Sections 2.1 à 2.2

1. Réécrivez les systèmes d'équations linéaires suivants dans une matrice augmentée et trouvez l'ensemble solution en échelonnant la matrice à main.

$$(a)\ \begin{cases} 2x+y & =0 \\ 2y & =3-x \\ -2x & =6-2y \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} -x_1+2x_2+x_3 & =2 \\ 3x_1 \qquad +2x_3 & =-1 \\ -x_1-x_2+x_3 & =2 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} 2a+b-c-3d & =0 \\ -a-b+2c+d & =3 \end{cases}$$

2. Réécrivez les systèmes d'équations linéaires suivants dans une matrice augmentée et donnez leur ensemble solution à l'aide la commande rref() de la TI. [TI]

(a) $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ 3x=8+2y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+2y=4+z \\ 2x-y=7-3z \\ 3x+z=10 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x-y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x+y-z+3w=5 \\ 3x-2y+w=8 \\ -x+2y-z+w=2 \\ 4x-y+z-2w=6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x+6y=5 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x+y=2+z \\ 2x-2y+2z=4 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=6 \\ 3x+z=4 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x+2y-z+3w=4 \\ 4x-2y+6z-4w=14 \\ 3x+y+2z+w=11 \\ 6x+2y+4z+2w=5 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 3x-2y+z-4w=6 \\ x+3y-z-w=4 \\ 2x+4y-3w=2 \\ 4x+y-5w=10 \\ 5x+2y+z-7w=8 \end{cases}$

3. Équilibrer les réactions chimiques suivantes à l'aide de systèmes d'équations linéaires et de la méthode d'échelonnage.

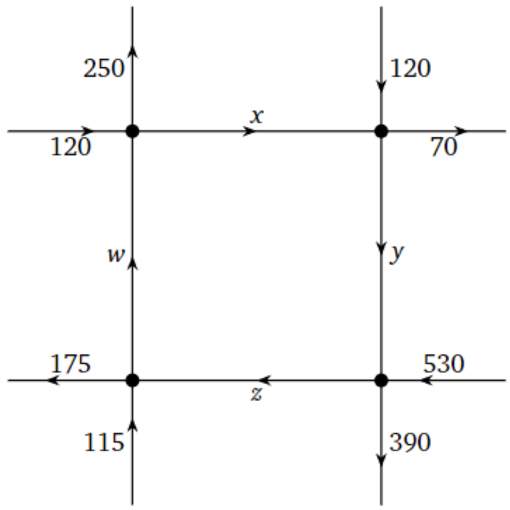
(a) $Al_2O_3+C \rightarrow Al+CO_2$

(b) $B_2S_3+H_2O \rightarrow H_3BO_3+H_2S$ [TI]

(c) $NaHCO_3+H_3C_6H_5O_7 \rightarrow Na_3C_6H_5O_7+H_2O+CO_2$ [TI]

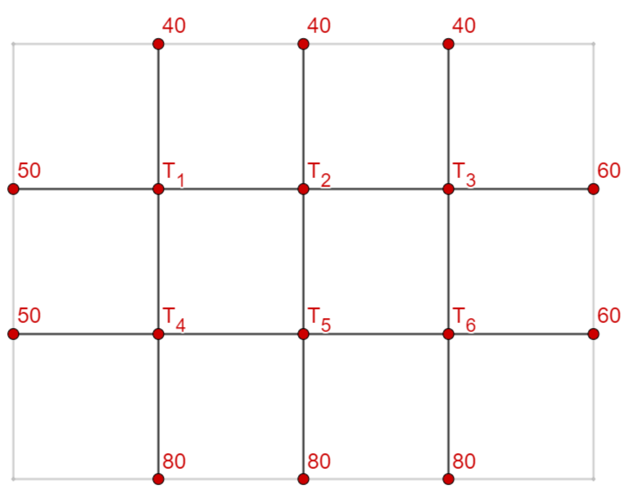
(d) $MnS+As_2Cr_{10}O_{35}+H_2SO_4 \rightarrow HMnO_4+AsH_3+CrS_3O_{12}+H_2O$ [TI]

4. Le diagramme suivant représente le flot de traffic automobile autour de quatre intersections. Chaque rue est à sens unique et la quantitée de véhicules par heure qui y circule est mesurée et indiquée sur le diagramme. Quatre segments ne sont toutefois pas munis de détecteurs leur flot est inconnu. [TI]



   (a) Sachant que le nombre de véhicules entrant dans chaque intersection doit être égal au nombre de véhicules sortant, donnez une équation pour chaque intersection.
   (b) Exprimez votre système d'équations linéaires dans une matrice augmentée.
   (c) Échelonnez votre matrice augmentée et donnez l'ensemble solution.
   (d) Trouvez une solution du système où $z = 60$ véhicules/h.
   (e) Votre réponse précédente semble-t-elle réaliste? Donnez une contrainte sur le paramètre pour que les solutions soient réalistes.

