Sections 1.1 à 1.2

1. Soient les vecteurs suivants :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Calculez si possible les opérations suivantes. Sinon, expliquez pourquoi.
   (a) **a**+**b**
   (b) **a**-**c**
   (c) **a**+5**d**
   (d) 3**d**-**e**
   (e) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$
   (f) $2\mathbf{d} + 4\mathbf{e} - \mathbf{b}$

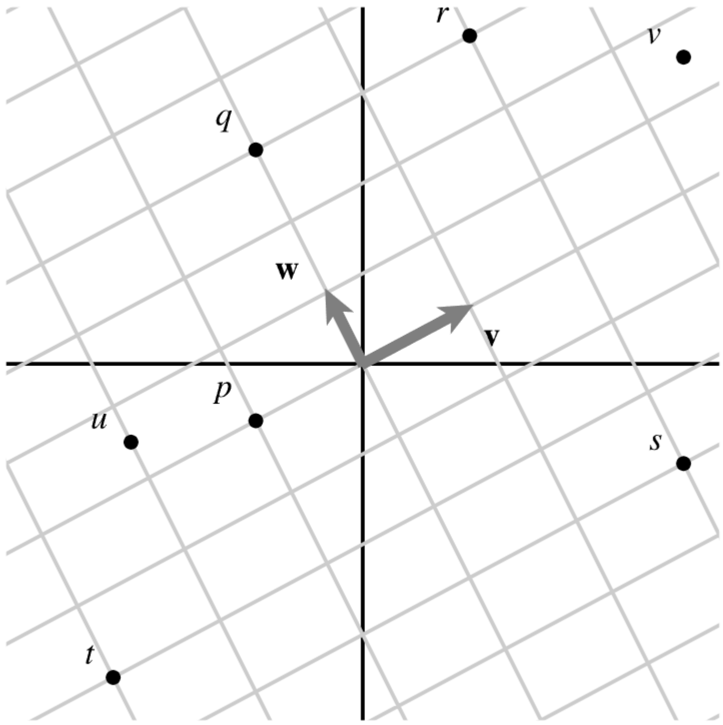
2. Soient les vecteurs $\vec{a} = (-1, 1)$ et $\vec{b} = (1, -3)$. Cet exercice vise à développer une intuition visuelle des opérations de bases sur les vecteurs.

   (a) Calculez et représentez graphiquement les vecteurs $\vec{a}, 2\vec{a}, \vec{b}$ et $2\vec{b}$.
   (b) Quel est l'effet géométrique de multiplier un vecteur par une constante positive ?
   (c) Calculez et représentez graphiquement les vecteurs $-\vec{a}, -2\vec{a}, -\vec{b}$ et $-2\vec{b}$.
   (d) Quel est l'effet géométrique de multiplier un vecteur par une constante négative ?
   (e) Calculez et représentez graphiquement l'addition $\vec{a} + \vec{b}$.
   (f) Calculez et représentez graphiquement l'addition $2\vec{a} - \vec{b}$.

3. Soient les vecteurs $\vec{a} = (-1, 1)$ et $\vec{b} = (1, -3)$. Cet exercice vise à développer une intuition visuelle des combinaisons linéaires de vecteurs.

   (a) Calculez les vecteurs de la forme $\vec{b} + s\vec{a}$ pour $s = -2 - 1, 0, 1, 2$ et représentez graphiquement les 5 vecteurs obtenus dans un même graphique.
   (b) Que dessinent l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{b} + s\vec{a}$ pour $s \in \mathbb{R}$?
   (c) Que dessineraient l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{a} + r\vec{b}$ pour $r \in \mathbb{R}$?
   (d) Étudions maintenant les vecteurs de la forme $r\vec{a} + s\vec{b}$. Représentez graphiquement les 9 vecteurs obtenus pour $r, k \in \{-1, 0, 1\}$ dans un plan cartésien.
   (e) Pouvez-vous dessiner (sans les calculers) les vecteurs qu'on obtiendraient pour $r, k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$?
   (f) Que dessinent l'ensemble des vecteurs de la forme $r\vec{a} + s\vec{b}$ pour des coefficients r, s entiers ?
   (g) Et si r, s sont des réels ?
   (h) Est-ce que le vecteur $(-1, -3)$ pourrait s'écrire sous la forme $r\vec{a} + s\vec{b}$? Si oui, que valent r et s ?
   (i) Est-ce que tout vecteur (x, y) pourrait s'écrire sous la forme $r\vec{a} + s\vec{b}$ où $r, s \in \mathbb{R}$?

