Sections 8.1 à 8.2

1. Calculez une base du complément orthogonal des sous-espaces vectoriels suivants.

   (a) $R = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

   (b) S est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (c) $T = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

   (d) $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

   (e) V est le plan d'équation $x - y - z = 0$.

2. Soit le sous-espace vectoriel W engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. [TI]

   (a) Est-ce que le vecteur $\begin{pmatrix} -12 & -6 & 9 & -12 \end{pmatrix}^\intercal \in W$?

   (b) Est-ce que le vecteur $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}^\intercal \in W^\perp$?

   (c) Quelle est la dimension de W ?

   (d) Quelle est la dimension de $W^\perp$?

   (e) Donnez une base du complément orthogonal de W.

3. Soit $W = \text{col}(A)$ où A est la matrice suivante. [TI]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ pour quelle valeur de n ?

   (b) Quelle est la dimension de W ?

   (c) Calculez une base de $W^\perp$.

   (d) Quelle est la dimension de $W^\perp$?

   (e) Qui entre W et $W^\perp$ décrit un plan ?

Section 8.3

4. Soient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le sous-espace W engendré par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculez $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

   (b) Trouvez la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W à l'aide d'une équation de la forme $A^\intercal A\vec{c} = A^\intercal \vec{v}$.

   (c) Comparez vos deux réponses précédentes. Arrivez-vous au même résultat ?

   (d) Donnez la décomposition orthogonale $\vec{v} = \vec{v}_W + \vec{v}_{W^\perp}$.

   (e) Quelle est la distance entre $\vec{v}$ et W ?

5. Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le sous-espace W engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculez la décomposition orthogonale $\vec{x} = \vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp}$.

   (b) Quelle est la distance entre $\vec{x}$ et W ?

6. Calculez la décomposition orthogonale de $\vec{y}$ sur W. [TI]

   (a) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   (b) $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   (c) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   (d) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   (e) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   (f) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Section 8.4

7. Soit $\mathscr{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) La base $\mathscr{B}$ est-elle orthogonale ?

(b) La base $\mathscr{B}$ est-elle orthonormale ?

(c) Comment doit-on modifier les vecteurs de $\mathscr{B}$ pour qu'elle devienne orthonormale ?

8. Utilisez le procédé de Gram-Schmidt pour transformer les bases suivantes en bases orthogonales. [TI]

(a) $\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\mathscr{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

9. Soit W le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. [TI]

(a) Utilisez le procédé de Gram-Schmidt pour donner une base orthogonale de W.

(b) À l'aide de la base orthogonale, calculez la projection de $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$ sur W.

(c) Calculez une base de $W^\perp$.

(d) Donnez une base orthogonale de $W^\perp$.

(e) Utilisez cette base pour calculer $\vec{x}_{W^\perp}$.

(f) Vérifiez vos réponses en calculant que $\vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp} = \vec{x}$.

Section 8.5

10. Les performances à un examen sont relevées en fonction du nombre d'heures d'études de chaque élève. [TI]

Heures d'étude (x)	Notes sur 100 (y)
2	60
3	70
5	75
7	85

(a) Utilisez la méthode des moindres carrés pour trouver la droite de régression linéaire $y = mx + c$.

(b) À quelle performance peut-on s'attendre d'un élève ayant étudié 6 heures ?

(c) Selon ce modèle, combien d'heures faut-il étudier pour avoir une note parfaite ?

11. Un ingénieur collecte des données expérimentales sur la relation entre la température en Celsius (T) et la pression en bar (P) dans un système. Les données sont représentées dans le tableau suivant [TI] :

Température (T)	Pression (P)
0	1
10	5
20	9
30	15

(a) Utilisez la méthode des moindres carrés pour ajuster un polynôme de degré 2 de la forme $P = aT^2 + bT + c$ aux données.

(b) Quelle serait alors la pression à une température de 45° ?

(c) À quelle(s) température(s) obtient une pression de 10 bar ?

12. Un économiste étudie la relation entre les dépenses de publicité en millers de dollards dans différents médias (x_1, x_2, x_3) et les ventes d'un produit (y). Les données sont représentées dans le tableau suivant[TI] :

Dépense publicitaire (x_1)	Dépense publicitaire (x_2)	Dépense publicitaire (x_3)	Ventes (y)
100	50	200	300
200	100	300	500
300	150	400	600

(a) Utilisez la méthode des moindres carrés pour ajuster une équation linéaire sur x_1, x_2, x_3 et y aux données. Combien de solutions moindres carrés trouvez-vous ?

