Sections 6.1 à 6.3

1. Déterminez si les ensembles suivants forment des bases $\mathbb{R}^3$. Si non, expliquez pourquoi.

   (a) $\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

   (b) $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

   (c) $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

   (d) $\mathscr{D} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

   (e) $\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

   (f) $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

2. Soient les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

   (a) Vérifiez que $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calculez $\vec{v}$ si $[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ à l'aide d'une combinaison linéaire.

   (c) Calculez $[\vec{w}]_{\mathscr{B}}$ si $\vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ à l'aide d'un système d'équation linéaire.

   (d) Trouvez les matrices de changement de base $P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}$ et $P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}$.

   (e) Vérifiez vos réponses du (b) et (c) à l'aide des matrices de changements de base précédentes.

3. Soit $E = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. [TI]

   (a) Donnez les composantes de $f(x) = 2 + 3x - x^2$ dans la base canonique E.

   (b) Montrez que $C = \{1 - x^2, x - x^2, 1 + x\}$ est également une base de cet espace vectoriel.

   (c) Calculez les composantes de $f(x)$ dans la base C.

   (d) Donnez les matrices de changement de base $P_{E\leftarrow C}$ et $P_{C\leftarrow E}$.

   (e) Donnez le polynôme $g(x)$ si $[g(x)]_C = \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$.

4. Calculez les matrices de changement de base $P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{F}}$ et $P_{\mathscr{F}\leftarrow\mathscr{C}}$ entre les deux bases suivantes. [TI]

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

5. La détection d'arêtes (edge detection) dans une image est un outil important qui a des applications en robotique lorsqu'on veut par exemple qu'un robot détecte la présence dans un objet dans son champ de vision. Cet exercice illustre les rudiments de ces algorithmes à travers un scénario simplifié. [TI]

Considérons une ligne de 6 pixels au centre de la photo précédente. On cherche à détecter numériquement la présence d'une arête.

La couleur de chaque pixel est décrite par un triplet d'entiers entre 0 et 255 de la forme (R, G, B) où les composantes représentent respectivement l'intensité de rouge, de vert et de bleu. Pour les 6 pixels précédents nous avons :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & G & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 63 & 122 & 179 \\ 68 & 125 & 181 \\ 69 & 124 & 182 \\ 76 & 122 & 175 \\ 195 & 140 & 124 \\ 216 & 141 & 102 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) La première étape de l'algorithme consiste à transformer notre image en tons de gris. Pour se faire, l'intensité de gris de chaque pixel sera représenté par un seul entier entre 0 et 255 qui correspond à la moyenne des composantes R, G et B. Calculez le vecteur $\vec{v}$ qui encode l'intensité de gris des 6 pixels.

(b) On considère maintenant un nouvelle base

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}.$$

Donnez les matrices de changement de base $P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}$ et $P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}$.

(c) Supposont qu'on note un vecteur général $\vec{x}$ exprimé dans les deux bases comme

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} \qquad [\vec{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\c_6\end{bmatrix}.$$

Calculez $[\vec{x}]_{\mathscr{B}}$ en termes des composantes x_i à l'aide de la matrice de changement de base appropriée.

(d) Que mesure c_1 ? Et c_2 ? Et que dire de c_6 ?

(e) Calculez maintenant $[\vec{v}]_{\mathscr{B}}$ pour le vecteur $\vec{v}$ obtenu en (a).

(f) Expliquez comment on peut identifier numériquement la position de l'arête à l'aide de $[\vec{v}]_{\mathscr{B}}$.

Remarque : Les élèves qui sont familiers avec le calcul différentiel et intégral pourront remarquer que les opérations calculées par les deux matrices de changement de base sont des analogues discrets de la dérivée et de l'intégrale. $P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}$ calcule une différence entre deux pixels adjacents ce qui correspond à un calcul de pente, donc de dérivée discrète. $P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}$ additionne successivement les valeurs des composantes ce qui est analogue à additionner l'aire de rectangles dans une intégrale.

6. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

(a) Montrez que $\mathscr{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculez $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$.

(c) Donnez $[A\vec{v}_1]_{\mathscr{B}}$ et $[A\vec{v}_2]_{\mathscr{B}}$.

(d) Si $[\vec{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$, trouvez $[A\vec{x}]_{\mathscr{B}}$.