4. Soient les vecteurs **v** et **w** représentés ci-dessous.



   (a) Exprimez les points illustrés comme combinaison linéaire de **v** et **w**.
   (b) Dessinez la ligne décrite par les vecteurs de la forme $k\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

5. Soient les vecteurs $\vec{a} = (1,3)$, $\vec{b} = (-1,1)$ et $\vec{c} = (4,2)$.

   (a) Calculez $\vec{a} + 2\vec{b}$ et représentez-le graphiquement.
   (b) Calculez $\vec{c} - \vec{a}$ et représentez-le graphiquement.
   (c) Calculez $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ et représentez-le graphiquement.
   (d) Calculez les normes $||\vec{a}||$, $||\vec{b}||$ et $||\vec{c}||$.
   (e) Donnez un vecteur unitaire qui pointe dans la même direction que $\vec{a}$.
   (f) Donnez un vecteur unitaire qui pointe dans la même direction que $\vec{a} + 2\vec{b}$.
   (g) Exprimez $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

6. Soient les points du plan de coordonnées $A(2,3)$, $B(-1,4)$ et $C(5,-1)$.

   (a) Déterminez les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déterminez la norme du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   (c) Quelles sont les coordonnées du point D si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$?

7. L'apport nutritif d'une portion de céréales est indiqué sur leur emballage. Par exemple, une portion de Cheerios équivaut à 111 calories, 140 mg de sodium et 1.2 g de protéines. On pourrait représenter ceci dans le vecteur $\vec{C} = (111, 140, 1.2)$. Une portion de Honeycomb quant à elle apporte 120 calories, 105 mg de sodium et 1.0 g de protéines. [TI]

   (a) Donnez le vecteur décrivant l'apport nutritif d'une portion de Honeycomb.

   (b) Donnez une expression vectorielle représentant l'apport de m portions de Cheerios et n portions de Honeycomb.

   (c) Combien de portions de chaque céréales avez-vous mangé si votre apport est de 342 calories, 385 mg de sodium et 3.4 g de protéines ?

   (d) Si votre amie à consommé 250 calories, 200 mg de sodium et 4 g de protéines, que pouvez-vous conclure sur son déjeuner ?

Sections 1.3 à 1.4

8. Soient les vecteurs $\vec{e} = (1, 1)$, $\vec{f} = (2, -1)$, $\vec{g} = (2, -3)$ et $\vec{h} = (6, 4)$.

   (a) Calculez le produit scalaire $\vec{f} \cdot \vec{g}$.

   (b) Déterminez toutes les paires de vecteurs qui sont orthogonaux.

   (c) Calculez les angles entre chaque paire de vecteurs distincts. [TI]

   (d) Calculez la projection de $\vec{h}$ sur $\vec{e}$ et représentez-la graphiquement.

   (e) Déterminez x pour que le vecteur $\vec{v} = (5, x)$ soit orthogonal à $\vec{g}$.

9. Soient les vecteurs suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminez toutes les paires de vecteurs qui sont orthogonaux.

   (b) Calculez les angles entre chaque paire de vecteurs distincts. [TI]

   (c) Calculez la projection de $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{u}$.

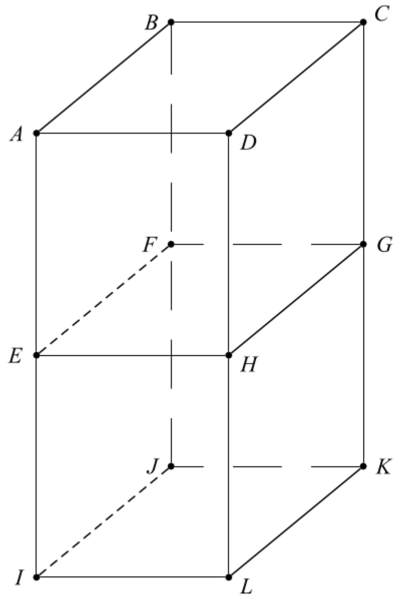
   (d) Calculez la projection de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{u}$.

