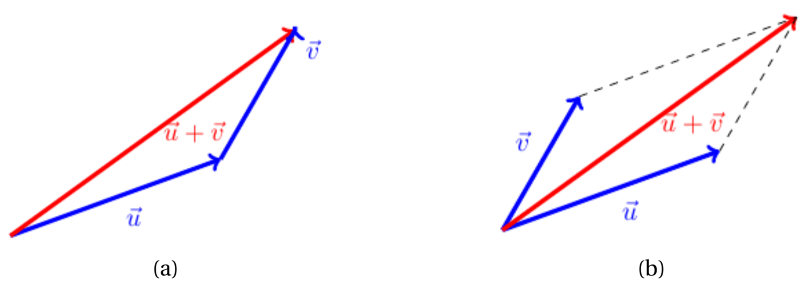


FIGURE 1.7 – Somme de deux vecteurs

Vecteur opposé

Deux vecteurs dont la somme est le vecteur nul sont dits opposés. Un vecteur et son opposé ont la même grandeur, la même direction mais des sens opposés. Le vecteur opposé de $\vec{u}$ sera noté $-\vec{u}$. Le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient α est un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur. On choisit un représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et on définit $\alpha\overrightarrow{AB}$ comme étant le vecteur ayant la même direction que $\overrightarrow{AB}$, le même sens si $\alpha > 0$, le sens contraire si $\alpha < 0$ et de grandeur $|\alpha|$ fois la grandeur de $\overrightarrow{AB}$. Il est aisé de voir que $\alpha\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas du représentant choisi et permet de définirt $\alpha\vec{u}$ comme étant l'ensenble des vecteurs équivalents à $\alpha\overrightarrow{AB}$.

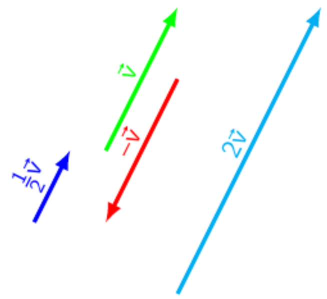


FIGURE 1.8 – Multiplication d'un vecteur par un nombre

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéairres (linéairement dépendants) si $\vec{v} = k\vec{u}$ où k est un scalaire.
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, être colinéaires équivaut à être parallèles.
Le vecteur $(-1)\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ et on notera aussi $\vec{u} + (-\vec{v})$ par $\vec{u} - \vec{v}$. Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est illustré ci-dessous.

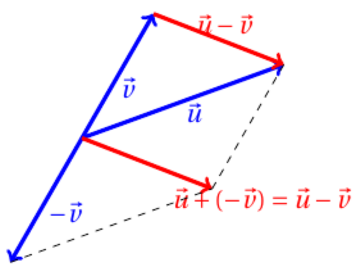


FIGURE 1.9 – Vecteur $\vec{u} - \vec{v}$

Propriétés

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et si α et β sont des scalaires, alors :

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
5. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
6. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
7. $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$
8. $1\vec{u}=\vec{u}$

Composantes d'un vecteur

On considère les points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$. On a vu que $\overrightarrow{AB}$ est équivalent à $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si les milieux des segments AD et BC sont confondus. Ceci se traduit par :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A+x_D}{2}=\dfrac{x_B+x_C}{2} \\ \dfrac{y_A+y_D}{2}=\dfrac{y_B+y_C}{2} \\ \dfrac{z_A+z_D}{2}=\dfrac{z_B+z_C}{2} \end{cases}$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} x_D-x_C=x_B-x_A \\ y_D-y_C=y_B-y_A \\ z_D-z_C=z_B-z_A \end{cases}$$

On définit alors les composantes de $\overrightarrow{AB}$ comme étant $(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$. Comme ces trois nombres sont les mêmes pour tous les vecteurs équivalents, on définit les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ comme étant les composantes d'un de ses représentants. Si on choisit comme représentant celui qui commence à l'origine et finit en un point $M(x_1, y_1, z_1)$, les composantes du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M et on écrit $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1)$ dans le repère utilisé.

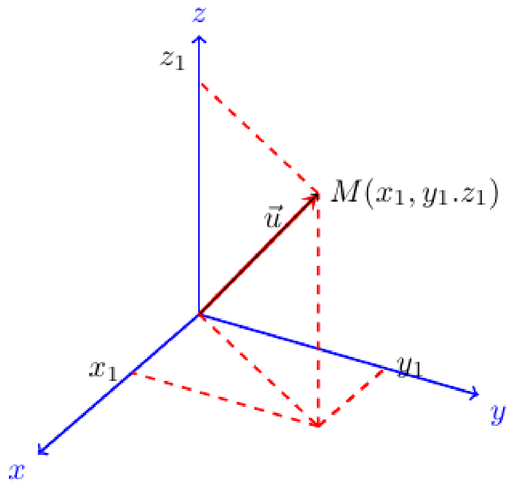


FIGURE 1.10 – Composantes d'un vecteur

Forme algébrique de la somme de vecteurs et du produit par un scalaire

On prend deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qu'on dispose en forme de parallélogramme et en utlisant le fait que les diagonales ont le même milieu, on montre facilement que si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

On montre aussi facilement que si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et α est un nombre réel alors :

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3).$$

Norme d'un vecteur

La grandeur ou norme d'un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Question : Donnez la norme du vecteur $(1, -2, 3)$.
Réponse :

$$\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

On montre de façon algébrique que :

$$\begin{aligned} \|\ \alpha\vec{u}\| &= \sqrt{(\alpha u_1)^2 + (\alpha u_2)^2 + (\alpha u_3)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \\ &= |\alpha|\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= |\alpha|\|\vec{u}\|. \end{aligned}$$

Vecteur unitaire

Un vecteur est dit unitaire si sa norme est égale à 1. Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul alors le vecteur $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire de même sens que $\vec{u}$ et $-\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire de sens contraire à $\vec{u}$.

Vecteurs de base

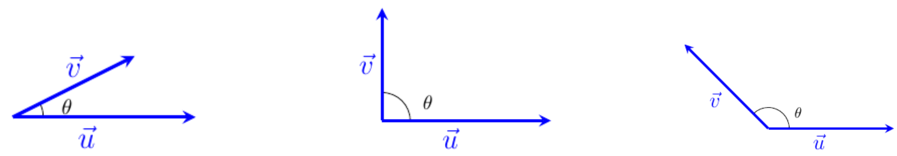
Les vecteurs $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ et $\vec{k} = (0,0,1)$ forment une base de l'espace :
Tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, à savoir $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$.

1.3 Produit scalaire

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et notons par θ l'angle entre ces deux vecteurs et qui est entre 0 et π radians. Le produit scalaire est le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Si l'un des vecteurs est nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Le produit scalaire est un nombre qui représente en physique le travail d'une force.



(a) $\theta < 90°$, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$. (b) $\theta = 90°$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. (c) $\theta > 90°$, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

FIGURE 1.11 – Signe du produit scalaire en fonction de l'angle

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Autre formule du produit scalaire

Il a été démontré que si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Question : Donnez l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (1,-1,2)$ et $\vec{v} = (-3,1,0)$.
Réponse :
On utilise la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(-3) + (-1)(1) + (2)(0) = -4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$, on obtient :

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{60}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{60}}\right) \approx 121°$$

Question : Donnez un vecteur orthogonal au vecteur $(1,-2,3)$.
Réponse :
Il suffit de trouver un vecteur telque son produit scalaire avec $(1,-2,3)$ soit nul comme par exemple $(2,1,0)$.
Question : Donnez la condition qui doit être satisfaite par les composantes d'un vecteur (x,y,z) afin que celui-ci soit orthogonal au vecteur $(1,-2,3)$.
Réponse :
Le produit scalaire doit être nul et donc $(x,y,z)\cdot(1,-2,3) = x-2y+3z = 0$.

Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et α un scalaire alors :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Projection vectorielle

Soit $\vec{u}\neq\vec{0}$, on va donner la formule qui donne le vecteur projection d'un vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$.

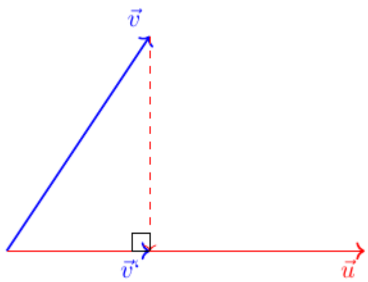


FIGURE 1.12 –
Le vecteur $\vec{v}$' est le vecteur projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

La grandeur (algébrique) du vecteur projection est $\|\vec{v}\|\cos\theta$. Le vecteur projection est égal à cette grandeur fois le vecteur unitaire qui est de même sens que $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\text{Projection de } \vec{v} \text{ sur } \vec{u} &= \|\vec{v}\|\cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\\ &= (\vec{u}\cdot\vec{v})\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\end{aligned}$$

Question : Donnez la projection du vecteur $\vec{v} = (1,2,-3)$ sur le vecteur $\vec{u} = (2,1,5)$

Réponse :

On utlise la formule

$$\text{Projection de } \vec{v} \text{ sur } \vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \text{ où } \vec{v} = (1,2,-3) \text{ et } \vec{u} = (2,1,5))$$

Comme $\vec{u}\cdot\vec{v} = -11$ et $\|\vec{u}\|^2 = 30$, on obtient :

$$\text{Projection de } \vec{v} \text{ sur } \vec{u} = -\frac{11}{30}(2,1,5) = (-\frac{11}{15}, -\frac{11}{30}, -\frac{11}{6})$$

1.4 Produit vectoriel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soit θ ou $0 \leq \theta \leq \pi$ l'angle entre les deux. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

- Sa grandeur est égale à $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$,
- Il est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
- Son sens est donné par la règle de la main droite : si on enroule la main droite en allant de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ en suivant l'angle θ, le pouce indiquera le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on conviendra que $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

Propriétés du produit vectoriel

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et α un scalaire alors :

1. $\vec{u}\wedge\vec{u} = \vec{0}$
2. $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$
3. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
4. $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{w})$

Deux vecteurs non nuls sont parallèles si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Il s'en suit que deux vecteurs non nuls sont parallèles si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

Question : Calculez $\vec{i}\wedge\vec{j}$.

Réponse :

$$\|\vec{i}\wedge\vec{j}\| = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

et comme le vecteur $\vec{i}\wedge\vec{j}$ est de même sens que $\vec{k}$, on en déduit que $\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$.

Formule analytique du produit vectoriel

Si $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ et $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$, on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2).$$

Question : Calculez le produit vectoriel de $\vec{u} = (1,2,-3)$ et $\vec{v} = (0,1,5)$.

Réponse :

On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (10+3, 0-5, 1-0)\\ &= (13, -5, 1).\end{aligned}$$

Aire d'un parallélogramme

On sait que l'aire A est égale à la base fois la hauteur. La base est $\|\vec{a}\|$ et la hauteut est $h = \|\vec{b}\| \sin\theta$. On a donc :

$$\begin{aligned}A &= \|\vec{a}\| h\\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta\\ &= ||\vec{a} \wedge \vec{b}||.\end{aligned}$$

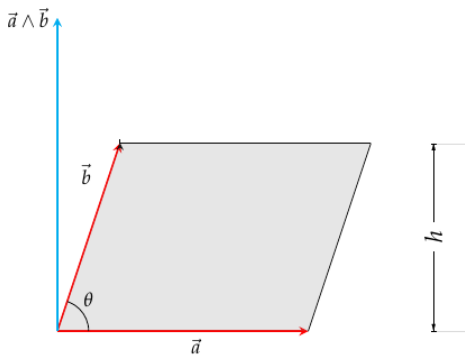


FIGURE 1.13 – Aire du parallélogramme

Volume d'un parallélépipède

Le volume d'un parallélépipède est l'aire de la base qui est $||\vec{a} \wedge \vec{b}||$ fois la hauteur qui est $h = \|\vec{c}\| |\cos\theta|$.

$$\begin{aligned}V &= ||\vec{a} \wedge \vec{b}|| h\\ &= ||\vec{a} \wedge \vec{b}|| ||\vec{c}|| |\cos\theta| = |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}|.\end{aligned}$$

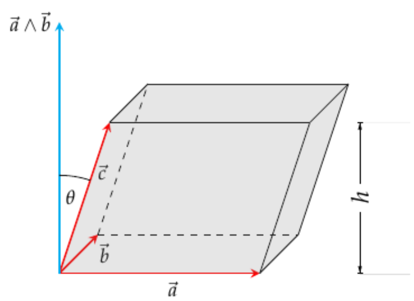


FIGURE 1.14 – Volume du parallélépipède

1.5 Droites et plans dans l'espace

1.5.1 Droites dans l'espace

Équations paramétriques d'une droite

On considère une droite (D) qui passe par un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et qui est parallèle à un vecteur donné $\vec{v} = (a, b, c)$.

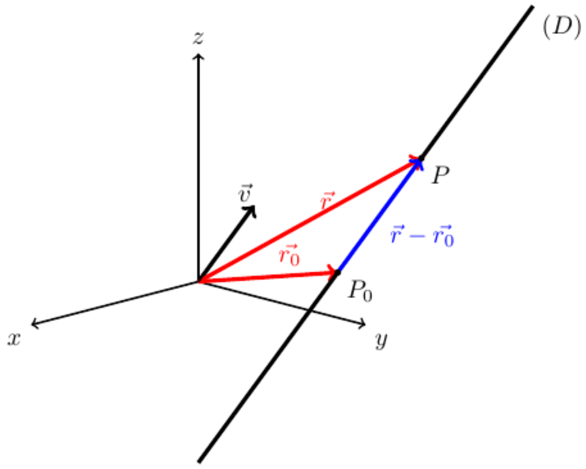


FIGURE 1.15 – Droite passant par un point et parallèle à un vecteur

Un point $P(x, y, z)$ appartient à la droite (D) si et seulement si le vecteur $\vec{r} - \vec{r_0}$ est parallèle à $\vec{v}$, ce qui revient à dire :
$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{v}$ où t est un nombre réel ou encore $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$ où t est un nombre réel.
L'équation vectorielle $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$ peut aussi s'écrire $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, ou encore $P = P_0 + t\vec{v}$, ou

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} .$$

On dit que la droite D est décrite par des équations paramétriques. Ces équations ne sont pas uniques car on peut utiliser un autre point de la droite et un autre vecteur parallèle à $\vec{v}$. Le vecteur $\vec{v}$ dans la définition est dit vecteur directeur de la droite.

Questions :

a) Donnez les équations paramétriques de la droite passant par le point $(1, -2, 3)$ et parallèle au vecteur$(2, -3, 5)$.

b) En quel point la droite de l'exemple traverse-t-elle le plan xy ?

c) Le point $(3, -4, 9)$ est-il sur la droite précédente ?

d) Le point $(3, -5, 8)$ est-il sur la droite précédente ?

e) En utilisant le point de la question précédente, donnez de nouvelles équations paramétriques de la droite et retrouvez le point où elle traverse le plan xy.

Solution

a)
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = 3+5t \end{cases}.$$

b) Le plan des xy a pour équation $z = 0$ et donc le point cherché correspond à la valeur de t pour laquelle $z = 0$. On résout $3+5t = 0$ et on obtient $t = -\frac{3}{5}$. En remplaçant par cette valeur dans les équations de la droite, le point cherché est $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0)$.

c) le système d'équations suivantes :
$$\begin{cases} 1+2t = 3 \\ -2-3t = -4 \\ 3+5t = 9 \end{cases}.$$
n'a pas de solutions. La valeur de t qui résout la première équation ne vérifie pas les autres. Le point n'est pas sur la droite.

d) le système d'équations suivantes :
$$\begin{cases} 1+2t = 3 \\ -2-3t = -5 \\ 3+5t = 8 \end{cases}.$$
a pour solution $t = 1$ et donc le point se trouve sur la droite.

e)
$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -5-3t \\ z = 8+5t \end{cases}.$$
Le point cherché correspond à la valeur de t pour laquelle $z = 0$. On résout $8+5t = 0$ et on obtient $t = -\frac{8}{5}$. En remplaçant par cette valeur dans les équations de la droite, le point cherché est $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0)$. On remarque que les équations paramétriques ne sont pas uniques mais on obtient le même point en b) et en e).

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs parallèles (colinéaires).
Deux droites dans l'espace sont dites gauches si elle ne sont ni parallèles ni concourantes (ceci n'est pas possible dans le plan).

