Section 4.1 à 4.2

1. Calculez le déterminant de chacun des matrices suivantes si possible. Sinon, expliquez pourquoi.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pour chaque matrice suivante, déterminez si elle est singulière sans effectuer le calcul explicite. Justifiez vos réponses.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Effectuez les calculs suivants.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Déterminez pour quelles valeurs de x la matrice suivante est singulière. [TI]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Déterminez les conditions qui rendent la matrice suivante singulière. [TI]

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

6. Une matrice A est dite antisymétrique si $A^T = -A$. Montrez par calcul que le déterminant d'une matrice antisymétrique 3x3 est toujours nul.

7. Utilisez les propriétés des déterminants pour montrer que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Section 4.3

8. Calculez les aires des figures suivantes à l'aide d'un déterminant.

   (a) Le parallélogramme dont trois des sommets sont $(0,1)$, $(4,4)$ et $(7,2)$.

   (b) Le triangle de sommets $(0,0)$, $(8,3)$ et $(6,-1)$.

   (c) Le triangle de sommets $(0,0)$, $(-1,3)$ et $(3,-9)$.

9. Soient les quatre vecteurs suivants. [TI]

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculez le volume de parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   (b) Calculez le volume du prisme à base triangulaire formé par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   (c) Calculez le volume du tétraèdre formé par les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{p}$.

   (d) Vérifiez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont coplanaires à l'aide d'un volume.

Réponses

1.

(a) $\det(A) = 11$

(b) $\det(B) = 2$

(c) $\det(C) = -15$

(d) $\det(D)$ est non-défini car D n'est pas carrée

(e) $\det(E) = -6$

(f) $\det(F) = 1$

(g) $\det(G) = -10$

(h) $\det(H) = 0$

(i) $\det(J) = 9$

2.

(a) A est singulière car colonne 1 est un multiple de colonne 2

(b) B est singulière car colonne 3 est un multiple de colonne 1

(c) C est singulière car la colonne 3 est la somme de colonne 1 et colonne 2

(d) D est singulière car colonne 1 est un multiple de colonne 2

(e) E est inversible

(f) F est singulière car (au moins) deux colonnes sont identiques

(g) G est inversible

(h) H est singulière car il y a une colonne de zéros

(i) J est inversible

3.

(a) $|A| = -42$

(b) $|B| = -3$

(c) $|C| = 86$

4. $x = -3$ et $x = 1$

5. V est singulière si $x = y$, $y = z$ ou $x = z$.

6.

7.

8.

(a) $17\ u^2$

(b) $13\ u^2$

(c) $0\ u^2$

9.

(a) $10\ u^3$

(b) $5\ u^3$

(c) $10/3\ u^3$

(d) Le volume du parallélépipède formé par les vecteurs est nul. Les vecteurs sont donc coplanaires.