5. Les températures en $^\circ C$ aux différents bords d'une fine plaque de métal sont maintenues constantes. On suppose qu'à l'équilibre, la température aux différents points du quadrillage ci-dessous T_1 à T_6 est égale à la moyenne de ses quatre points adjacents. Formez un système d'équations linéaires et utilisez la commande rref() de la TI pour trouver les températures T_1 à T_6. [TI]



Sections 2.3 à 2.4

6. Soient les vecteurs $\vec{a} = (1,3)$, $\vec{b} = (-1,1)$, $\vec{c} = (4,2)$ et $\vec{d} = (-2.-6)$.

   (a) Exprimez $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

   (b) Exprimez $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

   (c) Exprimez $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{d}$.

   (d) Pouvez expliquez le nombre de solutions que vous avez obtenus à chaque réponse ?

7. Soient les vecteurs $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (2,-1,-1)$ et $\vec{w} = (0,2,3)$. [TI]

   (a) Exprimez $\vec{a} = (4,5,1)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   (b) Peut-on exprimer $\vec{a} = (4,5,1)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seulement ?

   (c) Peut-on exprimer $\vec{c} = (10,1,4)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seulement ?

   (d) Quelle est la différence entre le scénario (b) et (c) ?

   (e) Peut-on exprimer $\vec{d} = (1,2,3,4)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

8. Une parfumerie fabrique deux types de parfums. Le premier contient 20% d'essence A et 80% d'essence B, tandis que le second contient 50% d'essence A et 50% d'essence B. L'entreprise souhaite produire 100 litres de parfum du premier type et 200 litres du second, en utilisant le moins d'essence A possible. Combien de litres d'essence A sont nécessaires ?

9. Une entreprise fabrique trois alliages de métaux, A, B et C. L'alliage A contient 30% de cuivre, 40% de zinc et 30% de nickel, l'alliage B contient 40% de cuivre, 30% de zinc et 30% de nickel, tandis que l'alliage C contient 50% de cuivre, 20% de zinc et 30% de nickel. La société souhaite créer un nouvel alliage, l'alliage D, qui contient 45% de cuivre, 25% de zinc et 30% de nickel, en mélangeant les alliages A, B et C. Si elle veut produire 500 kg de l'alliage D et utiliser le moins possible d'alliage C, déterminez la quantité de chaque alliage à utiliser. [TI]

10. L'ÉTS désire construire un nouveau bâtiment pour les résidences universitaires. Pour chaque étage, trois plans sont possibles. Le plan A décrit un étage possédant 3 appartements à deux chambres, 7 appartements à une chambre et 8 studios. Le plan B contient 4 appartements à deux chambres, 4 appartements à une chambre et 8 studios. Le plan C lui possède 5 appartements à deux chambres, 3 appartements à une chambre et 9 studios. [TI]

    (a) Que représente le vecteur $x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$?

    (b) Écrivez une équation vectorielle calculant le nombre total de logements de chaque type.

    (c) Peut-on construire le bâtiment de telle sorte qu'il possède 32 appartements deux chambres, 36 une chambre et 66 studios ?

(d) Donnez toutes les solutions possibles à la configuration du (c). Quel est le plus petit nombre d'étages nécessaire ?

11. Considérez le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ 4x - 2y + 6z = 8 \\ 6x - 3y + 9z = 11 \end{cases}$$

Répondez aux questions suivantes **sans faire de calcul**.

(a) Exprimez le système dans une matrice augmentée $(A|\vec{b})$.
(b) Quel est le rang de la matrice des coefficients rang(A) ? (Observez les colonnes de A)
(c) Le système est-il compatible ? (Pensez au système comme une équation vectorielle)
(d) Quelle est la dimension de l'espace Nul de A ? (Pensez au théorème du rang)

12. Considérez le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

(a) Représentez l'espace solution comme une intersection.
(b) Représentez l'espace solution comme translation de l'espace nul.
(c) Représentez graphiquement le SEL comme équation vectorielle.
(d) Que valent rang(A) et nullité(A) ici ?