Question : Trouvez le point de rencontre des droites suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-2t \\ z = -1-3t \end{cases} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2t \\ z = 4-t \end{cases}.$$

Solution :

Le point de rencontre de deux droites ne correspond pas souvent à la même valeur du paramètre t. Il faut donc désigner les paramètres par deux lettres différentes lors de la résolution du système d'équations.
On résout alors

$$\begin{cases} 5+t=2+s \\ 2-2t=2s \\ -1-3t=4-s \end{cases}$$

et obtient $t=-1$ et $s=2$. En remplaçant par $t=-1$ ou $s=2$, on obtient le point $(4,4,2)$.

Droite passant par deux points distincts A et B

Pour trouver des équations paramétriques, on considère la droite comme passant par exemple par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Équations symétriques d'une droite

Supposons que des équations paramétriques d'une droite sont :

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

Si a, b et c sont tous non nuls, on peut isoler t dans chaque équation et ainsi avoir :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Ces deux équations sont dites équations symétriques de la droite.

Si, par exemple, une des composantes du vecteur directeur est nulle, disons c, les équations paramétriques sont $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0 \end{cases}$. Dans ce cas, les équations symétriques sont $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ et $z=z_0$.

Si, par exemple, deux des composantes du vecteur directeur sont nulles, disons b et c, les équations paramétriques sont $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$, et dans ce cas les équations symétriques sont $y=y_0$ et $z=z_0$.

Remarque : Dans le plan, les droites ont des équations paramétriques similaires (sans le z).

1.5.2 Plans dans l'espace

Plan passant par un point et perpendiculaire à un vecteur donné

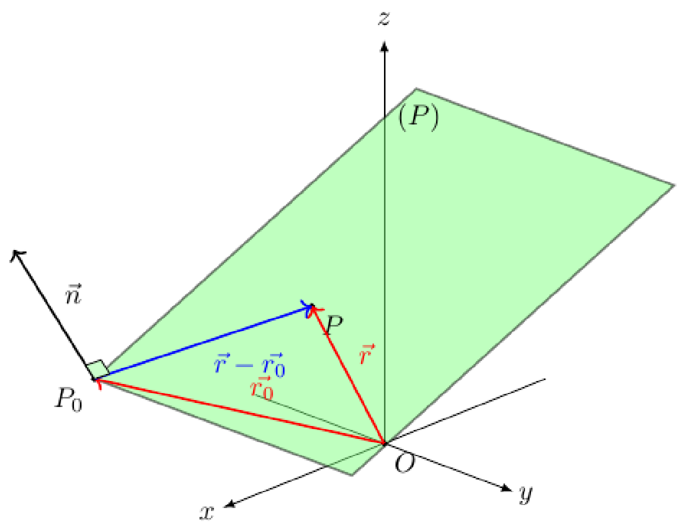


FIGURE 1.16 – Plan passant par P_0 et perpendiculaire à $\vec{n}$.

Un point $P(x, y, z)$ est sur le plan passant par P_0 et perpendiculaire à $\vec{n}$ si et seulement si $\vec{r} - \vec{r}_0$ est perpendiculaire à $\vec{n} = (a, b, c)$, et ceci équivaut à :

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

ou

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0).(a, b, c) = 0$$

ou

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Cette dernière équation est dite l'équation cartésienne du plan et on pourra l'écrire sous la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est dit vecteur normal au plan.

Remarque : Ceci nous fait penser aux équations cartésiennes des droites dans le plan $ax + by + c = 0$.

Question : Donnez l'équation du plan passant par le point $(2, -1, 3)$ et de vecteur normal $3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

Solution :

L'équation du plan en question est :

$$3(x - 2) - (y + 1) + 4(z - 3) = 0$$

$$3x - y + 4z - 19 = 0$$

Plan passant par trois points non alignés

Par trois points non alignés, A, B et C, il passe un seul plan et pour trouver son équation, on prend un des points, et pour vecteur normal, on prend $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Question : Donnez l'équation du plan passant par les points $A(2,-1,3)$, $B(0,1,5)$ et $C(4,-2,1)$.
Solution
On cherche le qui passe par A et normal au vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Comme $\overrightarrow{AB} = (-2,2,2)$, $\overrightarrow{AC} = (2,-1,-2)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-2,0,2)$. Le plan cherché a pour équation :

$$-2(x-2)+0(y+1)-2(z-3)=0$$

qu'on peut écrire :

$$x+z-5=0$$

Deux plans sont parallèles si et seulement si ils ont des vecteurs normaux parallèles (ou colinéaires).

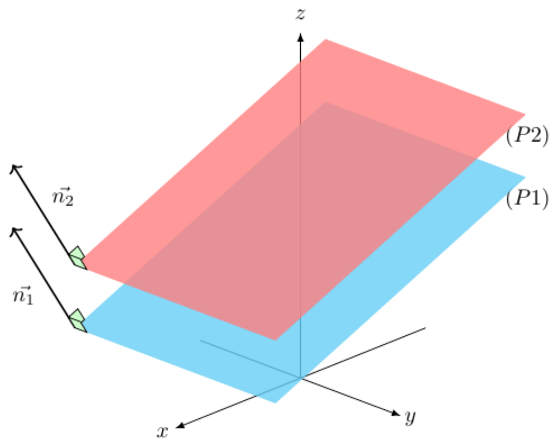


FIGURE 1.17 – Plans parallèles

Question : Les plans d'équations respectives $3x-6y+9z-1=0$ et $2x-4y+3z-4=0$ sont-ils parallèles ?
solution :
Les vecteurs normaux $(3,-6,9)$ et $(2,-4,3)$ ne sont pas colinéaires (il n y a pas de proportionnalité) et donc les plans ne sont pas parrallèles. On pourrait aussi voir que le produit vectoriel n'est pas nul (c'est plus long!).

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux perpendiculaires (i.e. leur produit scalaire est nul).

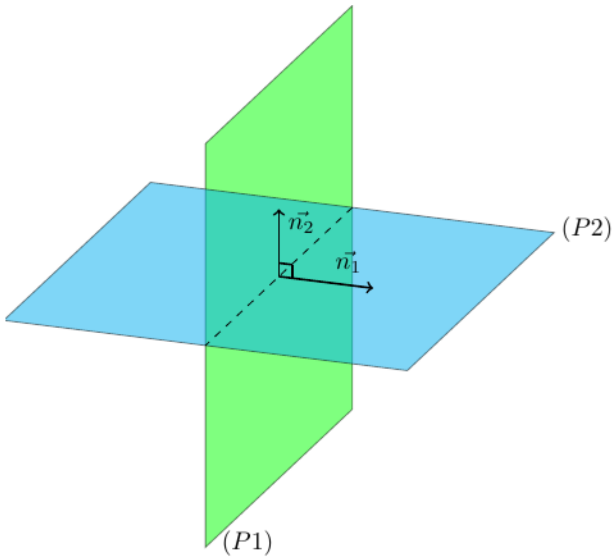


FIGURE 1.18 – Plans perpendiculaires

Question : Donnez l'équation d'un plan perpendiculaire au plan d'équation

$$2x - y + 3z + 5 = 0.$$

Solution :
On cheche un plan avec un vecteur normal perpendiculaire au vecteur $(2, -1, 3)$. On prend par exemple le vecteur $(1, -1, -1)$ (n'importe quel vecteur dont le produit scalaire avec $(2, -1, 3)$ est nul). On prendra le plan $x - y - z + 100 = 0$ (La valeur de 100 est arbitraire).

Distance d'un point à un plan

On cherche la distance d'un point $A(x_1, y_1, z_1)$ à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Pour cela choisissons un point quelconque $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan. Comme on le visualise sur la figure ci-dessous, la distance cherchée D du point A au plan est la norme du vecteur projection du vecteur $\overrightarrow{P_0A}$ sur le vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

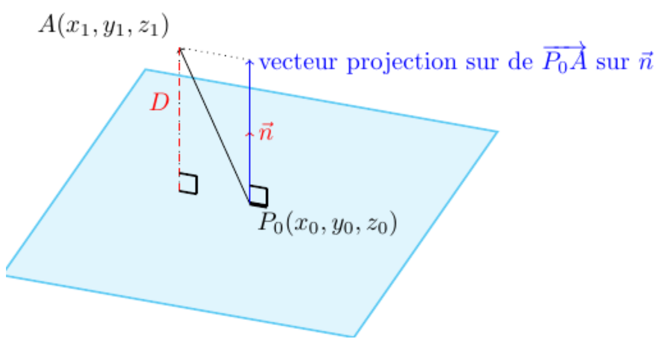


FIGURE 1.19 – Distance d'un point à un plan

Le vecteur projection est :

$$\begin{aligned}
\text{Vecteur projection de } \overrightarrow{P_0A} \text{ sur } \vec{n} &= (\overrightarrow{P_0A}\cdot\vec{n})\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||^2}\\
&= (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0).(a,b,c)\frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}\\
&= (a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0))\frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}\\
&= (ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0))\frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}\\
&= (ax_1+by_1+cz_1+d)\frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle du fait que le point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ est choisi sur le plan et donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan et ceci nous donne $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ et ainsi $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$. On voit bien que la distance ne dépend pas du choix de P_0.
La distance D du point A au plan est la norme du vecteur projection.

$$\begin{aligned}
D = ||\text{vecteur projection de } \overrightarrow{P_0A} \text{ sur } \vec{n}|| &= ||(ax_1+by_1+cz_1+d)\frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}||\\
&= |ax_1+by_1+cz_1+d|\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a^2+b^2+c^2}\\
&= \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

La formule qui donne la distance D d'un point $A(x_1, y_1, z_1)$ à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$D = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Question : Donnez la distance entre les plans parallèles d'équations respectives $3x-6y+9z-1=0$ et $x-2y+3z-2=0$
Solution :
Remarquez que les vecteurs normaux sont colinéaires et donc les plans sont parallèles. Pour calculez la distance entre les deux plans, il faut prendre un point d'un des plans et calculer la distance de ce point à l'autre plan. On choisit un point par exemple du deuxième plan en posant $y = 0$, $z = 0$ et on obtient $(2,0,0)$. On utlise la formule du cours pout trouver la distance entre le point $(2,0,0)$ et le plan $3x-6y+9z-1=0$

$$D = \frac{|3(2)-6(0)+9(0)-1|}{\sqrt{(3)^2+(-6)^2+(9)^2}} = \frac{5}{\sqrt{126}} = \frac{5\sqrt{14}}{42}$$

Question : Donnez des équations paramétriques de la droite intersection des plans d'équations respectives $x-2y+3z=5$ et $2x-y+4z=1$.
Solution :
On cherche un point sur cette droite en posant $z = 0$ et en résolvant les 2 équations pour trouver x et y. Un calcul simple donne le point $(-1,-3,0)$. Un vecteur qui donne la direction de cette droite doit être perpendiculaire à chacun des deux vecteurs normaux. Un exemple d'un tel vecteur est donné par le produit vectoriel des deux vecteurs normaux et le calcul

nous donne (-5,2,3). Des équations paramétriques de la droite cherchée est :

$$\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

1.6 Surfaces

Graphes de fonctions de deux variables

Une fonction de deux variables est une fonction qui associe à un point (x, y) d'une région du plan un nombre réel unique noté $f(x, y)$ appelé image de (x, y) par la fonction f. On écrit aussi $z = f(x, y)$.
L'ensemble des points (x, y) pour lesquels $f(x, y)$ existe est dit le domaine de f (l'ensemble des entrées possibles).

L'image de f est l'ensemble des valeurs prises par f (l'ensemble des sorties possibles).

Exemple : La fonction $f(x, y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ a pour domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ et son image est $[0, 1]$ et la fonction $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ a pour domaine $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ et son image est $]0, \infty[$.

Graphe d'une fonction de deux variables

Le graphe d'une fonction f de deux variables est $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}$. Ce graphe est un sous-ensemble de l'espace à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$.

Exemples de graphes :

Le graphe de $f(x, y) = 2$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2\}$, est un plan horizontal.

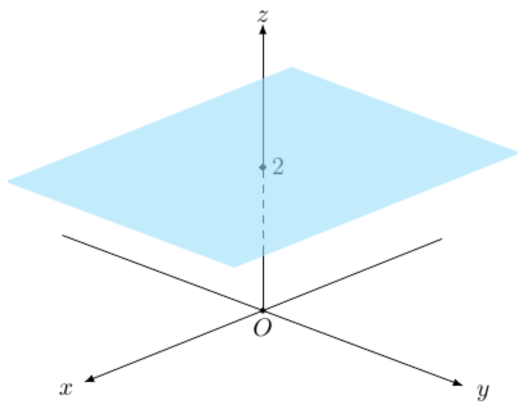


FIGURE 1.20 – Graphe de $f(x, y) = 2$.

Le graphe de $f(x, y) = 1-(x+y)$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1-(x+y)\}$ est un plan. L'équation de cette surface s'écrit $z = 1-(x+y)$ ou $x+y+z = 1$ et ceci est l'équation d'un plan. Pour dessiner ce plan, on a besoin de trois points non alignés, par exemple $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

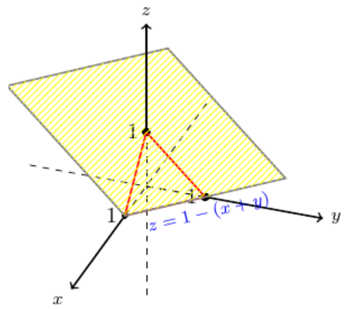


FIGURE 1.21 – $f(x, y) = 1-(x+y)$.

Courbes de niveau d'une fonction

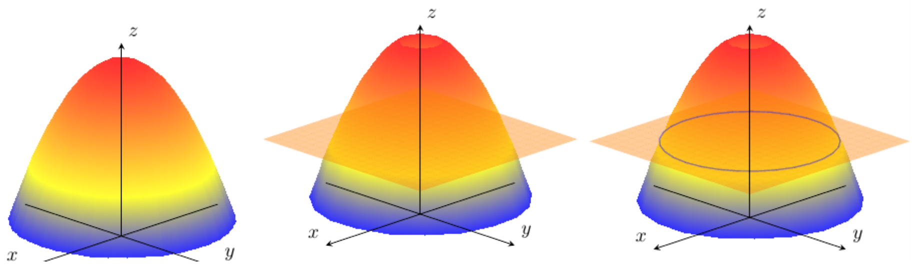
Lorsqu'on coupe la surface $z = f(x, y)$ par un plan horizontal $z = c$, on obtient une courbe dite courbe de niveau c de f.

Exemple : Graphe de $f(x, y) = 100-(x^2+y^2)$ avec $z \geq 0$

Nous allons chercher les courbes de niveau de la fonction. L'intersection du plan horizontal $z = c$ où $0 \leq c \leq 100$ avec le graphe de la fonction $z = f(x, y)$ est la courbe définie par

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 100-c \\ z = c \end{cases}$$

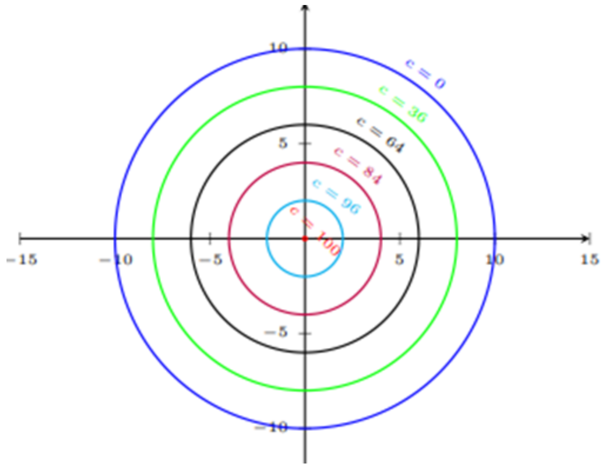
La courbe précédente est un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{100-c}$ qui se trouve sur le plan horizontal $z = c$. On peut donc voir le graphe de f comme une succession de cercles situés sur des plans horizontaux et dont le rayon varie avec la hauteur à laquelle se trouve le plan.



(a) Graphe de $f(x, y) = 100-(x^2+y^2)$. (b) Graphe de f et plan $z = c$. (c) Intersection du Graphe et du plan horizontal..

FIGURE 1.22 – Intersection du graphe et d'un plan horizontal.

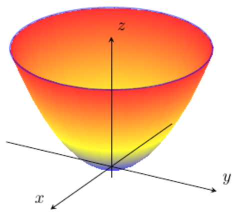
Ci-dessous, les courbes de niveaux 0, 36, 64, 84, 96 et 100 sont illustrées dans le plan xy et si on veut reconstituer le graphe de la surface en 3D, on a qu'à dessiner chaque courbe de niveau sur le plan correspondant.



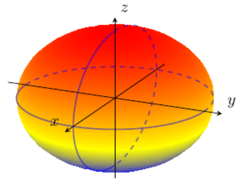
(a) Courbes de niveaux 0, 36, 64, 84, 96 et 100.

