Translations

1. Considérez la translation

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$$

   (a) Calculez $T(\mathbf{u})$ si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (b) La transformation est-elle linéaire ? Justifiez.
   (c) La transformation est-elle injective ? Justifiez.
   (d) La transformation est-elle surjective ? Justifiez.
   (e) La transformation est-elle inversible ? Justifiez.

Projections

2. Considérez la transformation $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui décrit une projection sur l'axe des x :

$$P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculez $P(\mathbf{v})$ si $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   (b) Vérifiez que P est une transformation linéaire à partir de la définition.
   (c) La transformation est-elle injective ? Justifiez.
   (d) La transformation est-elle surjective ? Justifiez.
   (e) La transformation est-elle inversible ? Justifiez.
   (f) Donnez la matrice qui permet de calculer la transformation linéaire P.
   (g) Calculez $P\mathbf{v}$ par multiplication matricielle.

3. On veut étudier la transformation linéaire $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui décrit une projection sur la droite $y = x$ dans le plan cartésien. [TI]
   (a) Donnez un vecteur $\mathbf{d}$ qui est parallèle à la droite $y = x$.
   (b) Calculez la projection de $\mathbf{e}_1$ sur le vecteur $\mathbf{d}$: $\text{proj}_{\mathbf{d}}\mathbf{e}_1$.
   (c) Calculez la projection de $\mathbf{e}_2$ sur le vecteur $\mathbf{d}$: $\text{proj}_{\mathbf{d}}\mathbf{e}_2$.
   (d) Donnez la matrice qui décrit la transformation Q.
   (e) Calculez $Q\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (f) À quoi correspond graphiquement l'espace $\text{Col}(Q)$?
   (g) Quelle est la dimension de l'image de Q ?

4. Donnez la matrice décrivant la transformation linéaire $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui calcule une projection dans le plan y-z.

Rotations 2D

5. Considérez la matrice et les vecteurs suivants : [TI]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dessinez dans un plan cartésien les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{u}$.

   (b) Calculez $A\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2$ et $A\vec{u}$.

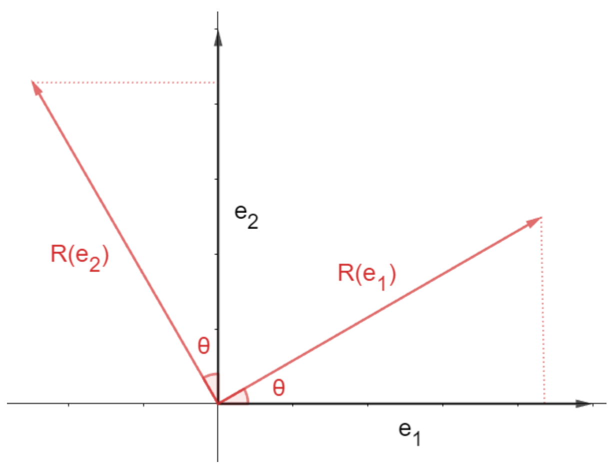
   (c) Dessinez dans un nouveau plan cartésien les vecteurs obtenus en (b).

   (d) Décrivez en mots la transformation effectuée par la matrice A.

   (e) Vérifiez votre réponse à l'aide de l'outil suivant et que $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$.

   (f) Calculez A^{-1} et décrivez la transformation à l'aide du même outil.

6. L'objectif de cette question est de caractériser toutes les rotations du plan. Considérons une rotation R_θ d'un angle θ en sens antihoraire autour de l'origine agissant sur les vecteurs de la base canonique $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.



   (a) Exprimez les composantes des vecteurs $R_\theta \vec{e}_1$ et $R_\theta \vec{e}_2$ en fonction de l'angle θ.

   (b) Utilisez votre réponse précédente pour donner la matrice décrivant la transformation R_θ.

   (c) Calculez $R_{45°}$ et vérifiez votre réponse avec l'exercice précédent. [TI]

   En mathématiques, on nomme $SO(2)$ le groupe des rotations en deux dimensions. Il est décrit par l'ensemble des matrices suivantes :

$$SO(2) = \left\{ M_{2x2} \,|\, M^T M = 1 \quad \text{et} \quad \det(M) = 1 \right\}.$$

   (d) Vérifiez que la matrice R_θ obtenue plus haut vérifie la première condition : $R_\theta^T R_\theta = I$.

   (e) Vérifiez aussi la deuxième condition : $\det(R_\theta) = 1$.

Rotations 3D

7. On veut maintenant étudier les rotations dans l'espace à trois dimensions. Considérons d'abord les matrices suivantes : [TI]

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculez $R_x(90°)\mathbf{e}_1$, $R_x(90°)\mathbf{e}_2$ et $R_x(90°)\mathbf{e}_3$ où les $\mathbf{e_i}$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Décrivez en mots la transformation effectuée par la matrice $R_x(90°)$. Vous pouvez vérifiez cet outil graphique.