13. Considérez le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

(a) Représentez l'espace solution comme une intersection.
(b) Que valent rang(A) et nullité(A) ici ?

14. Considérez le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$$

(a) Représentez l'espace solution comme une intersection.
(b) Représentez l'espace solution comme translation de l'espace nul.
(c) Représentez graphiquement le SEL comme équation vectorielle.
(d) Que valent rang(A) et nullité(A) ici ?

Réponses

1.

(a) $x = -1$, $y = 2$

(b) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

(c) $\begin{cases} a = 3 - s + 2t, \\ b = -6 + 3s - t, \\ c = s, \\ d = t \end{cases}$ où $s, t \in \mathbb{R}$

2.

(a) $x = \frac{18}{7}$, $y = \frac{-1}{17}$

(b) $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{2}{5}$

(c) $x = \frac{11}{4}$, $y = \frac{8}{7}$

(d) $\begin{cases} x = \frac{26}{11} - \frac{1}{11}t, \\ y = \frac{6}{11} + \frac{4}{11}t, \\ z = t, \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(e) $x = \frac{7}{3}$, $y = -2$, $z = \frac{-34}{3}$, $w = -3$

(f) aucune solution

(g) $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = t, \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(h) $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

(i) aucune solution

(j) $\begin{cases} x = \frac{19}{7} + \frac{17}{14}t, \\ y = \frac{-6}{7} + \frac{1}{7}t, \\ z = \frac{-27}{7} + \frac{9}{14}t, \\ w = t, \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

3.

(a) $2Al_2O_3 + 3C \rightarrow 4Al + 3CO_2$

(b) $B_2S_3 + 6H_2O \rightarrow 2H_3BO_3 + 3H_2S$

(c) $3NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \rightarrow Na_3C_6H_5O_7 + 3H_2O + 3CO_2$

(d) $16MnS + 13As_2Cr_{10}O_{35} + 374H_2SO_4 \rightarrow 16HMnO_4 + 26AsH_3 + 130CrS_3O_{12} + 327H_2O$

4.

(a) $\begin{cases} 120 + w = 250 + x \\ 120 + x = 70 + y \\ 530 + y = 390 + z \\ 115 + z = 175 + w \end{cases}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} x = -130 + t, \\ y = -80 + t, \\ z = 60 + t, \\ w = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(d) $x = -130,\ y = -80,\ z = 60,\ w = 0$

(e) Non, on ne peut pas avoir de flux négatif ou fractionnaire. Il faut donc que $t \geq 130$ et $t \in \mathbb{N}$.

5. $T_1 = 50.97°C,\ T_2 = 52.48°C,\ T_3 = 54.31°C,\ T_4 = 61.41°C,\ T_5 = 64.66°C,\ T_6 = 64.74°C$

6.

(a) $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{2}\vec{b}$

(b) $\vec{a} = \frac{10t+5}{3}\vec{b} + \frac{4t+2}{3}\vec{c} + t\vec{d}$ où $t \in \mathbb{R}$

(c) aucune solution.

(d) (a) possède une solution unique puisque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont LI et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) possède une infinité de solution car les vecteurs $\vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{d}$ sont LD.
(c) n'a pas de solution puisque $\vec{a}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires, mais $\vec{b}$ pointe dans une autre direction.

7.

(a) $\vec{a} = -10\vec{u} + 7\vec{v} + 6\vec{w}$

(b) Non

(c) Oui, $\vec{c} = 5\vec{v} + 3\vec{w}$

(d) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont LI et engendrent un plan dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, la différence est que $\vec{c}$ se situe dans le plan contrairement à $\vec{a}$.

(e) Non, car $\vec{d}$ n'appartient pas à l'espace 3d.

8.

(a) Il faut minimalement 120 L d'essence A.

9. 0 kg d'alliage A, 250 kg d'alliage B et 250 kg d'alliage C.

10.

(a) x_3 est le nombre d'étages bâtis avec le plan C et le vecteur calcule donc la proportion de chaque type de logement que ces étages donnent.

(b) $\begin{pmatrix} d \\ u \\ s \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(c) Oui

(d) Il n'y a qu'une seule solution où les x_i sont tous des entiers positifs : $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2$. Donc ceci requiert 8 étages.

11.