Les quadriques

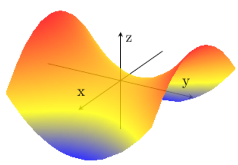
Le graphe d'une surface définie par une équation du second degré en x, y et z est dite quadrique. Ci-dessous une illustration des six types de quadriques classiques :



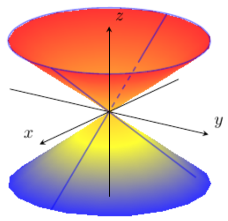
(b) Paraboloide elliptique $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.



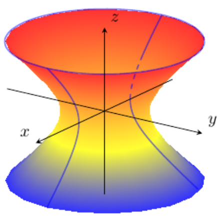
(c) Ellipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



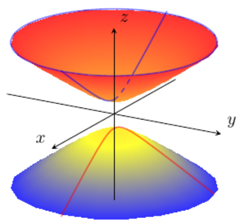
(d) Paraboloide hyperbolique $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.



(e) Cône $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.



(f) Hyperboloide-1-nappe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

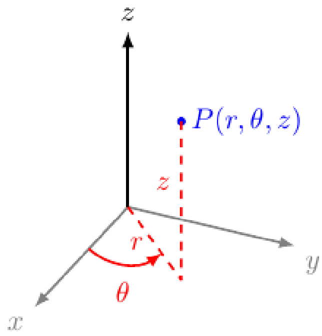


(g) Hyperboloide-2-nappes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

1.7 Coordonnées cylindriques et Coordonnées sphériques

Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad \text{où} \quad r \geq 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = z \end{cases}$$



(h) Coordonnées cylindriques.

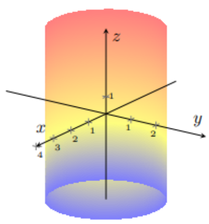
Question : Que représentent les surfaces suivantes ?

a) $r = 2$

b) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

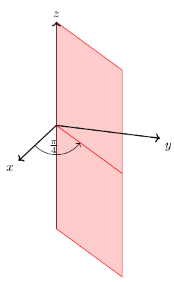
Réponse :

a) C'est l'équation du cylindre circulaire dont l'axe est l'axe z et de rayon 2



(i) Surface $r = 2$

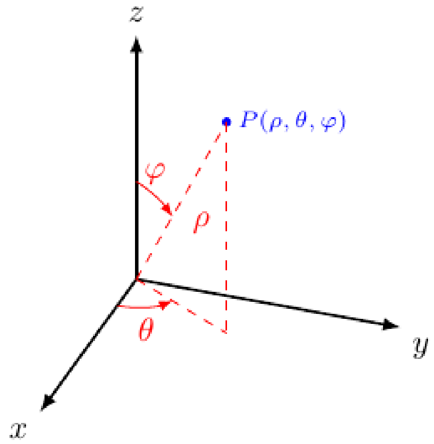
b) C'est le demi plan qui fait un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec le demi-plan xz et $x \geq 0$ (ou $\theta = 0$).



(j) Surface $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Coordonnées sphériques.

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \quad \text{où} \quad \rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$



(k) Coordonnées sphériques

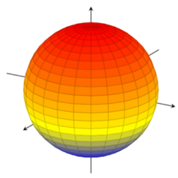
Question : Que représentent les surfaces suivantes :

a) $\rho = 3$

b) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

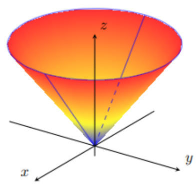
Réponse :

a) C'est l'équation de la sphère centrée à l'origine et de rayon 3.



(l) Surface $\rho = 3$

b) C'est le demi-cône qui fait un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec le demi-axe des z avec $z \geq 0$.



(m) Surface $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

1.8 Exercices

1. En calculant des distances, dites si les points $A(2,0,5)$, $B(1,2,8)$ et $C(4,-4,-1)$ sont colinéaires.
2. Donnez l'équation de la sphère centrée au point $(1,2,-4)$ et qui rencontre le plan xy en un seul point.
3. Donnez l'équation de la sphère dont les points $A(2,-4,6)$ et $B(6,-6,10)$ sont les extrémités d'un diamètre.
4. Donnez la formule de la distance d'un point (x,y,z) au plan xy.
5. Donnez la formule de la distance d'un point(x,y,z) à l'axe des z.
6. Que représente les ensembles suivants :
   a) $\{(x,y)|x=2\}$
   b) $\{(x,y,z)|z=2\}$
   c) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$
   d) $\{(x,y,z)|x^2+y^2=1\}$
   e) $\left\{(x,y,z)|z=\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$
   f) $\{(x,y,z)|x^2+y^2=1 \,\text{et}\, z=2\}$
   g) $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=4\}$
7. Calculez $3\,\vec{u}-2\,\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ si $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$
8. Pour quelle valeur de a, le vecteur $a\,\vec{i}-\frac{1}{3}\,\vec{j}+\frac{1}{3}\,\vec{k}$ est-il unitaire ?
9. Quel est le vecteur du plan obtenu si on applique au vecteur $a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ une rotation de 90 degrés autour de l'origine.
10. a) Donnez le vecteur de grandeur 6 et qui est parallèle au vecteur $2\,\vec{i}-\vec{j}+2\,\vec{k}$ et de sens contraire.
    b) Si le vecteur trouvé en a) a son point initial en (2,-1,0), quel est son point final ?
11. calculez $\vec{u}\cdot\vec{v}$ si
    a) $\|\vec{u}\|$=3 et $\|\vec{v}\|$=$\sqrt{2}$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\frac{\pi}{4}$ radians
    b) $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$
12. Montrez que $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
13. Trouvez l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si
    a) $\vec{u}=2\,\vec{i}-3\,\vec{j}$ et $\vec{v}=-\,\vec{i}+5\,\vec{j}$
    b) $\vec{u}=2\,\vec{i}+3\,\vec{j}-5\,\vec{k}$ et $\vec{v}=-3\,\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$
14. Donnez le vecteur projection du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ si
    a) $\vec{v}=4\,\vec{i}-6\,\vec{j}$ et $\vec{u}=-\,\vec{i}+\vec{j}$
    b) $\vec{v}=2\,\vec{i}+3\,\vec{j}-8\,\vec{k}$ et $\vec{u}=-\,\vec{i}+2\,\vec{j}-\vec{k}$

15. En utilisant les vecteurs, montrez que le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa grandeur est la moitié de ce dernier.
16. Soit $\vec{v} = a\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, donnez la ou les valeur(s) de a pourque $\vec{v}$
    a) soit orthogonal au vecteur $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
    b) fasse un angle de obtus avec $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
    c) soit parallèle à $2\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$
17. Les angles α, β et γ que fait un vecteur non nul $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ avec les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont dits angles directeurs et leurs cosinus sont dits cosinus directeurs.
    a) Donnez les cosinus directeurs en fonction de a, b et c.
    b) Exprimez le vecteur $\vec{u}$ en fonction de sa grandeur et de ses cosinus directeurs.
    c) Montrez que $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.
    d) Donnez les cosinus directeurs de $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
18. On considère les vecteurs $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et $\vec{f} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$. Écrivez le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ sous la forme $\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$.
19. Calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$ si
    a) $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$
    b) $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$
20. Calculez l'aire du triangle dont deux côtés mesurent 6 cm et 5 cm et font un angle de 30 degrés.
21. On considère les points $A(-2,3,5)$, $B(1,-1,7)$ et $C(0,-1,6)$.
    a) Calculez l'aire du triangle ABC.
    b) En calculant l'aire de façon élémentaire, donnez la distance entre le point C et la droite passant par A et B.
22. Montrez que $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
23. Calculez $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j})$ et concluez.
24. a) $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, peut-on dire que $\vec{v} = \vec{w}$?
    b) $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, peut-on dire que $\vec{v} = \vec{w}$?
25. Donnez des équations paramétriques et les équations symétriques de la droite
    a) qui passe par le point $(1,2,-1)$ et qui est parallèle au vecteur $2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$
    b) qui passe par les points $(4,0,1)$ et $(-3,2,5)$
    c) qui passe par le point $(-1,2,3)$ et qui est perpendiculaire au plan $3x - y + 7z = 4$
26. Donnez des équations paramétriques de la droite passant par le point $(3,-2,4)$ et paralléle à la droite $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$

27. Donnez les équations symétriques de la droite passant par le point $(0,-2,1)$ et paralléle à la droite $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2-y}{5}=\dfrac{z}{4}$

28. On considère le point $A(-4,2,3)$ et le plan P d'équation $x-2y+z=1$.

    a) En quel point la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au plan P rencontre-t-elle le plan P ?

    b) Déduire de ce qui précède la distance entre le point A et le plan P.

    c) Retrouvez la distance par la formule donnée dans le cours.

    d) Donnez le point obtenu par la réflexion par rapport au plan P du point de A.

29. a) Montrez que la droite qui passe par le point $A(1,-4,3)$ et parallèle au vecteur $-4\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$ peut aussi être représentée par les équations paramétriques suivantes $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2-t \\ z=9-3t \end{cases}$

    b) Y'a t-il unicité des équations paramétriques d'une droite ?

30. Les droites suivantes sont-elles parallèles ? ont-elles des points communs ?

    a) D_1: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-4t \\ z=5-8t \end{cases}$ et D_2: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-6t \\ z=8-12t \end{cases}$

    b) D_1: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=4-3t \end{cases}$ et D_2: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=7+4t \end{cases}$

31. Donnez l'équation du plan

    a) qui passe par le point $(-5,2,1)$ et de vecteur normal $3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$

    b) qui passe par les points $(4,0,1)$, $(-3,2,-6)$ et $(-2,5,0)$

    c) qui passe par le point $(1,-3,4)$ et qui est parallèle au plan $3x-y+7z=4$

    d) qui passe par le point $(1,-2,3)$ et qui contient la droite passant par les points $(2,-1,0)$ et $(2,-5,1)$

    e) qui passe par le point $(1,-2,3)$ et qui contient la droite d'équation $\vec{r}(t)=(1-2t)\vec{i}-5t\vec{j}+(-2+3t)\vec{k}$

32. On considère la droite D d'équation $\vec{r}(t)=(1-3t)\vec{i}+(2+t)\vec{j}+(-1-3t)\vec{k}$ et le plan P d'équation $2x+3y-z=3$.

    a) Dites pouquoi il y a un plan qui contient D et qui est parallèle à P.

    b) Donnez l'équation de ce plan.

33. Donnez l'équation du plan passant par les points $(0,-1,3)$ et $(2,3,5)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $2x-3y+8z=1$

34. On considère deux plans d'équations respectives $2x-3y-2z=-4$ et $x-2y+2z=1$

    a) Donnez un point de la droite intersection des deux plans.

b) En vous servant des vecteurs normaux aux plans, donnez un vecteur parallèle à la droite intersection des deux plans.

c) Donnez des équations paramétriques de la droite intersection des deux plans.

d) Alternative : Trouvez un autre point comme dans la question a) et donnez les équations de la droite qui passe par ces deux points.

e) Alternative : Utilisez un outil de calcul symbolique.

35. Donnez l'équation du plan qui passe par le point $(2,0,6)$ et qui est perpendiculaire à la droite intersection des plans d'équations respectives $x+y-z=4$ et $3x-2y-z=5$.

36. Donnez l'équation d'un plan

a) parallèle au plan d'équation $2x-5y+3z=2$

b) perpendiculaire au plan d'équation $2x-5y+3z=2$

37. Donnez des équations paramétriques de la droite qui passe par le point $(-1,1,3)$ et qui est perpendiculaire à la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \\ z = -3-5t \end{cases}$$

(Dans l'espace, deux droites sont dites perpendiculaires si elles se coupent selon un angle droit)

38. La distance d'un point C à la droite passant par deux points A et B est donnée par $\dfrac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

a) Montrez que si $\vec{u}$ est un vecteur parallèle à la droite passant par A et B alors cette distance peut s'écrire $\dfrac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

b) Dites pourquoi les droites suivantes sont paralléles

$$D_1 \colon \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+10t \\ z = 4-4t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_2 \colon \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+15t \\ z = 7-6t \end{cases} .$$

c) Calculez la distance entre les deux droites.

39. Deux droites de l'espace non parallèles et non concourantes sont dites gauches. On veut trouver une formule qui donne la distance entre deux droites gauches.

a) Si les équations paramétriques des droites sont respectivement $\vec{r}(t) = P + t\,\vec{u}$ et $\vec{r}(t) = Q + t\,\vec{v}$, montrez que la distance entre les deux droites est donnée par $\dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

b) Calculez la distance entre les droites gauches $D_1 \colon \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+t \\ z = 4-3t \end{cases}$ et $D_2 \colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 7+4t \end{cases}$

.

40. Caculez la distance entre

    a) le point $(2,-1,5)$ et le plan d'équation $2x - y + 2z = -3$

    b) Les plans parallèles d'équations respectives $2x + 10y - 4z = 2$ et $3x + 15y - 6z = 7$

Chapitre 2

Fonctions vectorielles

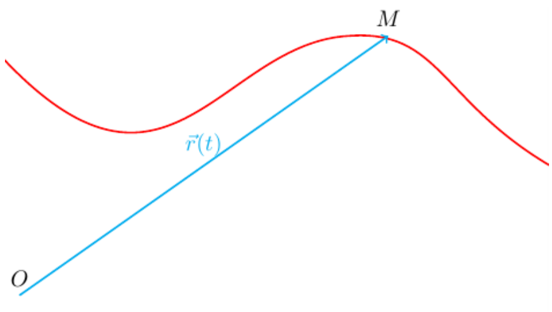
2.1 Fonctions vectorielles et courbes

Soit t un nombre réel dans un intervalle donné. Une fonction vectorielle est une fonction qui associe à t un vecteur $\vec{r}(t)$ du plan ou de l'espace.

$$t \to \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} = (f(t), g(t), h(t))$$

où f, g et h sont des fonctions réelles d'une variable réelle. Lorsque t varie le point $M(x, y, z)$ avec $x = f(t)$, $y = g(t)$ et $z = h(t)$ décrit une courbe. On dira que cette courbe a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$



(a) Courbe paramétrée

Question : Quelle courbe la fonction vectorielle suivante $\vec{r}(t) = (1-2t)\vec{i} + (3+4t)\vec{j} + (5-t)\vec{k}$ définit-elle ?

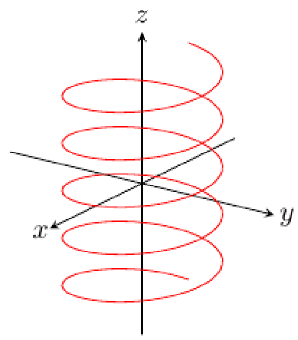
Réponse :

La courbe représente la droite dans l'espace qui passe par le point $(1, 3, 5)$ et parallèle au vecteur $\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

Question : Quelle courbe la fonction vectorielle $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ définit-elle ?

Réponse :

La courbe est une spirale ou hélice dans l'espace (voir illustation ci-dessous).



(b) Hélice

2.2 Dérivation et tangente

Avant de parler de dérivée, nous allons définir la notion de limite d'une fonction vectorielle $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$.

Dire que

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{l}$$

revient à dire

$$\lim_{t\to a} ||\vec{r}(t) - \vec{l}|| = 0$$

On montre aussi que

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = (\lim_{t\to a} f(t))\vec{i} + (\lim_{t\to a} g(t))\vec{j} + (\lim_{t\to a} h(t))\vec{k}$$

$$\lim_{t\to a} (f(t), g(t), h(t)) = (\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t))$$

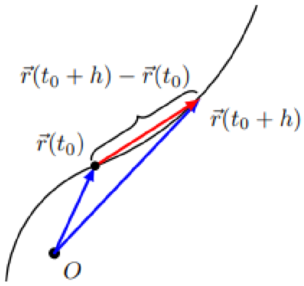
Exemple : Si $\vec{r}(t) = 2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + t\vec{k}$, on a :

$$\lim_{t\to\pi} \vec{r}(t) = -2\vec{j} + \pi\vec{k}$$

Dérivée d'une fonction vectorielle

La dérivée d'une fonction vectorielle $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ en t_0 est

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$



(c) Taux de variation

On montre que ceci revient à dériver les trois fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$.

$$\vec{r}'(t)=\frac{d}{dt}(\vec{r}(t))=f'(t)\vec{i}+g'(t)\vec{j}+h'(t)\vec{k}$$

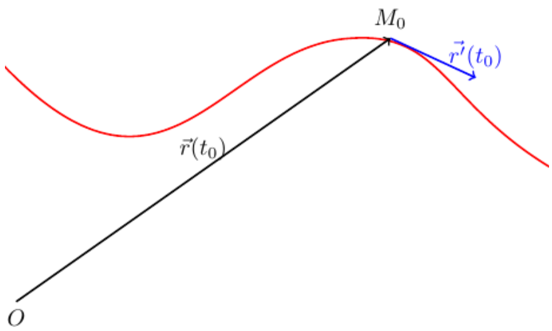
Propriétés des dérivées

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles, f une fonction réelle de la variable t et k un nombre réel, alors :

1. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t)+\vec{v}(t))=\frac{d}{dt}(\vec{u}(t))+\frac{d}{dt}(\vec{v}(t))$
2. $\frac{d}{dt}(k\vec{u}(t))=k\frac{d}{dt}(\vec{u}(t))$
3. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u}(t))=f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\frac{d}{dt}(\vec{u}(t))$
4. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t))\cdot\vec{v}(t))=(\frac{d}{dt}\vec{u}(t))\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\frac{d}{dt}(\vec{v}(t))$
5. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t))\wedge\vec{v}(t))=(\frac{d}{dt}\vec{u}(t))\wedge\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\wedge\frac{d}{dt}(\vec{v}(t))$

Vecteur tangent

Si en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ qui correspond à $t=t_0$, le vecteur $\vec{r}'(t_0)$ n'est pas nul, alors il est tangent à la courbe au point M_0.