(b) Formez l'équation linéaire $y(t) = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 + c_3(t)x_3$ où les $c_i(t)$ sont les différentes solutions moindres carrés paramétrées par t.

(c) Calculez les ventes lorsque $x_1 = 100$, $x_2 = 50$ et $x_3 = 200$ pour différentes valeurs de t. Observez-vous une différence ?

(d) Calculez les ventes lorsque $x_1 = 100$, $x_2 = 80$ et $x_3 = 120$ pour différentes valeurs de t. Observez-vous une différence ?

(e) Donnez la décomposition orthogonale de $\vec{b} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 600 \end{pmatrix}$ sur $W = \text{Col}(A)$.

(f) Calculez la distance entre $\vec{b}$ et $W = \text{Col}(A)$ pour t quelconque. Que constatez-vous ?

13. Un échantillon contient un mélange de trois substances radioactives, A,B et C, dont les constantes de désintégration sont connues. La masse de l'échantillon Q en grammes dépend de la masse initiale de chaque substance et du temps écoulé en années : $Q = A_0e^{-0.02t} + B_0e^{-0.05t} + C_0e^{-0.07t}$. [TI]

Temps t (années)	Masse Q (g)
10	61.4
13	55.7
18	47.3
21	43.5
23	40.8

Utilisez la méthode des moindres carrés pour estimer la masse initiale de chaque substance A_0, B_0 et C_0.

14. Soit le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ x = 4 \\ x + 3y = 3 \\ 2y - x = -1 \end{cases}$$

(a) Représentez graphiquement chaque équation dans un plan cartésien et expliquez pourquoi le système est incompatible.

(b) Écrivez le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Vérifiez que les colonnes de A sont orthogonales.

(d) Trouvez la solution moindres carrés du système et dessinez le point correspondant dans votre graphique.

15. Trouvez la solution moindres carrés du système $A\vec{x} = \vec{b}$ à l'aide de deux méthodes différentes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Résolvez à nouveau l'exercice 11 en suivant les étapes suivantes. L'objectif est d'adapter la deuxième méthode pour résoudre des problèmes de moindres carrés dans un cas où les colonnes de A ne sont pas orthogonales.

(a) Formez le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ correspondant à l'exercice 11.

(b) Vérifiez que les colonnes de A ne sont pas orthogonales.

(c) Créez une base orthogonale de col(A) avec le procédé de Gram-Schmidt.

(d) Utilisez la base orthogonale pour calculer la projection de $\vec{b}$ sur W=col(A) à l'aide de produits scalaires.

(e) Trouvez la solution moindres carrés en résolvant $A\tilde{x} = \vec{b}_W$.

Réponses

1.

(a) $R^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$

(b) $S^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\}$

(c) $T^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(d) $U^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(e) $V^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

2.

(a) Oui, car $\begin{pmatrix}-12 & -6 & 9 & -12\end{pmatrix}^\intercal = -6\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2$

(b) Oui, car $\begin{pmatrix}-5 & 4 & 4 & 6\end{pmatrix}^\intercal \cdot \vec{w}_1 = 0$ et $\begin{pmatrix}-5 & 4 & 4 & 6\end{pmatrix}^\intercal \cdot \vec{w}_2 = 0$

(c) $\dim W = 2$

(d) $\dim W^\perp = 2$

(e) $W^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$

3.

(a) $n = 5$ car les vecteurs ont 5 composantes

(b) $\dim W = 3$ car les colonnes de A sont LI

(c) $W^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-11\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}\\-\frac{7}{8}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(d) $\dim W^\perp = 2$

(e) $W^\perp$ car c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2

4.

(a) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

(b) $\vec{v}_W = Ac = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

(c) Oui, on arrive au même résultat. La projection orthogonale (ch.8) sur un sous-espace vectoriel de dimension 1 correspond exactement à la projection d'un vecteur sur un vecteur définie au chapitre 1. La projection orthogonale est donc une généralisation de la projection du chapitre 1.

(d) $\vec{v} = \vec{v}_W + \vec{v}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(e) $\text{dist}(\vec{v}, W) = ||\vec{v}_{W^\perp}|| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$

5.

(a) $\vec{x} = \vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}3\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

(b) $||\vec{x}_{W^\perp}|| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.121$

6.