   (e) Calculez $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

   (f) Trouvez un vecteur unitaire qui est perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. [TI]

   (g) Trouvez l'aire du parallélogramme engendré par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$. [TI]

10. Soient les points de $\mathbb{R}^3$ représentés ci-dessous.



- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2$
- $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 2$
- $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = 2$
- $\left\|\overrightarrow{EI}\right\| = 2$

(a) Calculez $||\overrightarrow{HC}||$.

(b) Calculez $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GC}$.

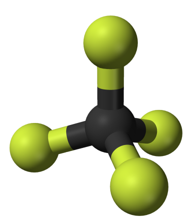
(c) Calculez $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{LK}$.

(d) Calculez $\overrightarrow{LG} \cdot \overrightarrow{LK}$.

(e) Calculez $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Ceci correspond au vecteur $\overrightarrow{AX}$ pour quel point X?

(f) Quel est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FH}$? [TI]

11. Une molécule de tétrafluorocarbone CF_4 se représente géométriquement par un tetraèdre régulier. Les atomes de fluor se situent aux sommets $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $D(1,0,1)$, $E(0,1,1)$ tandis que l'atome de carbone est au barycentre $C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. [TI]



(a) Vérifiez que le triangle ABD est équilatéral.

(b) Vérifiez que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

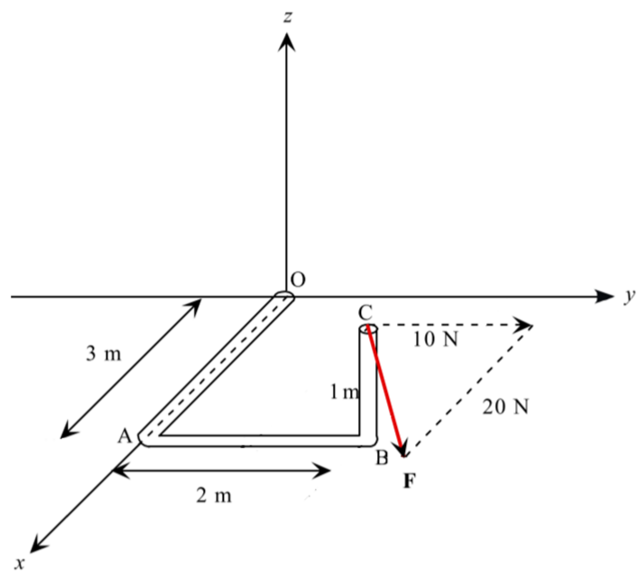
(c) Vérifiez que l'atome de carbone est équidistant des atomes de fluor.

(d) Trouvez l'angle de liaison θ entre l'atome de carbone et deux atomes de fluor.

(e) Calculez le volume du tetraèdre.

(f) Chaque atome de fluor exerce une force d'attraction électromagnétique sur les électrons du carbone qui est inversement proportionnelle au carré de la distance. Donnez une expression pour chacune de ces forces et montrez que la somme de ces forces sur l'atome de carbone est nulle. Ceci permet de conclure que la molécule est non polaire.

12. Un levier est attaché à l'origine O et on applique une force $\vec{F}$ à son autre extrémité C tel que représenté sur le schéma ci-dessous. [TI]



Calculez le moment de force $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ sachant que le vecteur $\vec{r}$ est le vecteur reliant le point d'attache au point où on applique la force.

Réponses

1.

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

(c) Non-défini

(d) $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}13\\-3\\-4\end{pmatrix}$

(f) Non-défini

2.

(a) $\vec{a} = (-1,1)$ $\quad 2\vec{a} = (-2,2)$ $\quad \vec{b} = (1,-3)$ $\quad 2\vec{b} = (2,-6)$

(b) La constante multiplie la longueur du vecteur (sans changer le sens ou l'orientation).

(c) $-\vec{a} = (1,-1)$ $\quad -2\vec{a} = (2,-2)$ $\quad -\vec{b} = (-1,3)$ $\quad -2\vec{b} = (-2,6)$

(d) Le signe négatif change le sens du vecteur.

(e) $(0,-2)$

(f) $(-3,5)$

3.