(d) Courbe et dérivée.

Une courbe est dite régulière si $\vec{r}'(t)$ possède une dérivée continue et si $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$.

Vecteur tangent unitaire

Le vecteur tangent unitaire est $\vec{T}'(t)=\dfrac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||}$.

Question : Calculez $\vec{r}'(0)$ et $\vec{T}'(0)$ si $\vec{r}(t)=4\sin t\vec{i}+2\cos t\vec{j}+3t\vec{k}$.

Réponse :
On a $\vec{r}'(t) = (4\cos t, -2\sin t, 3)$, $\vec{r}'(0) = (4, 0, 3)$ et donc $\vec{T}'(0) = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$.

Droite tangente à une courbe

En un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ qui correspond à $t = t_0$ avec $\vec{r}'(t_0)$ non nul, la droite tangente à la courbe en M_0 est la droite qui passe par M_0 et de vecteur directeur $\vec{r}'(t_0)$.
Question :. Donnez des équations paramétriques de la tangente à la courbe

$$\begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{t} \\ y = t^3 - t \\ z = t^3 + t \end{cases}$$

au point $(3, 0, 2)$.
Réponse :
On a

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y = 3t^2 - 1 \\ z = 3t^2 + 1 \end{cases}$$

Le point (3,0,2) de la courbe correspond à $t = 1$ (on trouve cette valeur à partir des équations de la courbe) et le vecteur tangent à la courbe au point $(3, 0, 2)$ est $\vec{r}'(1) = (1, 2, 4)$. Finalement on a :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

2.3 Intégrale et longueur d'arc

On définit l'intégrale définie d'une fonction vectorielle d'une variable réelle $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ par

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}.$$

De la même façon, on définit les intégrales indéfinies.

Longueur d'arc de courbe

La longueur de l'arc de courbe $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ où $a \le t \le b$ est donnée par :

$$\int_a^b ||\vec{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\,dt$$

Exemple : La longueur d'arc $\vec{r}(t) = 2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + t\vec{k}$ avec $0 \le t \le 2\pi$ est :

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2 + (1)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,dt = 2\pi\sqrt{5}$$

Paramétrisation par longueur d'arc

Soit s la longueur d'arc commençant en a et finissant en t :

$$s(t) = \int_a^t ||\vec{r}'(\tau)||d\tau.$$

On a donc $s = s(t)$ et d'après le théorème fondamental du calcul, on a $s'(t) = ||\vec{r}'(t)||$.
Si on peut résoudre cette équation $s = s(t)$ pour avoir $t = t(s)$, on peut alors avoir une paramétrisation de la courbe $\vec{r}(t)$ où $a \leq t \leq b$ par $\vec{r}_1(s) = \vec{r}(t(s))$ et $0 \leq s \leq l$ où l est la longueur totale $\int_a^b ||\vec{r}'(t)||dt$. La courbe est ainsi paramétrée par la longueur d'arc s.

Exemple : En deux dimensions, le cercle centré à l'origine et de rayon R a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$

Dans cette paramétrisation, t représente géométriquement l'angle en radians mesuré à partir du demi-axe positif des x et $0 \leq t \leq 2\pi$. On a $s(t) = \int_0^t ||\vec{r}'(\tau)||d\tau = R.t$. La paramétrisation par longueur d'arc s commencant à l'origine est

$$\begin{cases} x = R\cos\dfrac{s}{R} \\ \\ y = R\sin\dfrac{s}{R} \end{cases}$$

et $0 \leq s \leq 2\pi R$.

Question : Donner une paramérisation par longueur d'arc mesuré à partir du point $(1,0,0)$ de l'hélice d'équations paramétriques

$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{t}{4}\vec{k} \quad \text{où} \quad t \geq 0$$

Réponse : On a $s(t) = \int_0^t ||\vec{r}'(\tau)||d\tau = \dfrac{\sqrt{17}}{4}t$. La paramétrisation par longueur d'arc commencant à partir du point $(1,0,0)$ est

$$\vec{r}_1(s) = \cos(\frac{4}{\sqrt{17}}s)\vec{i} + \sin(\frac{4}{\sqrt{17}}s)\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{k} \quad \text{où} \quad s \geq 0$$

Remarque : Lorsque la courbe est paramétrée par longueur d'arc s, on a $\vec{T}'(s) = \vec{r}'(s)$.

2.4 Surfaces paramétrées

Une fonction vectorielle de deux variables réelles est une fonction qui a un couple de réels u et v associe un vecteur

$$(u,v) \to \vec{r}(u,v) = f(u,v)\vec{i} + g(u,v)\vec{j} + h(u,v)\vec{k} = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$$

où f, g et h sont des fonctions réelles de deux variables.

Lorsque u et v varient, le point $M(x, y, z)$ avec $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ et $z = h(u, v)$ décrit une surface. On dira que cette surface a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

Si on fixe un des deux paramètres dans des équations paramétriques d'une surface, on obtient une courbe qu'on appelle courbe isoparamétrique.

Exemples :

Le graphe d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ peut être représenté pas les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

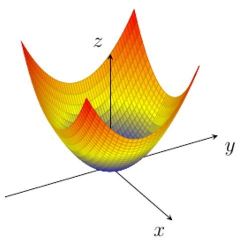
Le graphe de $z = x^2 + y^2$ (Paraboloïde circulaire) peut être représenté par les équations paramétriques (coordonnées rectangulaires) suivantes :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

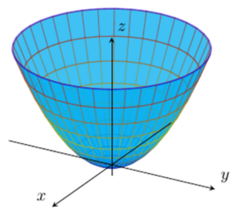
Cependant, la paraboloïde peut aussi être représentée par les équations paramétriques (coordonnées cylindriques) suivantes :

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$$

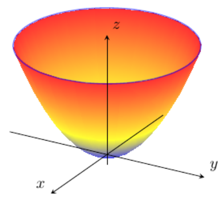
Ces dernières équations paramétriques sont beaucoup plus appropriées comme le montre le dessin ci-dessous.



(e) Paraboloïde $z = x^2 + y^2$ dessinée sur un carré et ses courbes isoparamétriques



(f) Paraboloïde $z = x^2 + y^2$ dessinée en coordonnées cylindriques et ses courbes isoparamétriques



(g) Surface (Paraboloïde circulaire) $z = x^2 + y^2$

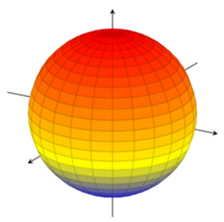
Le cylindre circulaire d'axe l'axe des y, $x^2 + z^2 = 4$ peut être représenté par des équations paramétriques (coordonnées cylindriques) suivantes :

$$\begin{cases} x = 2\cos v \\ y = u \qquad\qquad \text{où} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = 2\sin v \end{cases}$$

La sphère $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{R^2} + \dfrac{z^2}{R^2} = 1$ peut être paramétrée en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \qquad \text{où} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Pour une sphère, la courbes isoparamétrique avec $\theta = \theta_0$ est le demi-cercle intersection du demi-plan $\theta = \theta_0$ et de la sphère et celle avec $\varphi = \varphi_0$ est le cercle intersection du demi-cône $\varphi = \varphi_0$ et de la sphère.



(h) Sphère avec ses courbes isoparamétriques

L'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ peut être paramétrée en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \qquad \text{où} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \\ z = c\cos\varphi \end{cases}$$

2.5 Exercices

1. Identifiez les surfaces suivantes :

   a) $x + y + 2z = 4$

   b) $z = y^2$

   c) $z = 4 - x^2 - y^2$

   d) $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$

   e) $x^2 + z^2 = 4$

2. Convertir des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

   a) $(1, 1)$

   b) $(-3, 4)$

3. Donnez l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 16$ en coordonnées polaires.

4. Dessinez avec un outil graphique la courbe plane donnée en coordonnées polaires par $r = 2\cos(\theta)$ et ensuite donnez son équation en coordonnées cartésiennes. (multiplier par r les deux côtés de l'équation afin de la transformer en x et y).

5. Convertir des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques et sphériques.

   a) $(1, 1, -2)$

   b) $(3, -3, 5)$

6. Donnez l'équation de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en coordonnées cylindriques et sphériques.

7. Donnez l'équation du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ en coordonnées cylindriques et sphériques.

8. Quelle est la surface qui est donnée en coordonnées sphériques par $\rho = 4\cos(\phi)$. (multipliez par ρ les deux côtés de l'équation afin de la transformer en x, y et z.)

9. Dessinez les courbes suivantes et identifiez les.

   a) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t + 1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}$

10. En utilisant un logiciel, dessinez les courbes suivantes.

    a) $\begin{cases} x = 2\cos(2\pi t) \\ y = 2\sin(3\pi t) \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \sqrt{t}\cos(2t) \\ y = \sqrt{t}\sin(2t) \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = t\cos(2t) \\ y = t\sin(2t) \\ z = t \end{cases}$

11. En quels points, la courbe $\vec{r}(t) = (1-t^2)\,\vec{i} + (1-t)\,\vec{j} + (-2+2t^2)\,\vec{k}$ rencontre-t-elle le plan $x - 2y + z + 3 = 0$?

12. Donnez des équations paramétriques de la courbe intersection de la surface $x^2 + y^2 + 9z^2 = 9$, $y \geq 0$ et de la surface $x^2 + z^2 = 1$.

13. Donnez des équations paramétriques de la tangente à la courbe au point donné.

    a) $\vec{r}(t) = (e^t, 2\sin(t) - 1, t+1)$ au point $(1, -1, 1)$

    b) $\vec{r}(t) = (t^2 + 2t - 1, 2t\sin(\pi t), e^{t-1})$ en $t = 1$

14. Donnez des équations paramétriques de la courbe intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $y + z = 2$ ainsi que celles de la tangente à cette courbe au point $(-\sqrt{3}, 1, 1)$.

15. Soit C la courbe intersection des surfaces $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $5x^2 + 2y^2 + z^2 = 102$.

    a) Utilisez un outil de calcul symbolique pour trouver une paramétrisation de la courbe C au voisinage du point $(-3, 4, 5)$ (reslovez en x, y et z)

    b) Utilisez la question précédente pour trouvez des équations paramétriques de la tangente à la courbe C au point $(-3, 4, 5)$.

    c) En donnant une paramétrisation globale de la courbe, donnez des équations paramétriques de la courbe C au point $(-3, 4, 5)$.

    d) Assurez vous que les équations obtenues dans b) et c) représentent la même droite.

16. a) Donnez une paramétrisation de la courbe $\begin{cases} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \end{cases}$ où $R > 0$ et $0 \leq t \leq 2\pi$, qui fait que le paramètre représente la longueur de l'arc de courbe mésuré à partir du point $(R, 0)$.

    b) Donnez une paramétrisation de la courbe $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \\ z = t \end{cases}$ où $t \geq 0$, qui fait que le paramètre représente la logueur de l'arc de courbe mesuré à partir du point $(1, 0, 0)$.

17. Calculez les longeurs d'arc suivants :

    a) $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$ où $0 \leq t \leq 2\pi$

    b) $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \\ z = t \end{cases}$ où $0 \leq t \leq \pi$

18. Associez les surfaces suivantes données avec des équations paramétriques a), b) et c)

a) $\vec{r}(u,v) = (2u-3v+5)\,\vec{i} + u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$

b) $\vec{r}(u,v) = u\cos(v)\,\vec{i} + u\sin(v)\,\vec{j} + u\,\vec{k}$

c) $\vec{r}(u,v) = u\cos(v)\,\vec{i} + u^2\,\vec{j} + u\sin(v)\,\vec{k}$

à leurs équations cartésiennes 1), 2) et 3)

1) Paraboloide circulaire $y = x^2 + z^2$

2) Plan $x - 2y + 3z = 5$

3) Cône $z^2 = x^2 + y^2$

19. Donnez des équations paramétriques de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

20. Donnez deux façons de paramétriser la paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$.

Chapitre 3

Dérivation

3.1 Dérivées partielles

Pour une fonction de deux variables $f(x,y)$, nous noterons par S le graphe de f et par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ un point de S.
Lorsqu'on coupe la surface $z = f(x,y)$ par le plan $y = y_0$, on obtient la courbe C_1 d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = f(x_0+t, y_0) = g(t) \end{cases}$$

Notons que le point M_0 correspond à la valeur de $t = 0$.

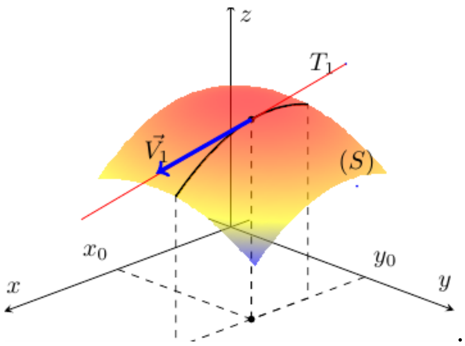


FIGURE 3.1 – Courbe C_1= coupe de la surface par un plan parallèle au plan xz

Un vecteur tangent à la courbe C_1 au point M_0 est $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \\ z' = g'(0) \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x_0+h, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h} \end{aligned}$$

Ce taux de variation est dit dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) et noté $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $f'_x(x_0, y_0)$.

Un vecteur tangent à la courbe C_1 au point M_0 est donc $\left(1, 0, f'_x(x_0, y_0)\right)$.

De la même façon, si on coupe la surface $z = f(x, y)$ par le plan $x = x_0$, on obtient la courbe C_2 d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = f(x_0, y_0 + t) = h(t) \end{cases}$$

Notons que le point M_0 correspond à la valeur de $t = 0$.

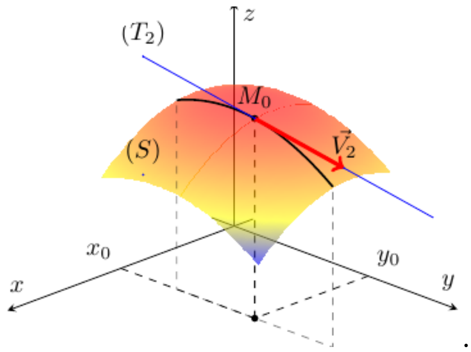


FIGURE 3.2 – Courbe C_2= coupe de la surface par un plan parallèle au plan yz

Un vecteur tangent à la courbe C_2 au point M_0 est $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \\ z' = h'(0)) \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} h'(0) &= \lim_{k \to 0} \frac{h(k) - h(0)}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0 + k\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{k} \end{aligned}$$

Ce taux de variation est dit dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) et noté $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $f'_y(x_0, y_0)$.

Un vecteur tangent à la courbe C_2 au point M_0 est donc $\left(0, 1, f'_y(x_0, y_0)\right)$.

Remarque : Si on considère la courbe C_1 comme une courbe plane (elle est dans le plan $y = y_0$ qui est parallèle au plan xz), le nombre $f'_x(x_0, y_0)$ est la pente de cette courbe. De même, le nombre $f'_y(x_0, y_0)$ est la pente de la courbe plane C_2.

En général, on définit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x + h, y\right) - f\left(x, y\right)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x, y + h\right) - f\left(x, y\right)}{h}$$

On utilise aussi les notations $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

On définit de la même façon les dérivées partielles des fonctions de plus de deux variables.

