Sections 7.1 à 7.3

1. Vérifiez lesquels des vecteurs suivants sont des vecteurs propres de la matrice M et identifiez leur valeur propre correspondante. [TI]

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculez le polynôme caractéristique de A.

   (b) Donnez les valeurs propres de A avec leurs multiplicités.

   (c) Calculez les vecteurs propres de A.

   (d) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre ?

   (e) Est-il possible de diagonaliser la matrice A ? Si oui, donnez P, D et P^{-1} telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculez le polynôme caractéristique de B.

   (b) Donnez les valeurs propres de B avec leurs multiplicités.

   (c) Calculez les vecteurs propres de B.

   (d) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre ?

   (e) Est-il possible de diagonaliser la matrice B ? Si oui, donnez P, D et P^{-1} telles que $B = PDP^{-1}$.

4. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. [TI]

   (a) Calculez le polynôme caractéristique de C.

   (b) Donnez les valeurs propres de C avec leurs multiplicités.

   (c) Calculez une base de chaque sous-espace propre.

   (d) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre ?

   (e) Diagonalisez la matrice C.

5. Diagonalisez les matrices suivantes si possible. [TI]

$$M=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&0&-2\\1&0&0\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}0&5&6\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$$

6. Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Justifiez vos réponses.

   (a) Les éléments sur la diagonale principale d'une matrice A correspondent à ses valeurs propres.

   (b) Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors E_λ est un sous-espace de dimension 1.

   (c) Si 0 est une valeur propre de A, alors A n'est pas inversible.

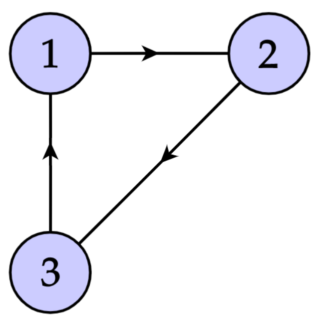
   (d) Le polynome caractéristique d'une matrice 10 x 10 est de degré inférieur à 10.

   (e) Le sous-espace propre E_λ correspond à l'espace nul $\mathrm{Nul}(A-\lambda I)$.

Section 7.4

Les questions suivantes réfèrent à l'algorithme PageRank et utilisent les matrices d'importance M, d'importance modifiée M' et de Google G telles que définies dans la section 7.4 des diapositives.

7. Considérez l'internet défini par le graphe suivant. [TI]



   (a) Construisez la matrice d'importance M de ce graphe.

   (b) Pouvez-vous prédire le vecteur de rang? Vérifiez votre réponse en le calculant à l'aide de la matrice M.

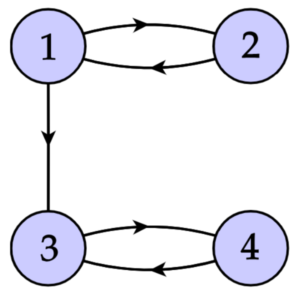
   (c) Construisez maintenant la matrice de Google G de ce graphe avec $p = 0.15$.

   (d) Donnez l'interprétation de la première colonne de G en terme du surfeur aléatoire dans le graphe.

   (e) Calculez le vecteur PageRank de cet internet.

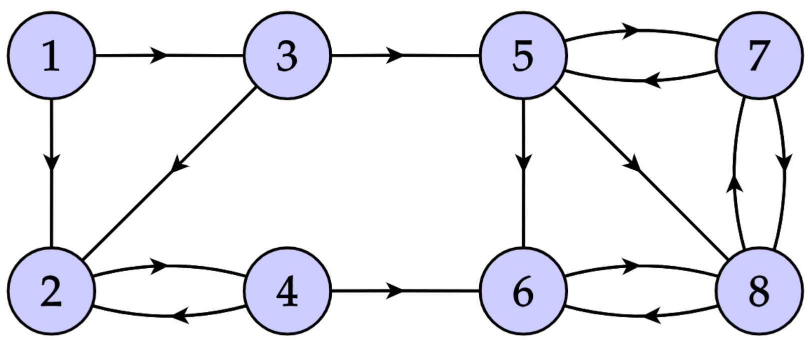
   (f) Constatez-vous une différence importante entre vos deux classements?

8. Considérez l'internet défini par le graphe suivant. [TI]



   (a) Construisez la matrice d'importance M de ce graphe.
   (b) Quelle paire de pages se verra attribuer une très grande importance ?
   (c) Calculez le vecteur de rang à l'aide de la matrice M.
   (d) Construisez maintenant la matrice de Google G de ce graphe avec $p = 0.10$.
   (e) Calculez le vecteur PageRank de cet internet.
   (f) Constatez-vous une différence importante entre vos deux classements ?
   (g) Pour quelle valeur de p un surfeur aléatoire passera-t-il le tier de son temps sur la paire $(1,2)$?

