## Section 3.1 à 3.2

1. Calculez les opérations matricielles suivantes si possible. Sinon, expliquez pourquoi.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) $A+B$
(b) $2C$
(c) $AB$
(d) $ABC$
(e) $C^T$
(f) $DA$
(g) $D^T A$
(h) $ED-F$
(i) $EBD$

2. Les notes de 4 élèves aux 6 évaluations d'un cours de mathématiques sont compilées dans la matrice $N$ suivante. Les pondérations de chacune des 6 évaluations sont inscrites dans la matrice $P$ : 4 devoirs valent pour 10% de la note finale et 2 examens valent pour 30%. [TI]

$$N = \begin{bmatrix} 75 & 56 & 88 & 60 & 69 & 78 \\ 62 & 79 & 52 & 60 & 63 & 41 \\ 42 & 66 & 54 & 85 & 58 & 58 \\ 87 & 83 & 75 & 85 & 80 & 90 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.10 & 0.30 & 0.10 & 0.10 & 0.30 \end{bmatrix}$$

(a) Quelle est la note du troisième élève au premier examen ?

(b) Utilisez les opérations matricielles appropriées pour calculer la matrice $R_{4\times 1}$ qui encode les notes finales de chaque élève.

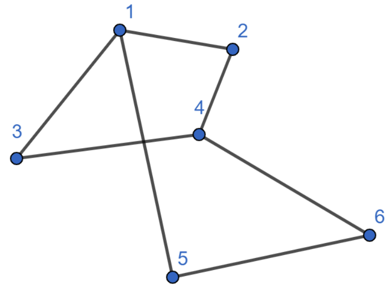
(c) Trouvez la matrice $A$ appropriée qui donnera $M = AN$ où $M_{1\times 6}$ est la matrice qui encode la moyenne de chaque évaluation. Calculez $M$.

(d) Utilisez des opérations matricielles pour calculer la moyenne des notes finales.

(e) Le cours comporte un double-seuil de réussite pour les évaluations individuelles, dans ce cas-ci les deux examens. Donnez la matrice de pondération individuelle $P_i$ et calculez $R_i = NP_i^T$ les notes finales aux évaluations individuelles.

(f) Quel élève échoue le cours si le double-seuil est à 50% ?

3. Le réseau ferrovière entre 6 villes est représenté par le graphe ci-dessous. [TI]




   (a) Donnez la matrice $A = [a_{ij}]$ telle que $a_{ij} = 1$ s'il y a un lien entre les villes $i$ et $j$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

   (b) Vérifiez que $A^T = A$. Qu'est-ce que ceci représente dans le contexte ?

   (c) Que représente $A^2$ ?

   (d) Que représente $(A + A^2)$ ?

   (e) Combien y a-t-il de chemins différents pour qu'un train se rende de la ville 1 à la ville 4 en au plus cinq déplacements ?

   (f) Si un pont entre la ville 1 et 2 s'écroule, comment change la réponse précédente ?

4. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculez les matrices inverses de chacune si possible.

   (b) Vérifiez vos réponses en confirmant que $MM^{-1} = I$.

   (c) Quelles matrices sont singulières ?

   (d) Vérifiez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. Considérez le système d'équations linéaires $Ax = b$ ci-bas. Calculez la matrice des coefficients inverse $A^{-1}$ et utilisez-la pour donner la solution du système.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

6. Nous verrons au chapitre 5 que les matrices peuvent être interprétées comme des transformations linéaires sur des vecteurs. On veut ici étudier et comprendre la transformation suivante

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculez $Rv$ et $R^2v$ et dessinez les vecteurs dans un plan si $\theta = 90°$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Quelle est la transformation géométrique effectuée par $R$ lorsque $\theta = 90°$ ?

   (c) Que pensez-vous que la transformation est pour $\theta$ quelconque ?

   (d) Soit maintenant $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Comparez la norme de $w$ et de $Rw$ pour $\theta$ quelconque.

   (e) Calculer $R^T R$. Qu'en déduisez-vous sur $R^T$ ?

   (f) Quelle est alors la transformation effectuée par $R^T$ ?

7. On endode un message dans une matrice $M$ où les entiers de 1 à 26 représentent les lettres de l'alphabet et 0 représente un espace. On peut alors produire un message crypté $X = CM$ à l'aide d'une matrice de cryptage $C$. [TI]

   (a) Comment fait-on pour retrouver le message à partir du message crypté $X$ ?