On voit bien que lorsqu'on dérive, par exemple, par rapport à la variable x, y ne varie pas. On peut alors utiliser toutes les règles de dérivation d'une fonction d'une variable pour calculer la dérivée par rapport à une variable en considérant la ou les autres variables (lorsqu'il s'agit de fonctions de plus de deux variables) comme constantes.

Question : Calculez les dérivées partielles de $f(x,y) = x^2y + y\cos x + xe^y + x^2 - 4y + 1$.
Solution :

$$f'_x(x,y) = 2xy - y\sin x + e^y + 2x$$
$$f'_y(x,y) = x^2 + \cos x + xe^y - 4$$

La notion de différentiabiilié d'une fonction f n'est pas traitée dans ce cours. Cependant lorsque les dérivées partielles existent et sont continues, la fonction est différentiable.
On supposera dans toute la suite que les fonctions considérées admettent des dérivées partielles continues.

Dérivées d'ordre supérieur

Si les dérivées partielles f'_x et f'_y ont des dérivées partielles $(f'_x)'_x$, $(f'_x)'_y$, $(f'_y)'_x$ et $(f'_y)'_y$, alors ces dérivées sont dites dérivées secondes partielles de f. Les notations utilisées sont :

$$\begin{aligned}
(f'_x)'_x = f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\
(f'_x)'_y = f''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\
(f'_y)'_x = f''_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
(f'_y)'_y = f''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Les deux dérivées secondes mixtes f''_{xy} et f''_{yx} sont égales pour un grand nombre de fonctions. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème (Clairaut - Schwarz). Si une fonction f est définie dans un disque ouvert D et si les dérivées f''_{xy} et f''_{yx} sont continues dans D, alors $f''_{xy} = f''_{yx}$ dans D.

Question : Calculez les dérivées secondes mixtes de la fonction $f(x,y) = x^2y + y\cos(x) + xe^y + x^2 - 4y + 1$.
Solution :
On a :

$$f'_x(x,y) = 2xy - y\sin x + e^y + 2x.$$

Si on dérive $f'_x(x,y)$ par rapport à y, on obtient

$$f''_{xy}(x,y) = 2x - \sin x + e^y.$$

On a :

$$f'_y(x,y) = x^2 + \cos x + xe^y - 4$$

Si on dérive $f'_y(x,y)$ par rapport à x, on obtient

$$f''_{yx}(x,y) = 2x - \sin x + e^y.$$

Les deux dérivées mixtes sont égales.

On peut définir les dérivées d'ordre supérieur comme par exemple :

$$f'''_{yxx} = (f''_{yx})'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

3.2 Plan tangent au graphe d'une fonction.

Le plan tangent au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est le plan qui contient les droites tangentes T_1 et T_2.

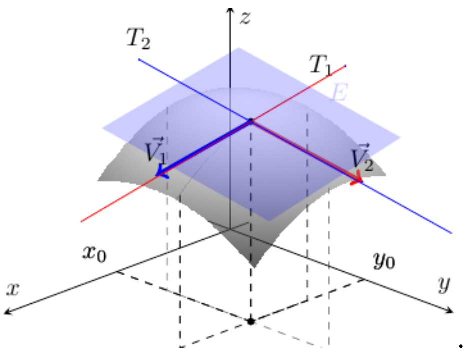


FIGURE 3.3 – Plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point M_0.

Cherchons l'équation du plan tangent à la surface au point M_0

Un vecteur normal au plan tangent est le produit vectoriel des vecteurs tangents $\vec{V_1} = (1, 0, f'_x(x_0, y_0))$ et $\vec{V_2} = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$.

$$\vec{n} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) \wedge (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$$

On cherche alors l'équation du plan passant par M_0 et normal au vecteur $(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$ et on obtient :

$$-f'_x(x_0, y_0).(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0).(y - y_0) + 1.(z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

qu'on écrit :

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0).(y - y_0).$$

Question : Donnez le plan tangent à la surface $z = x^2y + y + x - 1$ au point $(1,1,2)$.
Réponse :
On utilise la formule

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1).(x-1) + f'_y(1,1).(y-1).$$

Comme $f'_x(x,y) = 2xy+1$ et $f'_y(x,y) = x^2+1$, il en découle $f'_x(1,1) = 3$ et $f'_y(1,1) = 2$ et comme $f(1,1) = 2$, l'équation du plan tangent est

$$z = 2 + 3(x-1) + 2(y-1)$$

qu'on écrit

$$z = 3x + 2y - 3.$$

Différentielle

Le plan tangent en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ donne une approximation de la fonction f dans un voisiange de (x_0, y_0) (un voisinage de (x_0, y_0) est un sous ensemble du plan qui contient un disque ouvert contenant le point (x_0, y_0)). Plus précisement,

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0).(y-y_0)$$

lorsque (x,y) est dans un voisinage de (x_0,y_0).
Ce second membre est dit linéarisation de f. On peut aussi écrire

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0).(y-y_0)$$

lorsque (x,y) est dans un voisinage de (x_0,y_0).

Pour une fonction différentiable $z = f(x,y)$, la différentielle au point (x,y) est définie par :

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

où dx et dy sont des variables indépendantes.

Notons par $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0)$, $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = y - y_0$. On a $\Delta z \approx dz$ où dz est la différentielle de f en (x_0,y_0) et où les valeurs Δx et Δy sont affectées aux variables dx et dy.

Question : Donnez la différentielle de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ et calculez dz et Δz si x passe de 2 à 2.04 et si y passe de 1 à 0.98.
Réponse :
L'idée est de calculer $f(2.04, 0.98)$ à partir de $f(2,1)$ (qui est facile à calculer) et de la linéarisation de f au voisinage du point $(2,1)$. $\Delta f = f(2.04,0.98) - f(2,1) \approx df$ et $f(2.04,0.98) \approx f(2,1) + df$ On calcule df en $(x,y) = (2,1)$ et en affectant respectivement aux variables dx et dy les valeurs .04 et -0.02.
on calcule les dérivées premières au point $(2,1)$ et on obtient $f'_x(2,1) = 5$ et $f'_y(2,1) = 4$ et on obtient $df = 5(0.04) + 4(-0.02) = 0.12$. Comme $f(2,1) = 7$, on obtient $f(2.04, 0.98) \approx 7.12$

3.3 Dérivation des fonctions composées ou règle de la chaîne

Cas 1 :

Supposons qu'une fonction $f(x, y)$ représente la température d'une plaque plane. Supposons qu'on veuille calculer la variation de la température sur une courbe donnée par des équations paramétriques : $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$
Une façon simple de faire est de remplacer x et y dans la fonction f lorsque cette dernière est connue, on obtient ainsi une fonction d'une variable t qu'on dérive par rapport à t. Cependant, il y a des situations où f est inconnue, mais où on veut trouver une relation qui donne $\frac{dz}{dt}$. Cette situation intervient en théorie, par exemple pour montrer que le gradient d'une fonction est perpendiculaire aux courbes de niveau dans le cas d'une fonction de deux variables et aux surfaces de niveau pour une fonction de trois variables.

Pour se rappeler de la formule de la dérivation des fonctions composées, voir le diagramme ci-dessous .

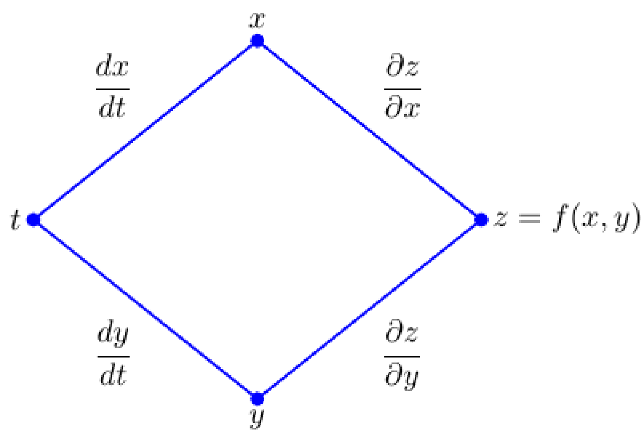


FIGURE 3.4 – Règle de la chaîne Cas 1 a)

La règle de la chaîne dans cette situation est

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

On multiplie les dérivées de chaque chemin et on les additionne.

Remarque :. Si on a une fonction de trois variables $w = f(x, y, z)$ et une courbe dans l'espace, on aura trois chemins et donc :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

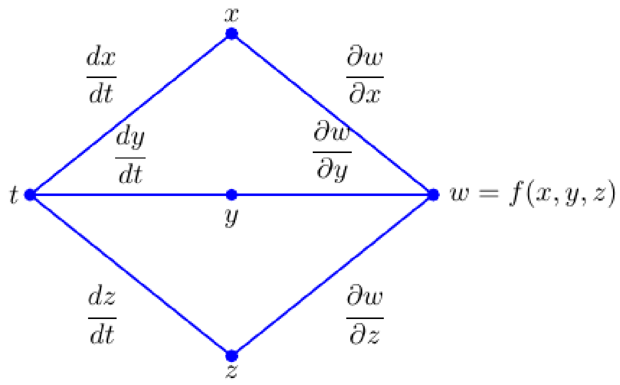


FIGURE 3.5 – Règle de la chaîne Cas 1 b)

Cas 2 :

On considère une fonction $z = f(x, y)$ et supposons que $x = g(s, t)$ et $y = h(s, t)$ et qu'on veuille trouver une relation qui donne $\frac{\partial z}{\partial s}$ et $\frac{\partial z}{\partial t}$. Ce cas est très important dans la situation où on fait des changements de coordonnées comme lorsqu'on passe des coordonnées x et y aux coordonnées polaires r et θ.

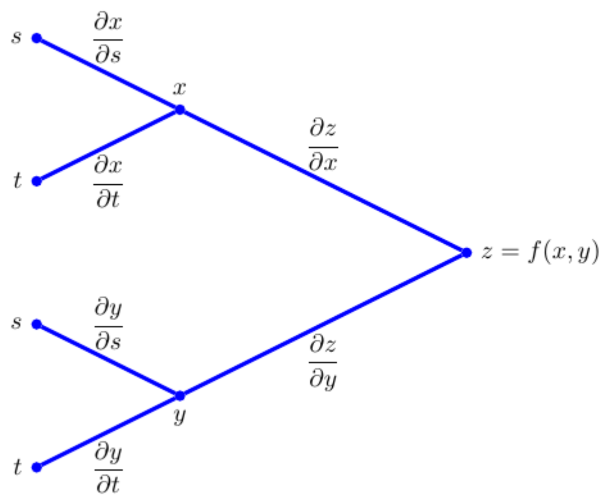


FIGURE 3.6 – Règle de la chaîne

Lorsqu'on dérive par rapport à s par exemple, on considère t comme une constante et donc pour calculer $\frac{\partial z}{\partial s}$, on ne considère que les chemins allant de s à z et on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

On inverse les rôles de s et t et on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Application : On cherche à trouver une fonction $z = f(x, y)$ qui est solution de l'équation

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Pour cela, nous allons effectuer un changement de coordonnées afin d'obtenir une équation plus facile à résoudre. Les coordonnées que nous allons utiliser sont les coordonnées polaires. On pose alors $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

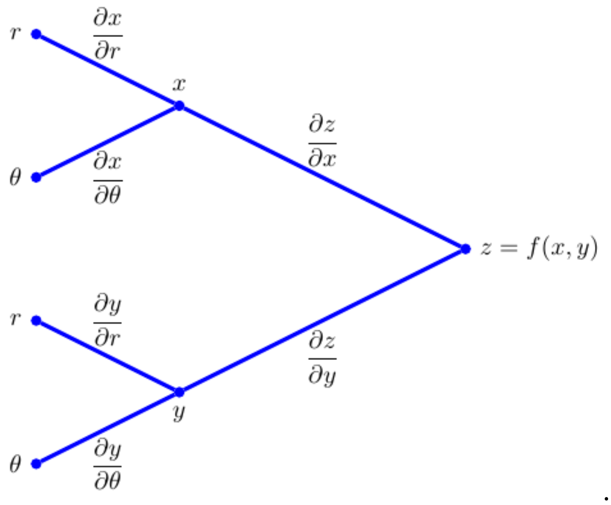


FIGURE 3.7 – Règle de la chaîne

On obtient :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Comme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

On obtient :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial z}{\partial y}.$$

L'équation qu'on veut résoudre $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ devient alors $r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
Cette dernière équation n'est autre que

$$-\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

On cherche donc une fonction dont la dérivée partielle par rapport à θ est nulle. Par conséquent cette fonction ne dépend que de r et on peut l'écrire $z = g(r)$. Comme $r = \sqrt{x^2+y^2}$, les solutions sont de la forme $z = g(\sqrt{x^2+y^2})$. Un exemple de solution serait par exemple

$$z = r^2 + e^{r^2} + 1 = (x^2+y^2) + e^{x^2+y^2} + 1$$

3.4 Dérivation implicite

Sous certaines conditions, une équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement y comme fonction de x (en général localement). On veut calculer la dérivée de y par rapport à x. Cette situation est rencontrée losqu'on cherche la tangente à une courbe plane $f(x, y) = 0$.
On utilise le diagramme suivant :

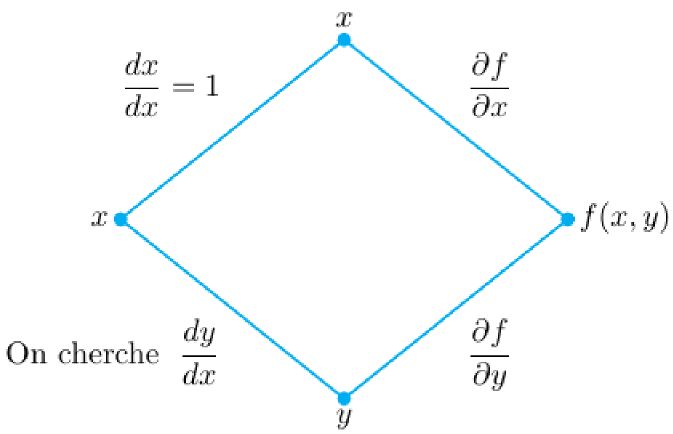


FIGURE 3.8 – Dérivation implicite

Comme $f(x, y) = 0$, on a $\frac{d}{dx}[f(x, y)] = 0$. En utilisant la la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

La formule de dérivation implicite est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Remarque : Ceci est valable pour une courbe $f(x, y) = c$ (courbe de de f), car on peut l'écrire $f(x, y) - c = 0$ et dériver la constante c n'amène aucune contribution.

Question : Calculez $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2 + y^2 = 1$.
Réponse :
En posant $f(x, y) = x^2 + y^2$ ou $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, on a $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$, et ceci est valable lorsque $y \neq 0$. Cette condition exclut les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ du cercle unité où la tangente est verticale.

Sous certaines conditions, une équation $F(x, y, z) = 0$ définit implicitement z comme fonction de x et y. Pour calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, on suppose y constant et en utilisant un argument similaire au cas précédent, on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

De la même façon, on a

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Question : Donnez $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ au point $(1, 1, 1)$ si $z^3 - xy + xz + x^3 - 2 = 0$.
Réponse :
On pose $F(x, y, z) = z^3 - xy + xz + x^3 - 2 = 0$ et on sait que :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y)} = -\frac{-y + z + 3x^2}{3z^2 + x} = \frac{y - z - 3x^2}{3z^2 + x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y)} = -\frac{-x}{3z^2 + x} = \frac{x}{3z^2 + x}.$$

En remplaçant par $(1, 1, 1)$, on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3}{4}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4}.$$

3.5 Dérivée directionnelle et gradient

Pour une fonction de deux variables $f(x,y)$, nous noterons par S le graphe de f et par $M_0(x_0,y_0,z_0)$ avec $z_0 = f(x_0,y_0)$ un point de S. On note par $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur **unitaire**. Nous allons définir la dérivée directionnelle de f en (x_0,y_0) dans la direction du vecteur $\vec{u}$.

Pour définir la dérivée partielle en x, on a coupé la surface par le plan vertical $y = y_0$ qui est le plan vertical contenant la droite du plan xy passant par (x_0,y_0) et parallèle au vecteur $\vec{i}$. Pour définir la dérivée partielle en y, on a coupé la surface par le plan vertical $x = x_0$ qui est le plan vertical contenant la droite du plan xy passant par (x_0,y_0) et parallèle au vecteur $\vec{j}$. Si maintenant, on coupe la surface par le plan vertical qui contient la droite du plan xy passant par(x_0,y_0) et parallèle au vecteur $\vec{u}$, on obtient une courbe C. On se demande alors : comment trouver un vecteur tangent à cette courbe en $M_0(x_0,y_0,z_0)$? Quelle est sa pente si on la considère comme une courbe plane ?