(e) Trouvez une matrice D telle que $[A\vec{x}]_{\mathscr{B}} = D[\vec{x}]_{\mathscr{B}}$.

Remarque : Vous devriez trouver que la matrice D a une structure très simple. Ceci signifie que la base $\mathscr{B}$ est bien adaptée pour l'étude de la transformation linéaire A. Cette observation est l'idée clé du chapitre 7.

Section 6.4

7. Déterminez si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels ou non. Justifiez vos réponses.

   (a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| a+b=0 \right\}$

   (b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| a+b=1 \right\}$

   (c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| a+b=0 \right\}$

   (d) $X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 3a-b+2c=0 \right\}$

   (e) $Y = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| a^2+b^2+c^2=1 \right\}$

   (f) $Z = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{matrix} a+2b+c+2d=0 \\ a-b+c-d=0 \end{matrix} \right\}$

8. Une matrice A est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) $\mathrm{Nul}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^k$ pour quelle valeur de k?

   (b) $\mathrm{Col}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ pour quelle valeur de m?

   (c) Déterminez nullité(A) et rang(A).

   (d) Trouvez une base de $\mathrm{Col}(A)$.

   (e) Trouvez une base de $\mathrm{Nul}(A)$.

9. Une matrice B est donnée par [TI]
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ -1 & -4 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Répétez les sous-questions de l'exercice précédent pour la matrice B.

Réponses

1.

(a) $\mathscr{A}$ n'est pas une base car elle n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathscr{B}$ n'est pas une base car elle n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

(c) $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\mathscr{D}$ n'est pas une base car l'ensemble n'est pas linéairement indépendant.

(e) $\mathscr{E}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car les vecteurs ne sont pas éléments de cet espace.

(f) $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

(a) Il faut vérifier que $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant et qu'il contient le bon nombre de vecteurs (2).

(b) $\vec{v} = 4\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

(c) $[\vec{w}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 13/5 \end{pmatrix}$

(d) $P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

(e) Vérifiez que $\vec{v} = P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}[\vec{v}]_{\mathscr{B}}$ et que $[\vec{w}]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}\,\vec{w}$.

3.

(a) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Il faut montrer que $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est linéairement indépendant et contient le bon nombre de vecteurs.

(c) $[\vec{f}]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $P_{E\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad P_{C\leftarrow E} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(e) $g(x) = 3 - 2x - 5x^2$

4.

(a) $P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_{\mathscr{F}\leftarrow\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

5.

(a) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 121 \\ 125 \\ 125 \\ 124 \\ 153 \\ 153 \end{bmatrix}$

(b) $P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $[\vec{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_4 - x_5 \\ x_5 - x_6 \\ x_6 \end{bmatrix}$

(d) c_1 mesure la différence d'intensité de gris entre le premier et le deuxième pixel. c_2 fait la même chose entre le deuxième et le troisième pixel. c_6 par contre correspond simplement à x_6 car il n'y a pas de septième pixel avec qui faire la différence. Sa valeur ne sert pas à la détection d'arête, mais est nécessaire pour avoir une base complète.

(e) $[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -29 \\ 0 \\ 153 \end{bmatrix}$

(f) L'arête peut s'identifier numériquement là où la différence entre deux pixel est significative (grande en valeur absolue). On constate ici que c_4 est la plus grande différence et que l'arête se situe donc entre le quatrième et cinquième pixel. En général, on pourrait fixer une valeur minimale de $|c_i|$ pour considérer qu'il s'agit d'une arête.

6.

(a) Il faut montrer que $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant et contient le bon nombre de vecteurs (2).

(b) $A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $[A\vec{v}_1]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [A\vec{v}_2]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $[A\vec{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

(e) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.

(a) Oui car $U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) Non car il ne contient pas $\vec{0}$.

(c) Non car $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ ne sera pas dans W.

(d) Oui car $X = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(e) Non car il ne contient pas $\vec{0}$.

(f) Oui car $Z = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

8.

(a) $k = 3$

(b) $m = 2$

(c) nullité(A)=1 et rang(A)=2.

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(e) $\left\{\begin{pmatrix} -17 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

9.

(a) $k = 6$

(b) $m = 4$

(c) nullité(A)=2 et rang(A)=4.

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} -24 \\ 21 \\ 0 \\ 12 \\ 62 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$