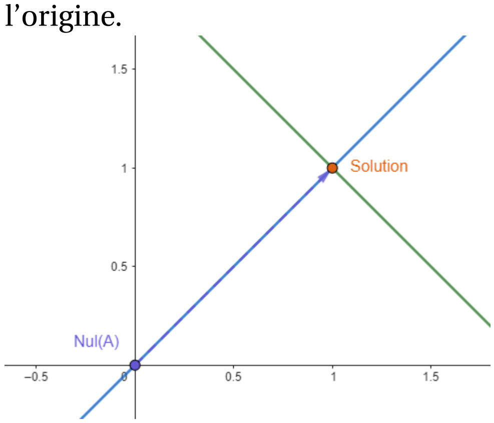
(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 6 & -3 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

(b) Les colonnes de A sont tous des multiples. Ainsi les colonnes sont LD et il n'y aura qu'un seul pivot dans A. Donc rang(A)=1.

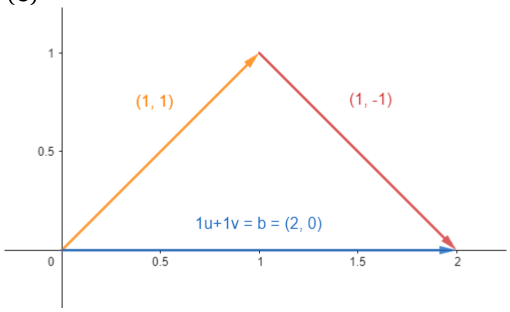
(c) Le système est incompatible car le $\vec{b}$ n'est pas un multiple des colonnes de A. En d'autres mots, $\vec{b}$ n'est pas dans l'espace engendré par les colonnes et n'est donc pas une solution du système.

(d) Le théorème du rang dit que $1 + nullité(A) = 3$. On en déduit donc que nullité(A)=2. En d'autres mots, A possède 2 variables libres.

12. (a) Intersection de deux droite, la solution est un point. (b) L'espace nul est simplement le point à l'origine.

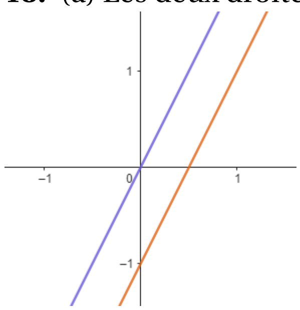


(c)



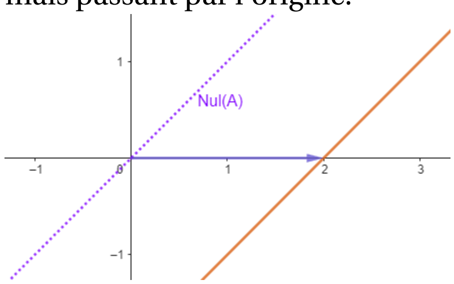
(d) rang(A)=2 et nullité(A)=0 car la matrice des coefficients possède 2 pivots et aucune variable libre.

13. (a) Les deux droites sont parallèles distinctes, il n'y a pas de solution.

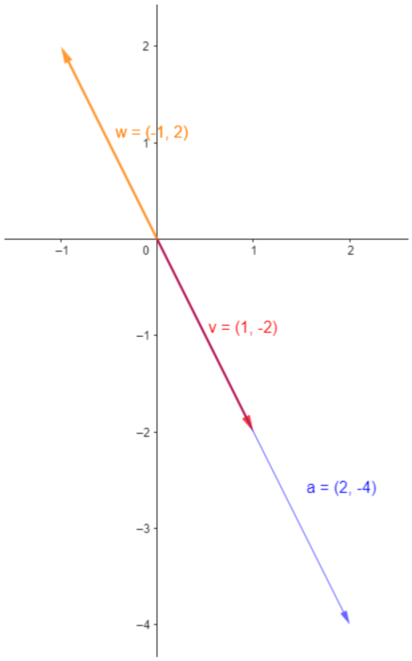


(b) rang(A)=1 et nullité(A)=1 car la matrice des coefficients possède 1 pivot et 1 variable libre.

14. (a)Deux droites confondues, il y a une infinité de solutions. (b) L'espace nul est est droite parallèle mais passant par l'origine.



(c) Les trois vecteurs sont colinéaires. On voit qu'il y a une infinité de combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui donnent $\vec{a}$.



(d) rang(A)=1 et nullité(A)=1 car la matrice des coefficients possède 1 pivot et 1 variable libre.