Lorsqu'on coupe la surface $z = f(x,y)$ par le plan vertical contenant la droite du plan xy qui passe par le point (x_0,y_0) et qui est parallèle au vecteur $\vec{u}$, on obtient la courbe C d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = f(x_0+at, y_0+bt) = g(t) \end{cases}$$

Notons que le point M_0 correspond à la valeur de $t = 0$.

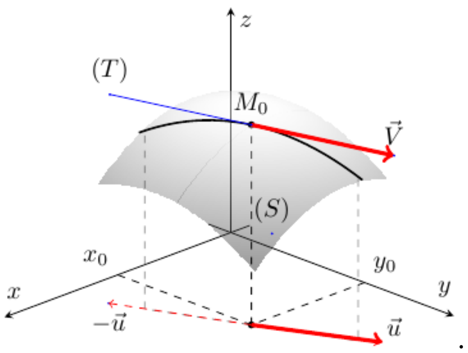


FIGURE 3.9 – Courbe C= coupe de la surface par le plan vertical qui contient la droite du plan xy passant par (x_0,y_0) et parallèle à $\vec{u}$.

Un vecteur tangent à la courbe C au point M_0 est $\begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = g'(0) \end{cases}$

on a

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah, y_0+bh) - f(x_0,y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Ce taux de variation est dit dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\vec{u}$ et noté $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$.

Un vecteur tangent à la courbe C au point M_0 est donc $\left(a, b, f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)\right)$.

Remarque : Si, on considère la courbe C comme une courbe plane, le nombre $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$ est la pente de cette courbe.

Remarque : Les dérivées partielles par rapport à x et à y sont respectivement les dérivées dans les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

Calcul de la dérivée directionnelle

Il a été démontré que la dérivée dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est une moyenne pondérée des dérivées partielles en x et en y. Plus précisement, on a :

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = af'_x(x, y) + bf'_y(x, y)$$

Remarque : Une direction n'est pas toujours donnée par un vecteur unitaire. Pour faire les calculs, pensez à rendre unitaire le vecteur de direction donné.
Question : Calculez la dérivée directionnelle de $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2x + 1$ au point $(-1, 1)$ dans la direction du vecteur $\vec{i} - 2\vec{j}$
Réponse :
La norme du vecteur de direction est $\sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. Le vecteur unitaire de direction est $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$. On calcule les dérivées partielles, on les évalue au point $(-1, 1)$ et on obtient $f'_x(-1, 1) = -3$ et $f'_y(-1, 1) = -1$. la dérivée directionnelle est :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(-3) + (-\frac{2}{\sqrt{5}})(-1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

.

La formule de la dérivée directionnelle peut s'écrire comme un produit scalaire

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = af'_x(x, y) + bf'_y(x, y) = (f'_x(x, y)\vec{i} + f'_y(x, y)\vec{j}) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j})$$

Le vecteur $f'_x(x, y)\vec{i} + f'_y(x, y)\vec{j}$ est dit gradient de f et on le note ∇f.

On écrit $f'_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$ où $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est le vecteur de direction unitaire.

En trois dimensions, la dérivée directionnelle de $f(x, y, z)$ dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est donnée par

$$f'_{\vec{u}}(x, y, z) = af'_x(x, y, z) + bf'_y(x, y, z) + cf'_z(x, y, z) = (f'_x(x, y, z)\vec{i} + f'_y(x, y, z)\vec{j} + f'_z(x, y, z)\vec{k}) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

Le vecteur $f'_x(x, y, z)\vec{i} + f'_y(x, y, z)\vec{j} + f'_z(x, y, z)\vec{k}$ est dit gradient de f et on le note ∇f.

On écrit $f'_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$ où $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est le vecteur de direction unitaire.

Question : Calculez la dérivée directionnelle de $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-xyz$ au point $(1,0,1)$ dans la direction du vecteur $\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
Réponse :
La norme du vecteur de direction est $\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(1)^2} = \sqrt{6}$. On simplifie les notations en écrivant le vecteur unitaire de direction $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$. On calculle le vecteur gradient, on l'évalue au point $(1,0,1)$ et on obtient $(f'_x(-1,0,1),-f'_y(-1,0,1),f'_z(1,0,1)) = (3,-1,3)$. La dérivée directionnelle est le produit scalaire de $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ et de $(3,-1,3)$, ce qui donne

$$(\frac{1}{\sqrt{6}})(3)+(-\frac{2}{\sqrt{6}})(-1)+(\frac{1}{\sqrt{6}})(3) = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Dérivées directionnelles maximale et minimale

Soit f une fonction de deux ou trois variables et θ l'angle que fait le vecteur unitaire $\vec{u}$ avec ∇f si ce dernier n'est pas nul au point considéré. En tenant compte de $||\vec{u}|| = 1$, on a :

$$f'_{\vec{u}} = \nabla f\cdot\vec{u} = ||\nabla f||\,||\vec{u}||\cos\theta = ||\nabla f||\cos\theta$$

On en conclut que :

- La dérivée directionnelle maximale en un point M du plan ou de l'espace est $||\nabla f(M)||$ et elle est atteinte lorsque $\cos\theta = 1$ ou $\theta = 0$. Ceci implique que le vecteur $\vec{u}$ est de même direction et de même sens que le gradient de f en M. On dit que la dérivée directionnelle en M est maximale dans la direction du vecteur $\nabla f(M)$ et sa grandeur maximale est $||\nabla f(M)||$.
- La dérivée directionnelle minimale en M est $-||\nabla f(M)||$ et elle est atteinte lorsque $\cos\theta = -1$ ou $\theta = \pi$. Ceci implique que le vecteur $\vec{u}$ est de même direction mais de sens contraire que le gradient de f en M. On dit que la dérivée directionnelle en M est minimale dans la direction $-\nabla f(M)$ et sa grandeur minimale est $-||\nabla f(M)||$.

Propriété géométrique du gradient

On considère une courbe de niveau $f(x,y) = c$ d'une fonction de deux variables. Supposons qu'on a des équations paramétriques de cette courbe sous la forme $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. On a alors $f(x(t),y(t)) = c$ et si on dérive cette expression en tenant compte de la règle de la chaîne, on obtient :

$$f'_x x'(t)+f'_y y'(t) = 0 \quad \text{ou} \quad (f'_x\vec{i}+f'_y\vec{j})\cdot(x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}) = 0$$

On rappelle que le vecteur $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}$ est un vecteur tangent à la courbe et comme son produit scalaire avec le vecteur gradient est nul, il s'en suit que le gradient (s'il n'est pas nul) est perpendiculaire à la courbe de niveau de f.
Dans l'illustration ci-dessous, $f(x,y) = 6-\frac{1}{5}(x^2+y^2)$ et la courbe de niveau $f(x,y) = 1$ qui a pour équation $x^2+y^2 = 25$ est le cercle centré à l'origine et de rayon 5.

On cherche un vecteur tangent à la courbe et le gradient de la fonction au point $(3,4)$ du cercle. Des équations paramétriques du cercle sont

$$\begin{cases} x = 5\cos(t) \\ y = 5\sin(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad \vec{r}(t) = 5\cos(t)\vec{i} + 5\sin(t)\vec{j}.$$

Le point $(3,4)$ correspond à $t_0 = \cos^{-1}(\frac{3}{5}) = \sin^{-1}(\frac{4}{5})$. Les calculs de $\vec{r}'(t_0)$ et $\nabla f(3,4)$ donnent $\vec{r}'(t_0) = (-4,3)$ et $\nabla f(3,4) = (-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$. On vérifie que le produit scalaire de $\vec{r}'(t_0)$ et de $\nabla f(3,4)$ est nul, ce qui montre que ces deux vecteurs sont perpendiculaires.

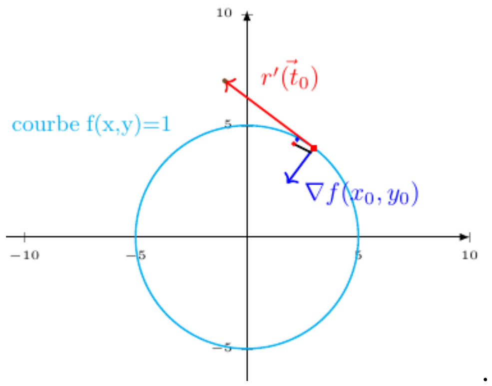


FIGURE 3.10 – Courbe de niveau et gradient

Ce qu'on vient de dire s'applique aux surfaces de niveau $F(x,y,z) = c$. Si l'on prend n'importe quelle courbe régulière sur la surface, la règle de la chaîne montre que le gradient de F en un point de cette courbe (s'il n'est pas nul) est perpendiculaire au vecteur tangent à cette courbe en ce point. On en déduit que ce gradient est perpendiculaire au plan tangent et ceci nous permet de trouver le plan tangent de surfaces plus générales que les graphes de fonctions de deux variables.

Plan tangent à une surface $F(x,y,z) = C$

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de la surface. Comme cette surface est une surface de niveau de F, si $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur non nul, il est perpendiculaire à la surface et donc c'est un vecteur normal au plan cherché.
Comme $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = F'_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$, l'équation du plan tangent cherché est

$$F'_x(x_0, y_0, z_0).(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0).(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0).(z - z_0) = 0$$

Question : Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $y^2 - 2x^2 + z^2 + xz = 2$ au point $(1,2,-1)$.
Réponse :
On applique la formule précédente avec $F(x,y,z) = y^2 - 2x^2 + z^2 + xz$ et $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,-1)$ et on obtient :

$$5x - 4y + z + 4 = 0$$

3.6 Optimisation

3.6.1 Extrémums locaux

Une fonction $f(x, y)$ possède un minimum local en (x_0, y_0) si on peut trouver un disque D de rayon non nul centré en (x_0, y_0) et $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout (x, y) dans D. Une fonction $f(x, y)$ possède un maximum local en (x_0, y_0) si on peut trouver un disque D de rayon non nul centré en (x_0, y_0) et $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout (x, y) dans D.

Exemples :

La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ a un minimum local en $(0,0)$ car $f(x, y) \geq 0 = f(0,0)$ pour tout (x, y). En réalité, la fonction a ce qu'on appelle un minimum global ou absolu en $(0,0)$. Remarquons que les dérivées partielles de f qui sont $f'_x(x, y) = 2x$ et $f'_y(x, y) = 2y$ s'annulent en $(0,0)$.
La fonction $f(x, y) = y^2 - x^2$ n'a ni un maximum local ni un minimum local en $(0,0)$. Tout disque centré en $(0,0)$ contient des points du type $(x,0)$ pour lesquels $f(x,0) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$ et des points du type $(0, y)$ pour lesquels $f(0, y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$. Remarquons aussi dans ce cas que les dérivées partielles s'annulent en $(0,0)$.

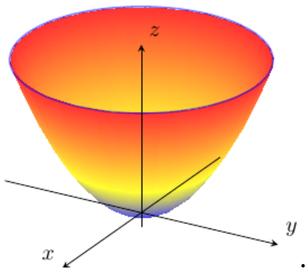


FIGURE 3.11 – Minimum local (et absolu) en $(0,0)$ pour $f(x, y) = x^2 + y^2$

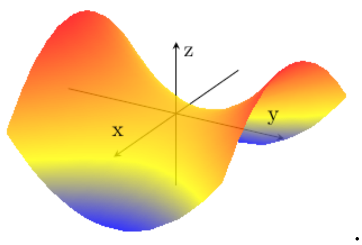


FIGURE 3.12 – Absence d'extrémum local pour $f(x, y) = y^2 - x^2$

Un point (x_0, y_0) est dit point critique pour f si $f'_x(x_0, y_0) = 0$ et $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ou si au moins une des dérivées partielles n'existe pas en ce point.

Question : Donnez les points critiques de $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$.
Réponse :
On résout le système de deux équations $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$.
On trouve 4 solutions : $(3,0)$, $(1,1)$, $(0,3)$ et $(0,0)$.

Il a été démontré que si une fonction f admet un extrémum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.
La réciproque de ce résultat n'est pas vraie comme le montre le point $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Test des dérivées secondes

Soit (x_0, y_0), un point critique avec $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ et
$D(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$, alors on a :

- Si $D(x_0, y_0) > 0$ et $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si $D(x_0, y_0) > 0$ et $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si $D(x_0, y_0) < 0$, f n'a pas d'extrémum local en (x_0, y_0). On dit que f a un point selle en (x_0, y_0).
- Si $D(x_0, y_0) = 0$, ce test est non concluant.

Question :. Donnez les points critiques ainsi que leur nature pour la fonction $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.
Solution :
Les points critiques sont $(3,0)$, $(1,1)$, $(0,3)$ et $(0,0)$ (voir exemple précédent).
On calcule $D(x,y) = f''_{xx}(x,y) f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2$ et on l'évalue aux points critiques.

$$D(x,y) = (-2y)(-2x) - (3 - 2x - 2y)^2.$$

Comme $D(1,1) = 3 > 0$ et comme $f''_{xx}(1,1) = -2 < 0$ la fonction admet un maximum local en $(1,1)$.
Comme $D(3,0) = -9 < 0$, la fonction admet un point selle en (3,0).
Comme $D(0,3) = -9 < 0 < 0$, la fonction admet un point selle en (0,3).
Comme $D(0,0) = -9$, la fonction admet un point selle en (0,0).

Remarque : Dans le test des dérivées secondes, la variable x joue le même rôle que y et donc dans les deux premières conclusions, on peut remplacer $f''_{xx}(x_0, y_0)$ par $f''_{yy}(x_0, y_0)$. Ceci est facile à voir car ces deux dérivées doivent être de même signe lorsque $D(x_0, y_0) > 0$.

3.6.2 Optimisation avec contrainte

Exemple : On cherche le maximum et le minimum de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 1$ centré en $(2,0)$ et de rayon 1.
Le cercle en question est la contrainte, car on cherche à optimiser la fonction f tout en restreignant (x,y) à rester sur le cercle.

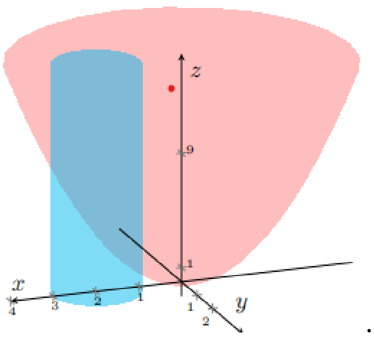


FIGURE 3.13 – Illustration de l'exemple

On voit sur le graphique que le minimum est $f(1,0) = 1$ et le maximum est $f(3,0) = 9$.

Sur un même graphique, dessinons quelques courbes de niveau de f et la contrainte $g(x, y) = 1$ qui aussi une courbe de niveau de la fonction $g(x, y) = (x-2)^2 + y^2$.

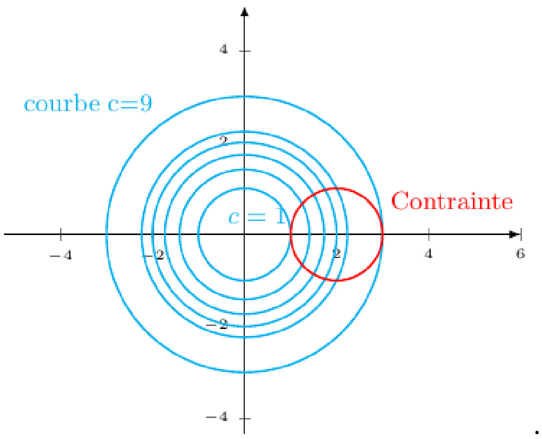


FIGURE 3.14 – Courbes de niveau et contrainte

On remarque qu'aux points $(1,0)$ et $(3,0)$, où la fonction possède des extrémums, les courbes de niveaux 1 et 9 sont tangentes à la contrainte. On sait que le gradient ∇f est perpendiculaire aux courbes de niveau de f et ∇g est perpendiculaire aux courbes de niveau de g. Si les courbes sont tangentes en un point alors les deux gradients sont parallèles. Ceci se traduit par $\nabla f = \lambda \nabla g$ où λ est un nombre réel.

Pour chercher les points qui pourraient donner les extrémums de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = c$, on résout le système de trois équations à trois inconnues x, y et λ

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = c \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \lambda g'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) = \lambda g'_y(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}.$$

Cette méthode est dite méthode de Lagrange et λ est dit multiplicateur de Lagrange.

Exemple : On retourne à l'exemple précédent et on résout

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda(x-2) \\ 2y = 2\lambda y \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Les solutions sont $(x, y, \lambda) = (3, 0, 3)$ et $(x, y, \lambda) = (1, 0, -1)$ et on retouve le point $(3, 0)$ qui donne le maximum $f(3, 0) = 9$ et le point $(1, 0)$ qui donne le minimum $f(1, 0) = 1$.