(c) Sans faire de calculs, que feront alors les transformations $R_y(\theta)$ et $R_z(\theta)$?

(d) Calculez le vecteur $\mathbf{v} = R_z(30°)\mathbf{e}_1$.

(e) Calculez l'angle entre les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{v}$.

Toute rotation R dans l'espace peut s'écrire comme une composition des trois matrices ci-haut. Par exemple, On peut décrire une rotation R comme une rotation de γ autour de l'axe des x, suivi d'une rotation de β autour de l'axe des y et finalement d'une rotation de α autour de l'axe des z :

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma).$$

(f) Calculez la matrice C décrivant la rotation $C = R(45,45,90)$.

(g) Vérifiez que $C^TC = I$ et que $\det(C) = 1$. (On en conclut donc qu'il s'agit d'une matrice appartenant à $SO(3)$, i.e. une rotation 3D.)

(h) La transformation C décrit une rotation autour de quel axe? (indice : Trouvez un vecteur qui sera inchangé par la rotation C.)

(i) La transformation C décrit une rotation de quel angle autour de cet axe? (indice : Trouvez un vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation, puis calculer l'angle entre ce vecteur avant et après la transformation).

Transvections

8. Considérez la transformation $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. [TI]

(a) La transformation T est-elle linéaire?

(b) Est-elle inversible?

(c) Considérez le carré formé par les points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. Dessinez l'image du carré par la transformation T.

(d) Quelle figure obtenez-vous?

(e) Calculez $\det(T)$ et calculez l'aire de cette figure.

(f) Quelle serait l'aire de l'image par T d'un cercle de rayon 1 centré à l'origine?

Dilatations

9. Considérez les transformations suivantes :

$$D_x : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} \qquad D_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

   (a) La transformation D_x est-elle linéaire ? Justifiez.

   (b) La transformation D_x est-elle inversible ? Justifiez.

   (c) Considérez le carré formé par les points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. Dessinez l'image du carré par la transformation D_x.

   (d) Donnez les matrices décrivant les transformations D_x et D_y.

   (e) Considérez la transformation $F = D_y D_x$. Quelle serait l'aire de l'image d'un cercle de rayon 1 par la transformation F ?

Réponses

1.

(a) $T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Non-linéaire car $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$

(c) Injective car si $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ alors $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(d) Surjective car pour tout $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ il existe $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$.

(e) Inversible et l'inverse est $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$.

2.

(a) $P(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Il faut vérifier que $P(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = P(\mathbf{u}) + P(\mathbf{v})$ et que $P(k\mathbf{u}) = kP(\mathbf{u})$.

(c) Non-injective, car par exemple $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mais $P\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) Non-surjective, car il n'y aucune image de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $y \neq 0$.

(e) Non-inversible car P n'est ni injective, ni surjective.

(f) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.

(a) $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou tout multiple de celui-ci.

(b) $\operatorname{proj}_{\mathbf{d}}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{proj}_{\mathbf{d}}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $Q\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $\mathrm{Col}(Q)$ est la droite $y = x$ du plan.

(g) $\dim \mathrm{Im}(Q) = 1$

4. $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.

(a)

(b) $A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad A\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(c)

(d) C'est une rotation de 45° antihoraire autour de l'origine.

(e)

(f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est une rotation de 45° horaire autour de l'origine.

6.

(a) $R_\theta \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $\quad R_\theta \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

(b) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(c) $R_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(d)

(e)

7.

(a) $R_x(90^\circ)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_x(90^\circ)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $R_x(90^\circ)\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Rotation de 90° antihoraire autour de l'axe des x

(c) Rotation de θ antihoraire autour des axes y et z respectivement

(d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\theta = 30°$

(f) $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) C'est une rotation autour de l'axe parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(h) Rotation de 120°

8.

(a) Oui, car c'est une transformation matricielle.

(b) Oui, car $\det T \neq 0$.

(c)

(d) On obtient un parallélogramme de sommets $(0,0)$ $(1,2)$ $(2,1)$ et $(3,3)$.

(e) $\det T = 3$ et l'aire du parallélogramme est donc $A_p = \det T \cdot A_c = 3$.

(f) 3π

9.

(a) Oui car elle vérifie $D_x(u+v) = D_x(u) + D_x(v)$ et $D_x(ku) = kD_x(u)$.

(b) Oui, car $D_x^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{pmatrix}$.

(c) Rectangle de sommets $(0,0)$ $(2,0)$ $(0,1)$ et $(2,1)$

(d) $D_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) 4π