(a) $\vec{y} = \vec{y}_W + \vec{y}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}0\\ -2\\ 5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

(b) $\vec{y} = \vec{y}_W + \vec{y}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 6\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ 0\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

(c) $\vec{y} = \vec{y}_W + \vec{y}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 3\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 3\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}$

(d) $\vec{y} = \vec{y}_W + \vec{y}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}0\\ 3\\ 3\\ 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

(e) $\vec{y} = \vec{y}_W + \vec{y}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\\ -4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 2\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$

(f) $\vec{y} = \vec{y}_W + \vec{y}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}8\\ 7\\ 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

7.

(a) Oui, car $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$ et $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$.

(b) Non, car les vecteurs ne sont pas unitaires.

(c) Il faudrait diviser chaque vecteur par sa norme : $\vec{u}_i = \frac{1}{||\vec{v}_i||}\vec{v}_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

8.

(a) $\mathscr{A}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{21}{10} \\ \frac{-7}{10} \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\mathscr{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\mathscr{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{25}{9} \\ \frac{64}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{221}{265} \\ \frac{39}{53} \\ -\frac{52}{265} \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\mathscr{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{17}{10} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{94}{51} \\ -\frac{26}{51} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{30}{17} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{9}{92} \\ \frac{21}{92} \\ \frac{15}{92} \\ -\frac{9}{92} \end{pmatrix} \right\}$

9.

(a) $\mathscr{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{10}{21} \\ \frac{68}{21} \\ -\frac{22}{21} \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\vec{x}_W = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{53}{62} \\ -\frac{43}{31} \\ \frac{181}{62} \end{pmatrix}$

(c) $\mathscr{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Une base d'un seul vecteur est automatiquement orthogonale, donc $\mathscr{Z}$ est la base orthogonale

(e) $\vec{x}_{W^\perp} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{z}_1}{\vec{z}_1\cdot\vec{z}_1}\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} \frac{133}{62} \\ -\frac{19}{31} \\ -\frac{57}{62} \end{pmatrix}$

(f) On vérifie que $\vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp} = \vec{x}$

10.

(a) $y = \frac{270}{59}x + \frac{3130}{59}$ ou $y = 4.5763x + 53.0508$

(b) 80.5%

(c) Environ 10.26 heures d'étude

11.

(a) $P = \frac{1}{200}T^2 + \frac{31}{100}T + \frac{11}{10}$ ou $P = 0.005T^2 + 0.31T + 1.1$

(b) 25.175 bar

(c) -83.35°C et 21.35°C

12.

(a) Infinité de solutions : $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $y(t) = \left(-\frac{1}{6} - \frac{t}{2}\right)x_1 + tx_2 + \frac{5}{3}x_3$

(c) $y(t) = 316.67$ peu importe la valeur de t.

(d) $y(t)$ va varier selon t tant que les x_i ne sont pas ceux d'une des trois équations de départ.

(e) $\vec{b} = \vec{b}_W + \vec{b}_{W^\perp} = \begin{pmatrix} 950/3 \\ 1400/3 \\ 1850/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -50/3 \\ 100/3 \\ -50/3 \end{pmatrix}$

(f) $\text{dist}(\vec{b}, W) = ||\vec{b}_{W^\perp}|| = \frac{50\sqrt{6}}{3}$. La distance est indépendante de t. Donc toutes les solutions moindres carrées trouvées sont d'aussi bonnes approximations avec les données initiales fournies. Il faudrait donc davantage de données initiales pour trouver une solution unique.

13. $A_0 = 49.6484g, B_0 = 15.8419g, C_0 = 22.5033g$

14.

(a) Chaque équation représente une droite dans le plan et le système est incompatible car il n'y a pas d'intersection commune aux 4 droites.

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ donc les colonnes sont orthogonales.

(d) $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$

15.

(a) $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ -1/33 \end{pmatrix}$

16.

(a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 900 & 30 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0, \quad \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0, \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = 0$

(c) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 400 \\ 900 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 0 \\ 310 \\ 260 \\ -150 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{b}_W = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 \\ 47 \\ 93 \\ 149 \end{pmatrix}$

(e) La solution moindre carrée est $P = \frac{1}{200} T^2 + \frac{31}{100} T + \frac{11}{10}$ ou $P = 0.005T^2 + 0.31T + 1.1$