Pour chercher les points qui pourraient donner les extrémums de $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = c$ (surface de niveau), on résout le système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z et λ..

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = c \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = \lambda g'_x(x, y, z) \\ f'_y(x, y, z) = \lambda g'_y(x, y, z) \\ f'_z(x, y, z) = \lambda g'_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = c \end{cases}.$$

Question : On cherche le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 4z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Solution :

$$\begin{cases} 2x - 2 = \lambda(2x) \\ 2y - 4 = \lambda(2y) \\ 2z - 4 = \lambda(2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 36 \end{cases}.$$

Les solutions sont $(x, y, z, \lambda) = (2, 4, 4, \frac{1}{2})$ et $(x, y, z, \lambda) = (-2, -4, -2, \frac{3}{2})$. On calcule f aux points (x, y, z) trouvés. ce qui donne $f(2, 4, 4) = 0$ et $f(-2, -4, -2) = 72$. La valeur maximale de f sur $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ est 72 et la valeur minimale est 0.

Maximum et minimum sur une région

Soit R une région du plan ou de l'espace. On suppose R fermée (contient sa frontière) et bornée (on peut la mettre dans un disque de rayon fini si c'est dans le plan ou dans une boule de rayon fini si c'est dans l'espace). Si f est continue sur cette région, alors f atteint son maximum et son minimum sur cette région et ces maximum et minimum ont lieu en des points critiques de f situés à l'intérieur la région R ou en des points de la frontière de la région.

Pour une fonction de trois variables qui est différentiable, les points critiques sont les points où les trois dérivées partielles s'annulent. Il faut donc résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

Question : Donnez le maximum et le minimum de $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 4z$ sur la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$.
Solution :
Le maximum et le minimum de f sur la boule (sphère et son intérieur) ont lieu sur la frontière (la sphère) ou aux points critiques situés à l'intérieur s'il ya lieu. On a vu dans l'exemple précédent que le maximum sur la sphère est 72 et le maximum est 0. Cherchons les points critiques de f en résolvant :

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 0 \\ f'_z(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \\ 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

On obtient un seul point critique $(1,2,2)$ et il est à l'intérieur du domaine car $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 < 36$. La valeur de f en ce point est $f(1,2,2) = -9$. Sur la région $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$, le maximum de f est 72 et le minimim est -9.

Optimisation avec deux contraintes

On veut trouver les extrémums d'une fonction $f(x,y,z)$ sur une courbe qui est l'intersection de deux surfaces $g(x,y,z) = c_1$ et $h(x,y,z) = c_2$. On montre que les points qui pourraient répondre à cette question doivent vérifier la condition $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ et doivent se trouver sur la courbe en question :

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g(x,y,z) = c_1 \\ h(x,y,z) = c_2 \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \lambda g'_x(x,y,z) + \mu h'_x(x,y,z) \\ f'_y(x,y,z) = \lambda g'_y(x,y,z) + \mu h'_y(x,y,z) \\ f'_z(x,y,z) = \lambda g'_z(x,y,z) + \mu h'_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = c_1 \\ h(x,y,z) = c_2 \end{cases}.$$

3.7 Exercices

1. Dessinez des courbes de niveaux des fonctions suivantes et esquissez leurs graphes.
   a) $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$
   b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   c) $f(x,y) = x^2 - y^2$
2. Calculez les dérivées partielles premières des fonctions.
   a) $f(x,y,z) = \dfrac{50}{1+x^2+y^2+z^2}$
   b) $f(x,y) = \arctan(xy)$
3. La paraboloide $z = 5 - x^2 - 3y^2$ rencontre le plan $x = 2$ selon une parabole. Donnez des équations paramétriques de la tangente à cette parabole au point $(2,1,-2)$.
4. Donnez l'équation du plan tangent au graphe de la fonction au point spécifié.
   a) $f(x,y) = 4 - 2y + y^2 - 2x^2 \quad , \quad (-1,2,2)$
   b) $f(x,y) = x + y\sin(x-y) \quad , \quad (3,3,3)$
5. Donnez les points où le plan tangent à la surface $z = y^2 - x^3 + 1$ est parallèle au plan $3x + y + z = 2$.
6. Calculez les dérivées secondes de $f(x,y) = x^2y^2 + e^{xy}$ et vérifiez que $f''_{xy} = f''_{yx}$.
7. Montrez que la fonction $u(t,x) = f(x+at) + g(x-at)$ où f et g sont des fonctions d'une variable deux fois dérivables satisfait l'équation $u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0$. (équation des cordes vibrantes.)
8. Soit $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$.
   a) En utilisant la règle de la chaine, calculez $\dfrac{dz}{dt}$.
   b) Y a-t-il une façon de faire la question a) ?
9. Calculez $\dfrac{dz}{dt}$ quand $t = 0$ si $z = f(x,y)$, $f'_x(2,-3) = a$, $f'_y(2,-3) = -5$, $x = 2\cos(t)$ et $y = -3 - 2\sin(t)$.
10. Calculez $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ lorsque $(s,t) = (1,1)$ si $z = f(x,y)$, $f'_x(1,3) = 2$, $f'_y(1,3) = -3$, $x = st$ et $y = 2s + t$.
11. On consdére $w = 2x^2 - xy + z^2$, $x = e^u\cos(v)$, $y = e^u\sin(v)$ et $z = e^u$.
    a) En utilisant la règle de la chaine, calculez $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.
    b) Y a-t-il une façon de faire la question a) ?
12. On considère $z = f(x,y)$, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.
    a) Exprimez $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ en fonction de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
    b) Exprimez $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ en fonction de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
    c) Montrez que $-y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

d) Utilisez les questions précédentes pour donner les solutions de $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

13. L'équation $xyz + yz^2 + 2x + y = 1$ définit implicitement z comme fonction de x et de y.

    a) Donnez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

    b) Utilisez la question précédente pour trouver l'équation du plan tangent à la surface $xyz + yz^2 + 2x + y = 1$ au point $(-1,1,2)$.

14. La relation $z\cos(xy) + y^2e^x = 0$ définit implicitement z comme fonction de x et de y. Donnez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ lorsque $x = 0$, $y = -1$ et $z = -1$.

15. Si $g(x, y) = x^2 + 2y^2 + z^2$ où z est définie implicitement par la relation $xe^{-y} + z\sin(y) = 0$, donnez $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

16. Calculez la dérivée de $f(x, y) = y^2e^x + \sin(xy)$ au point $(0,3)$ dans la direction du vecteur $3\vec{i} - 4\vec{j}$

17. Calculez la dérivée de $f(x, y) = xe^{xy}$ au point $(1,0)$ dans la direction du vecteur $\vec{i} + 3\vec{j}$

18. On considère la fonction $f(x, y, z) = \frac{64}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + 2z^2}}$.

    a) Calculez la dérivée de f au point $(2,-3,1)$ dans la direction du vecteur $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

    b) Y a-t-il une direction dans laquelle la dérivée de f au point $(2,-3,1)$ est égale à -5 ?

    c) Y a-t-il des directions dans lequelles la dérivée de f au point $(2,-3,1)$ est nulle ?

19. La température en un point (x, y) d'une plaque est donnée par $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 - 1$. Dans quelle direction, un insecte qui se trouve au point $(-2,1)$ doit-il se diriger s'il veut se réchauffer rapidement ?

20. Dans quelle direction la fonction $f(x, y, z) = \sin(\pi xyz)$ croit-elle le plus rapidement au point $(1,2,-1)$?

21. Dans quelle(s) direction(s) la dérivée de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \sin(xy)$ au point $(1,0)$ vaut-elle 1 ?

22. la profondeur d'un lac en un point (x, y) est donnée par $f(x, y) = 300 + \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2}$ où x et y sont les coordonnées à la surface du lac dans un système de coordonnées choisi.

    a) Si une personne se trouve au point $(3,2)$ et se déplace dans la direction de l'origine, le lac devient-il plus ou moins profond quand la personne commence à bouger ?

    b) Si une personne se trouve au point $(3,2)$, dans quelle direction doit-elle se diriger si elle veut aller dans l'eau la moins profonde ? Que vaut alors la dérivée directionnelle en ce point ?

23. La hauteur z d'une montagne est donnée par $z = 5000 - \frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{60}$. Si on se trouve au point $(40,30,4965)$, dans quelle direction doit-on se diriger pour descendre rapidement ?

24. On considère la fonction $f(x, y) = 5 - x^2 - 2y^2$.

a) Donnez un vecteur perpendiculaire à la courbe de niveau $f(x, y) = 2$ au point $(1,1)$.

b) Donnez un vecteur perpendiculaire à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1,1,2)$.

25. On considère le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$.

a) Donnez l'équation du plan tangent au cône au point $(-5,12,13)$.

b) Donnez des équations paramétriques de la droite normale au cône au point $(-5,12,13)$.

26. a) Donnez l'équation du plan tangent à la surface $S_1 : z = x^2 + y^2$ au point $(-2,1,5)$.

b) Donnez l'équation du plan tangent à la surface $S_2 : x+2y-z = -5$ au point $(-2,1,5)$. Que remarquez vous ?

c) En utilisant les questions a) et b), donnez des équations paramétriques de la tangente à la courbe intersection des surfaces S_1 et S_2 au point $(-2,1,5)$. (Chercher un vecteur parallèle à la tangente)

27. a) Donnez l'équation du plan tangent à la surface $S_1 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$ au point $(2,1,2)$.

b) Donnez l'équation du plan tangent à la surface $S_2 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ au point $(2,1,2)$.

c) En utilisant les questions a) et b) et la fonction résoudre de votre calculatrice, donnez des équations paramétriques de la tangente à la courbe intersection des surfaces S_1 et S_2 au point $(2,1,2)$.

28. Donnez les points critiques et déterminer leur nature.

a) $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x^2 - 3y^2 + 5$

b) $f(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^3 - 3y + 1$

c) $f(x, y) = x^3 - 12xy + 3y^2 - 1$

d) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy - 1$

29. Vérifiez que la fonction $f(x, y) = y^2 - 4yx^3 + 3y^6$ a un point critique qui est $(0,0)$ mais le test des dérivées secondes n'est pas concluant. Considérez la restriction de la fonction à la courbe $(0, t)$ et sa restriction à la courbe (t, t^3) et concluez.

30. Donnez la valeur maximale et la valeur minimale de $f(x, y) = 2x^3 - y^3$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

31. Donnez la valeur maximale et la valeur minimale de $f(x, y) = x^2 + 4y^3$ sur la courbe $x^2 + 2y^2 = 1$.

32. Donnez la valeur maximale et la valeur minimale de $f(x, y) = xy$ sur la courbe $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

33. Donnez la valeur maximale et la valeur minimale de $f(x, y) = 9x^2 - y^2 + 1$ sur la courbe $9x^2 + y^2 = 36$.

34. a) Donnez le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = xyz$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ où R est un nombre réel positif.

b) Déduire de la question a) le volume de la boite qu'on peut mettre dans une sphère de rayon R et dont le volume est maximal.

35. a) Donnez le maximum et le minimum de $f(x, y) = e^{-xy}$ sur l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$.

    b) Donnez le maximum et le minimum de $f(x, y) = e^{-xy}$ dans la région $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

36. a) Donnez le maximum et le minimum de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 9$.

    b) Donnez le maximum et le minimum de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$ dans le disque $x^2 + y^2 \leq 9$.

37. Donnez le point du plan $x + y + z = 1$ le plus proche de l'origine. (Vous pouvez aussi trouver ce point de façon géométrique)

38. Le plan $x + y + z = 1$ rencontre le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ selon une courbe qui est une ellipse. Donnez les points de cette ellipse qui sont les plus proches et les plus éloignés de l'origine.

39. Trouvez les points de la sphère unité de l'espace dont les sommes des coordonnées sont extrémales.

40. Donnez le minimum et le maximum de la fonction $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{4 + x^2 + 4y^2}$ sur la courbe $x^2 + 4y^2 = 8$.

Solutions des exercices

Chapitre 1

1. la distance de A à B est $\sqrt{14}$, la distance de A à C est $2\sqrt{14}$ et la diatance de B à C est $3\sqrt{14}$. Une distance est la somme des deux autres. Les points sont donc alignés.
2. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=16$
3. $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-8)^2=9$
4. La distance est $|z|$.
5. La distance est $\sqrt{x^2+y^2}$.
6. a) Droite verticale dans le plan qui passe par le point $(2,0)$.
   b) Plan horizontal dans l'espace qui contient le point $(0,0,2)$.
   c) Cercle dans le plan qui est centré à l'origine et de rayon 1.
   d) Cylindre dont l'axe est l'axe des z et de rayon 1.
   e) Hémisphère (Demi sphère supérieure centrée à l'origine et de rayon 1).
   f) Cercle dans l'espace centré en $(0,0,2)$, de rayon 1 et situé dans le plan horizontal $z=2$.
   g) Sphère centrée à l'origine et de rayon 2.
7. $3\vec{u}-2\vec{v}=-3\vec{i}-11\vec{j}+16\vec{k}$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{14}$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{69}$
8. $a=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ ou $a=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
9. $-b\vec{i}+a\vec{j}$
10. a) $-4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$
    b) $(-2,1,-4)$
11. a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$
    b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-10$
12. Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, alors
    $\vec{u}\cdot\vec{u}=x.x+y.y+z.z=x^2+y^2+z^2=\|\vec{u}\|^2$
13. a) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{17\sqrt{2}}{26}\right)$
    b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{418}}{209}\right)$

14. a) $5\vec{i} - 5\vec{j}$

    b) $-2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

15. Le vecteur qui joint les milieux est $\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$. Ce vecteur est donc parallèle à $(\vec{v} - \vec{u})$ et sa grandeur est la moitié de celle de $(\vec{v} - \vec{u})$.

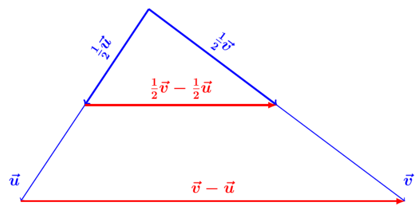


FIGURE 3.15 – Visualisation

16. a) $a = -6$

    b) $a < -6$

    c) $a = \frac{4}{3}$

17. a) $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $\qquad \cos(\beta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $\qquad \cos(\gamma) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

    b)

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\vec{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\vec{k}\right)\\ &= \|\vec{u}\|\Big(\cos(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\beta)\,\vec{j} + \cos(\gamma)\,\vec{k}\Big)\end{aligned}$$

    c)

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)&\\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

    d) Les cosinus directeurs sont $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$

18. $\vec{u} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,\vec{e} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{f}$

19. a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = 10\vec{k}$

    b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$

20. L'aire est $\dfrac{30\sin(30°)}{2} = 7.5\,cm^2$

21. a) $\dfrac{\sqrt{33}}{2} = 2.8723$

    b) $\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{29}} = 1.0667$

22. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $\|\vec{u} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \sin 0 = 0$ et donc $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Comme on a définit le produit vectoriel comme étant le vecteur nul si l'un des vecteurs est nul, on a aussi $\vec{0} \wedge \vec{0} = \vec{0}$.

23. $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = -\vec{j}$. Le produit vectoriel n'est pas associatif.

24. a) Faux. Par exemple, si on prend deux mutiples distincts de $\vec{u}$, le produit vectoriel de chacun d'eux avec $\vec{u}$ est nul.

    b) Faux. Par exemple, si on prend deux vecteurs distincts mais orthogonaux à $\vec{u}$, le produit scalaire de chacun d'eux avec $\vec{u}$ est nul.

25. a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$ et $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-5}$

    b) $\begin{cases} x = 4 - 7t \\ y = 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ et $\dfrac{x-4}{-7} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{4}$

    c) $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$ et $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{7}$

26. $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$

27. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-5} = \dfrac{z-1}{4}$

28. a) $(-3, 0, 4)$

    b) $\sqrt{6}$

    c) $\sqrt{6}$

    d) $A(-2, -2, 5)$

29. a) Le point $(1, -4, 3)$ vérifie les équations paramétriques (résoudre pour trouver $t = 2$) et comme les deux vecteurs de direction sont parallèles, il s'agit donc de la même droite.

    b) Non.

30. a) droites parallèles (distinctes).

    b) Non parallèles et sans point commun.