   (b) Calculez la matrice de décryptage si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Utilisez votre réponse pour décrypter le message suivant

$$X = \begin{pmatrix} -19 & 0 & -1 & -6 & 11 & 3 & -9 \\ 122 & 5 & 122 & 138 & -21 & 79 & 149 \\ 31 & 0 & 21 & 27 & -11 & 11 & 30 \end{pmatrix}.$$

   (d) Un ami veut vous encoder un message avec la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Y a-t-il un problème avec son idée ?

## Sections 3.3 à 3.4

*N'oubliez pas d'aussi pratiquer les trois exemples de la section 3.4 des diapositives.*

8. On veut étudier la population de renards (prédateurs) et de lièvres (proies) sur une île. On note $R_k$ et $L_k$ le nombre de renards et de lièvres après $k$ années respectivement. Après étude, un biologiste modélise ce système à l'aide de l'équation suivante
$$P_k = AP_{k-1}$$
où $P_k = \begin{pmatrix} R_k \\ L_k \end{pmatrix}$ est le vecteur de population et $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$ est la matrice d'évolution. [TI]

   (a) S'il y a initialement 20 renards et 60 lièvres, déterminez la population de chacun après dix ans.

   (b) Expliquez en quelques mots pourquoi $a_{21} < 0$ et $a_{22} > 0$.

   (c) Calculez un état d'équilibre (stationnaire) de population $P = \begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix}$ pour lequel $R + L = 100$.

# Réponses

**1.**

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -55 & 53 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(f) Non-défini car # col D $\neq$ # lig A.

(g) $\begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 19 & 18 \\ 24 & 21 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -9 & -14 & -14 \\ 13 & 20 & 28 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ -46 & -53 & -60 \\ 76 & 89 & 102 \end{bmatrix}$

**2.**

(a) $N_{13} = 42\%$

(b) $R = NP^T = \begin{bmatrix} 75.8 \\ 54.3 \\ 58.7 \\ 83 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} 66.5 & 71 & 67.25 & 72.5 & 67.5 & 66.75 \end{bmatrix}$

(d) $AR = 67.95$

(e) $P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ et $R_i = \begin{bmatrix} 83 \\ 46.5 \\ 56 \\ 82.5 \end{bmatrix}$

(f) Le deuxième élève car il a une moyenne aux évaluations individuelles de 46.5%.

**3.**

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Ceci signifie que chaque chemin se fait dans les deux directions. Par exemple, le chemin 1-3 permet de passer de la ville 1 à la ville 3 ou vice-versa. Ce ne serait pas le cas si on spécifiait que les rails sont à sens unique et qu'on introduisant des flèches sur le graphe.

(c) $A^2$ compte le nombre de chemins différents pour se rendre d'une ville à l'autre en exactement 2 déplacements.

(d) $A+A^2$ compte alors le nombre de chemins différents pour se rendre d'une ville à l'autre en 1 ou 2 déplacements.

(e) $(A+A^2+A^3+A^4+A^5)_{14} = 22$ chemins possibles.

(f) On modifie $A_{12} = A_{21} = 0$ et on refait le calcul précédent. Il y a alors seulement 13 chemins possibles.

**4.**

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C^{-1}\nexists$

(b) $AA^{-1} = I$, $BB^{-1} = I$

(c) La matrice $C$ est singulière.

(d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{14} & \frac{3}{28} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$

**5.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ et $x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

**6.**

(a) $Rv = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $R^2v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) C'est une rotation de 90° en sens horaire.

(c) C'est une rotation de $\theta$ en sens horaire.

(d) $||w|| = \sqrt{x^2+y^2} = ||Rw||$

(e) $R^TR = I$. Donc $R^T = R^{-1}$ est l'inverse de $R$.

(f) $R^T$ est donc la transformation inverse (contraire). C'est une rotation de $\theta$ en sens antihoraire.

**7.**

(a) $M = C^{-1}X$

(b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 19 & 15 & 12 & 18 & 17 \\ 12 & 0 & 20 & 21 & 0 & 14 & 21 \\ 12 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(d) La matrice $C$ est singulière. Il sera donc impossible de décoder le message !

**8.**

(a) $P_{10} = A^{10} P_0 = \begin{pmatrix} 275 \\ 378.75 \end{pmatrix}$ donc 275 renards et 379 lièvres.

(b) $a_{21}$ représente l'effet des renards sur les lièvres. Il est négatif puisque les renards chassent les lièvres. $a_{22}$ représente l'effet des lièvres sur la population de lièvre. Cet effet est positif car les lièvres se reproduisent entre eux.

(c) $P = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$