9. Considérez l'internet défini par le graphe suivant. [TI]



   (a) Construisez la matrice d'importance M de ce graphe.
   (b) Calculez le vecteur de rang à l'aide de la matrice M.
   (c) Quel problème constatez-vous ? Pouvez-vous expliquez en termes du graphe pourquoi cela se produit ?
   (d) Construisez maintenant la matrice de Google G de ce graphe avec $p = 0.15$.
   (e) Calculez le vecteur PageRank de cet internet.
   (f) Constatez-vous une différence importante entre vos deux classements ?

Réponses

1. $M\vec{u}_2 = 1\vec{u}_2$ $M\vec{u}_3 = 2\vec{u}_3$ $M\vec{u}_4 = 3\vec{u}_4$

2.

(a) $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$

(b) $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 2$ avec chacune une multiplicité de 1

(c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\dim E_4 = 1$ et $\dim E_2 = 1$

(e) Oui, $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3.

(a) $P(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = (\lambda - 6)^2$

(b) $\lambda_1 = 6$ avec une multiplicité de 2

(c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\dim E_6 = 1$

(e) Non, car les vecteurs propres ne forment pas une base de $\mathbb{R}^2$.

4.

(a) $P(\lambda) = (\lambda - 6)^2(\lambda - 4)(\lambda - 2)$

(b) $\lambda = 6$, $\lambda = 4$, $\lambda = 2$ avec des multiplicités de 2,1 et 1 respectivement

(c) Base de E_6 : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, base de E_4 : $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et base de E_2 : $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\dim E_6 = 2$, $\dim E_4 = 1$ et $\dim E_2 = 1$

(e) $C = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. *Notez que la diagonalisation d'une matrice n'est pas unique et dépend de l'ordre dans lequel on écrit les valeurs propres, ainsi que du choix de base pour chaque sous-espace. Ainsi, votre réponse peut différer des suivantes, mais vous pouvez toujours vérifier en calculer PDP^{-1} si vous retrouvez bien la matrice initiale.*

(a) $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5/3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/20 & 3/20 & 6/20 \\ -1/4 & -3/4 & 2/4 \\ 2/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

(b) N n'est pas diagonalisable

(c) $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/6 \end{pmatrix}$

(d) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

6.

(a) Faux, ceci serait vrai seulement si la matrice A était diagonale.

(b) Vrai, car on sait qu'en général la dimension d'un sous-espace propre est entre 1 et la multiplicité de la valeur propre. Ainsi, ici $1 \le \dim E_\lambda \le 1$.

(c) Vrai, car si 0 est une valeur propre, alors le sous-espace propre $\mathrm{Nul}(A - 0I) = \mathrm{Nul}(A)$ doit être au moins de dimension 1. Donc, A contient une variable libre, n'a pas un pivot dans chaque colonne et n'est donc pas inversible.

(d) Faux, le polynôme caractéristique d'une matrice n x n est toujours de degré n.

(e) Vrai, car le sous-espace propre E_λ correspond aux solutions de $Ax = \lambda x$, donc de $(A - \lambda I)x = 0$ qui forment précisément $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$.

7.

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Puisque tous les sites sont symétriques, leur importance sera égale : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(c) $G = 0.85M' + 0.15B = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.90 \\ 0.90 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$

(d) La première colonne signifie qu'un surfeur aléatoire se situant au premier site a 90% de chance d'aller au troisième site et 5% de chance d'aller au premier ou deuxième site.

(e) $\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(f) Il n'y a aucune différence entre le vecteur de rang et le vecteur PageRank dans ce graphe puisque le graphe ne possède pas de problèmes comme des secteurs isolés dont on ne peut sortir.

8.

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) La paire 3-4 aura toute l'importance, car elle forme une boucle dans le graphe sans sortie.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(d) $G = 0.90M' + 0.10B = \begin{pmatrix} 0.025 & 0.925 & 0.025 & 0.025 \\ 0.475 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.475 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.025 & 0.925 & 0.025 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{s} \approx \begin{pmatrix} 0.080 \\ 0.061 \\ 0.439 \\ 0.420 \end{pmatrix}$

(f) Oui, il y a maintenant une importance non-nulle aux sites 1 et 2.

(g) $p \approx 0.357$

9.

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.12 \\ 0.24 \\ 0.24 \\ 0.40 \end{pmatrix}$

(c) Les quatres premières pages ont une importance nulle. Ceci est dû au fait que les pages 5,6,7 et 8 forment une boucle isolée dans le graphe.

(d) $G = 0.85M' + 0.15B$ où B est une matrice 8x8 remplie de 1/8.

(e) $\vec{s} \approx \begin{pmatrix} 0.0187 \\ 0.0721 \\ 0.0267 \\ 0.0800 \\ 0.1060 \\ 0.2125 \\ 0.1786 \\ 0.3053 \end{pmatrix}$

(f) Oui, les sites 1,2,3 et 4 ont maintenant une importance non-nulle.