31. a) $3x - 2y - 6z = -25$

    b) $33x + 35y - 23z = 109$

    c) $3x - y + 7z = 34$

    d) $11x + y + 4z = 21$

    e) $19x - 10y - 4z = 27$

32. a) La droite D est parallèle au plan P.

b) $2x+3y-z=9$

33. $19x-6y-7z=-15$

34. a) $(-11,-6,0)$

b) $-10\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$

c) : $\begin{cases} x=-11-10t \\ y=-6-6t \\ z=-t \end{cases}$

d) On résout le système de deux équations en posant par exemple $z=0$ et on obtient $(-11,-6,0)$ et si on fait la même chose a en posant $z=1$, on obtient le point $(-1,0,1)$. On cherche alors des équations paramétriques de la droite passant par les deux points trouvés.

e) On utilise un outil de cacul symbolique pour résoudre un système de deux équations à 3 inconnues x, y et z et on aura des équations paramétriques de la droite.

35. $3x+2y+5z=36$.

36. a) Par exemple $2x-5y+3z=10$.

b) Par exemple $2x-y-3z=9$.

37. $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+2t \\ z=3-t \end{cases}$

38. a) On a vu que la distance d'un point C à la droite passant par deux points A et B est donnée par $\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. Comme $\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$, la formule de la distance devient $\dfrac{|k|\|\overrightarrow{AC}\wedge\vec{u}\|}{|k|\|\vec{u}\|}=\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

b) Les vecteurs de direction des deux droites $2\vec{i}+10\vec{j}-4\vec{k}$ et $3\vec{i}+15\vec{j}-6\vec{k}$ sont parallèles $3\vec{i}+15\vec{j}-6\vec{k}=\dfrac{3}{2}(2\vec{i}+10\vec{j}-4\vec{k}))$.

c) $\dfrac{\sqrt{1370}}{10}\approx 3.7$

39. a) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur pependiculaire aux deux droites et la distance cherchée est la grandeur de la projection vectorielle du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sur le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui est $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.

b) $\dfrac{22}{\sqrt{195}}\approx 1.5755$

40. a) 6

b) $\dfrac{4}{3\sqrt{30}}$

Chapitre 2

1. a) Plan contenant le triangle de sommets $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ et $(0,0,2)$.

b) Cylindre parabolique.

c) Paraboloide.

d) Demi cône de sommet $(0,0,1)$.

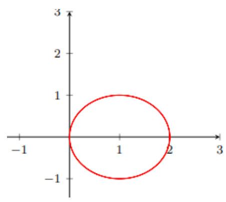
e) Cylindre circulaire infini dont l'axe est l'axe des y et de rayon 2.

2. a) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

   b) $\left(5, \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

3. $r = 4$

4. La courbe en coordonnées polaires $r = 2\cos(\theta)$ est un cercle (voir illustration et explication ci-dessous).



(a) Courbe $r = 2\cos(\theta)$.

FIGURE 3.16 – Courbe en polaires

Remarque : En multipliant par r les deux membres de l'équation, on obtient $r^2 = 2r\cos\theta$ et par suite $x^2 + y^2 = 2x$. Cette dernière équation s'écrit $(x-1)^2 + y^2 = 1$ qui dans le plan représente le cercle centré en $(1,0)$ et de rayon 1.

5. a) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -2)$, $\left(\sqrt{6}, \frac{\pi}{4}, \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$

   b) $(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 5)$, $\left(\sqrt{43}, \frac{7\pi}{4}, \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{43}}\right)\right)$

6. $r^2 + z^2 = 4$, $\rho = 2$

7. $r = 1$, $\rho = \dfrac{1}{\sin(\phi)}$ avec $0 < \phi < \pi$

8. $\rho^2 = 4\rho\cos\phi$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ qu'on peut écrire $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. On a alors une sphère centrée en $(0,0,2)$ et de rayon 2.

9. a) Droite qui passe par le point $(-1,1)$ et parallèle au vecteur $(2,4)$. On peut aussi éliminer t pour avoir $y = 2x + 3$.

   b) Parabole $x = y^2 - 1$.

   c) On a $x^2 + y^2 = 9$. C'est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 3.

   d) On a $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ qui représente une ellipse.

10. a)

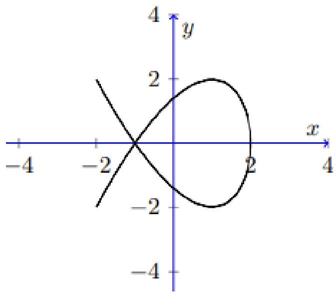


FIGURE 3.17 – Courbe $\begin{cases} x = 2\cos(2\pi t) \\ y = 2\sin(3\pi t) \end{cases}$

b)

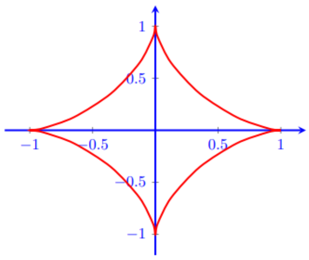


FIGURE 3.18 – Courbe $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$

c)

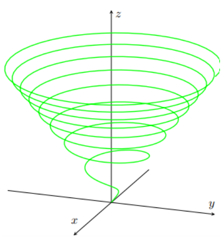


FIGURE 3.19 – $\begin{cases} x = \sqrt{t}\cos(2t) \\ y = \sqrt{t}\sin(2t) \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$. Cette courbe se trouve sur le demi cône $x^2 + y^2 = z^2$ et $z \geq 0$

d)

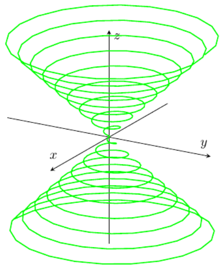


FIGURE 3.20 – $\begin{cases} x = t\cos(2t) \\ y = t\sin(2t) \\ z = t \end{cases}$. Cette courbe se trouve sur le demi cône $x^2 + y^2 = z^2$

11. $(1,1,-2)$ et $(-3,3,6)$.

12. $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sqrt{8}|\cos(t)| \quad \text{avec } 0 \le t \le 2\pi \\ z = \sin(t) \end{cases}$

13. a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -2\pi t \\ z = 1 + t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \\ z = 2 - 2\sin(t) \end{cases}$ avec $0 \le t \le 2\pi$, $\begin{cases} x = -\sqrt{3} - t \\ y = 1 - \sqrt{3}t \\ z = 1 + \sqrt{3}t \end{cases}$

15. a) On résout en x, y et z et on obtient $\begin{cases} x = \dfrac{-\sqrt{2(34-t^2)}}{2} \\ y = t \\ z = \dfrac{\sqrt{2(34+t^2)}}{2} \end{cases}$ et le point $(-3,4,5)$ correspond à $t = 4$.

    b) Des équations paramétriques de la tangente à la courbe C au point $(-3,4,5)$ sont $\begin{cases} x = -3 + \dfrac{2}{3}t \\ y = 4 + t \\ z = 5 + \dfrac{2}{5}t \end{cases}$

    c) $\begin{cases} x = \sqrt{17}\cos(t) \\ y = \sqrt{34}\sin(t) \\ z = \sqrt{17(1+\sin^2(t))} \end{cases}$ avec $0 \le t \le 2\pi$ et le point $(-3,4,5)$ correspond à $t = \pi - \sin^{-1}(\dfrac{2\sqrt{34}}{17})$.
    Des équations paramétriques de la tangente à la courbe au point $(-3,4,5)$ sont

$$\begin{cases} x = -3 - 2\sqrt{2}t \\ y = 4 - 3\sqrt{2}t \\ z = 5 - \dfrac{6\sqrt{2}}{5}t \end{cases}$$

d) Les vecteurs de direction qu'on peut lire dans les deux équations $(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{5})$ et $(-2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, \frac{-6\sqrt{2}}{5})$ sont parallèles.

16. a) $\begin{cases} x = R\cos(\frac{s}{R}) \\ y = R\sin(\frac{s}{R}) \end{cases}$ où $0 \leq s \leq 2\pi R$.

b) $\begin{cases} x = \cos(\frac{2}{\sqrt{5}}s) \\ y = \sin(\frac{2}{\sqrt{5}}s) \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}}s \end{cases}$ où $s \geq 0$,

17. a) 6

b) $\pi\sqrt{5}$

18. a) correspond à 2)
b) correspond à 3)
c) correspond à 1)

19. $\begin{cases} x = 3\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = 3\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = 3\cos(\varphi) \end{cases}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$

20. Première paramétrisation :
$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + u^2 + v^2 \end{cases}$ u et v réels

Deuxième paramétrisation :

$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = 1 + r^2 \end{cases}$ $r \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Chapitre 3

1. Courbes de niveau et graphes.

a) $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

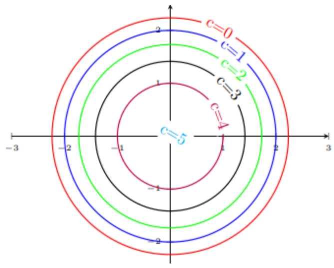


FIGURE 3.21 – Courbes de niveau de $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$

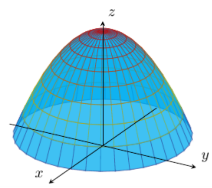


FIGURE 3.22 – Graphe de la foction $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

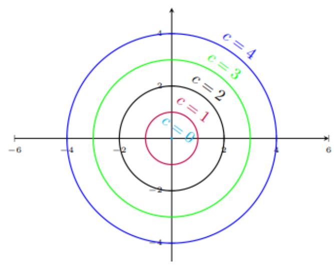


FIGURE 3.23 – Courbes de niveau de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

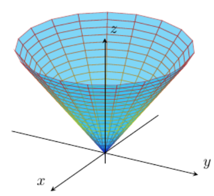


FIGURE 3.24 – Graphe de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$

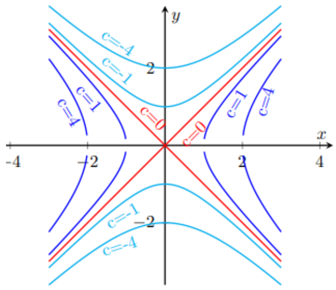


FIGURE 3.25 – Courbes de niveau de $f(x,y) = x^2 - y^2$

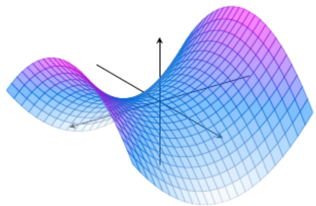


FIGURE 3.26 – Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$

2. a) $f'_x(x,y,z) = -\dfrac{100x}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$, $f'_y(x,y,z) = -\dfrac{100y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$, $f'_z(x,y,z) = -\dfrac{100z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$

   b) $f'_x(x,y,z) = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$, $f'_y(x,y,z) = \dfrac{x}{1+x^2y^2}$

3. Un vecteur tangent est $(0,1,f'_y(2,1)) = (0,1,-6)$. Des équations paramétriques de la tangente sont $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1+t \\ z = -2-6t \end{cases}$

4. a) $z = 4x+2y+2$

   b) $z = 4x-3y$

5. $(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ et $(-1,-\frac{1}{2},\frac{9}{4})$

6. $f''_{xx} = y^2e^{xy}+2y^2$, $f''_{yy} = x^2e^{xy}+2x^2$ et $f''_{xy} = f''_{yx} = (xy+1)e^{xy}+4xy$

7. Comme $u''_{xx}(t,x) = f''(x+at)+g''(x-at)$ et $u''_{tt}(t,x) = a^2f''(x+at)+a^2g''(x-at)$, il en découle que $u''_{tt}(t,x) - a^2u''_{xx}(t,x) = 0$.

8. a) $\dfrac{dz}{dt} = \cos^2(t) - \sin^2(t)$

   b) En remplaçant x et y dans la fonction et en dérivant par rapport à t.

9. $\dfrac{dz}{dt} = 10$ à $t = 0$.

10. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = -4$ et $\dfrac{\partial z}{\partial t} = -1$ en $(s,t) = (1,1)$.

11. a) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 2e^{2u}(2\cos^2(v) - \sin(v)\cos(v)+1)$

    $\dfrac{\partial w}{\partial v} = -e^{2u}(2\cos^2(v)+4\sin(v)\cos(v)-1)$

    b) En remplaçant x et y dans la fonction et en dérivant par rapport à u et par rapport à v.

12. .

 a) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \cos(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sin(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial y}$
 $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial x} + r\cos(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial y}$

 b) Comme $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial x} + r\cos(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on en déduit $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

 c) L'équation $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ devient $-\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ et donc $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0$. La fonction z ne dépend pas donc de θ mais seulement de r. La solution est $z = f(r)$ et comme $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Par exemple $z = x^2 + y^2 + \cos(x^2+y^2) - 3e^{x^2+y^2}$

13. a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz+2}{y(x+2z)}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz+z^2+1}{y(x+2z)}$

 b) $z = -\dfrac{4}{3}x - y + \dfrac{5}{3}$ ou $4x+3y+3z=5$

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ lorsque $x=0$, $y=-1$ et $z=-1$.

15. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - \dfrac{2ze^{-y}}{\sin(y)}$

 $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - \dfrac{2z(-xe^{-y}+z\cos(y))}{\sin(y)}$

16. $\dfrac{12}{5}$

17. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

18. a) $-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

 b) Non, car la valeur minimale de la dérivée qui est $-\|\nabla f(2,-3,1)\| = -\sqrt{17}$ est supérieur à -5.

 c) Oui, dans toute direction orthogonle à $\nabla f(2,-3,1)$ comme par exemple $3\vec{i}+2\vec{j}$ ou $3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

19. $5\vec{i}+4\vec{j}$

20. $-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

21. Dans les directions de $\vec{j}$ ou $4\vec{i}-3\vec{j}$.

22. a) La dérivée directionnelle qui est $-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ est négative, donc le lac devient moins profond.

 b) La direction est $-\vec{i}+\vec{j}$ et la dérivée directonnelle vaut $-\sqrt{8}$.

23. $\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

24. a) $\nabla f(1,1) = -2\vec{i}-4\vec{j}$ ou simplement $\vec{i}+2\vec{j}$.

 b) On prend par exemple $-f'_x((1,1)\vec{i} - f'_y((1,1)\vec{j} + \vec{k} = 2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

25. a) On écrit l'équation sous la forme $x^2+y^2-z^2=0$ et on obtient $5x-12y+13z=0$.

b) $\begin{cases} x = -5+5t \\ y = 12-12t \\ z = 13+13t \end{cases}$

26. a) $4x-2y+z=-5$

    b) $x+2y-z=-5$ (Remarquez que la surface donnée est un plan et donc elle coincide avec son plan tangent en tout point.)

    c) Par exemple $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1+t \\ z = 5+2t \end{cases}$

27. a) $x+y+z=5$

    b) $2x+y-2z=1$

    c) Résolvez le système d'équations de deus équations à trois iunconnues x, y et z.
    $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 9-4t \\ z = t \end{cases}$

28. a) Minimum local en $(2,0)$, maximun local en $(0,0)$ et points selles en $(1,1)$ et en $(1,-1)$

    b) Minimum local en $(0,1)$ et point selle en $(0,-1)$

    c) Minimum local en $(8,16)$ et point selle en $(0,0)$

    d) Minimum local en $(0,0)$ et point selle en $(2,0)$

    e) Maximum local en $(-1,-1)$ et point selle en $(0,0)$

29. On remarque d'abord que $f(0,0)=0$. Si on s'approche de $(0,0)$ selon la courbe $(0,t)$, on a $f(0,t) = t^2+3t^6 > 0 = f(0,0)$ pout $t \neq 0$ et si on s'approche de $(0,0)$ selon la courbe (t,t^3), on a $f(t,t^3) = 3t^{18}-3t^6 = 3t^6(t^{12}-1) < 0 = f(0,0)$ lorsque $-1 < t < 1$.

30. la valeur maximale est 2 et la valeur minimale est -2.

31. la valeur maximale est $\sqrt{2}$ et la valeur minimale est $-\sqrt{2}$.

32. la valeur maximale est 6 et la valeur minimale est -6.

33. la valeur maximale est 37 et la valeur minimale est -35.

34. a) Le maximum est $\frac{\sqrt{3}}{9}R^3$ et le minimum est $-\frac{\sqrt{3}}{9}R^3$.

    b) Le volume maximal est $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.

35. a) Le maximum est $e^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ et le minimum est $e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

    b) Le maximum est $e^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ et le minimum est $e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

36. a) Le maximum est $10+6\sqrt{5}$ et le minimum est $10-6\sqrt{5}$.

    b) Le maximum est $10+6\sqrt{5}$ et le minimum est -4.

37. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

38. Les points les plus proches sont $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et le point le plus lointain est $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$.
39. Le maximum est au point $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ et le minimum au point $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.
40. Le maximum est $f(2,1) = \frac{1}{3}$ et le minimum est $f(-2,-1) = -\frac{1}{3}$.