(a) $\vec{b} - 2\vec{a} = (3,-5)$ $\quad \vec{b} - \vec{a} = (2,-4)$ $\quad \vec{b} = (1,-3)$ $\quad \vec{b} + \vec{a} = (0,-2)$ $\quad \vec{b} + 2\vec{a} = (-1,-1)$

(b) Les points de la forme $\vec{b} + s\vec{a}$ se regroupent sur une droite parallèle au vecteur $\vec{a}$ et passant par le point $\vec{b}$ depuis l'origine.

(c) Une droite parallèle à $\vec{b}$ passant par le point $\vec{a}$.

(d) -

(e) -

(f) Ils forment un réseau de points situés à des extrémités de losanges (ou autrement, ils forment un nouveau quadrillage qui pourrait servir de système d'axes).

(g) Ils dessinent alors tous les points du plan.

(h) Oui, $(-1,-3) = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

(i) Oui, voir la réponse du g). Tout point du plan peut s'obtenir comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

4.

(a) $p = -\vec{v}$ $\quad q = 3\vec{w}$ $\quad r = 2\vec{v} + 3\vec{w}$ $\quad s = 2\vec{v} - 3\vec{w}$ $\quad t = -3\vec{v} - 2\vec{w}$ $\quad u = -2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ $\quad v = 3.5\vec{v} + 1.5\vec{w}$

(b) La ligne passant par le point t et qui est parallèle au vecteur $\vec{v}$.

5.

(a) $(-1, 5)$

(b) $(3, -1)$

(c) $(4, 6)$

(d) $||\vec{a}|| = \sqrt{10}$ $\quad ||\vec{b}|| = \sqrt{2}$ $\quad ||\vec{c}|| = \sqrt{20}$

(e) $\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

(f) $\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

(g) $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{2}\vec{b}$

6.

(a) $\vec{AB} = B - A = (-3, 1)$

(b) $||\vec{BC}|| = \sqrt{61}$

(c) $D(2, 0)$

7.

(a) $\vec{H} = (120, 105, 1.0)$

(b) apport : $m\vec{C} + n\vec{H}$

(c) 2 portions de C et 1 portion de H

(d) Son apport ne s'exprime pas comme une combinaison linéaire de $\vec{C}$ et $\vec{H}$. Elle a donc mangé autre chose.

8.

(a) 7

(b) $\vec{g}$ et $\vec{h}$ est la seule paire de vecteurs orthogonaux

(c) $\theta_{ef} = 71.565°$ $\quad \theta_{eg} = 101.310°$ $\quad \theta_{eh} = 11.310°$ $\quad \theta_{fg} = 29.745°$ $\quad \theta_{fh} = 60.255°$ $\quad \theta_{gh} = 90°$

(d) $(5, 5)$

(e) $x = 10/3$

9.

(a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la seule paire orthogonale.

(b) $\theta_{uv} = 90°$ $\quad \theta_{uw} = 42.510°$ $\quad \theta_{vw} = 62.948°$

(c) $\begin{pmatrix} 144/53 \\ 216/53 \\ -36/53 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{0}$

(e) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -26 \end{pmatrix}$

(f) $\frac{1}{||\vec{v} \wedge \vec{w}||}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(g) $||\vec{u} \wedge \vec{w}|| = \sqrt{33}$

10.

(a) $\sqrt{8}$

(b) 0 car ils sont orthogonaux

(c) -4

(d) 4

(e) $\vec{AI}$

(f) $60°$

11.

(a) $||\vec{AB}|| = ||\vec{BD}|| = ||\vec{DA}|| = \sqrt{2}$

(b) $\vec{AD}$ ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

(c) $||\vec{CA}|| = ||\vec{CB}|| = ||\vec{CD}|| = ||\vec{CE}|| = \sqrt{3}/2$

(d) $\theta_{ACB} = 109.47°$

(e) $V = \frac{1}{3} A_{base} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ||\vec{AB} \wedge \vec{AD}|| \cdot ||\text{proj}_{\vec{AB} \wedge \vec{AD}} \vec{AE}|| = \frac{1}{3}$

(f) $\frac{\vec{CA}}{||\vec{CA}||^2} + \frac{\vec{CB}}{||\vec{CB}||^2} + \frac{\vec{CD}}{||\vec{CD}||^2} + \frac{\vec{CE}}{||\vec{CE}||^2} = \vec{0}$

12. $\vec{M} = (3, 2, 1) \wedge (20, 10, 0) = (-10, 20, -10)$ Nm