MAT380

Algèbre Linéaire

Jean-Michel Lemay

jean-michel.lemay@etsmtl.ca

Chapitre 4 : Déterminants

- 4.1 Définition et calcul
- 4.2 Développement en cofacteurs
- 4.3 Aires et volumes

Objectifs d’apprentissage

- Calculer des déterminants
- Identifier les matrices singulières à l’aide de déterminants
- Calculer des aires et volumes à l’aide de déterminants

Mots clés : Déterminants, Cofacteurs

4.1 Définition et calcul

On étudie dans ce chapitre une fonction importante sur les matrices carrées : **Le déterminant**.
Le déterminant capture en un nombre des propriétés importantes comme l'inversibilité d'une matrice. On découvrira également comment il peut servir à calculer des aires et des volumes.
Il est également très utile dans plusieurs applications avancées qui dépasse le cadre de ce cours.

Déterminant

Définition : Le déterminant est une fonction qui prend en entrée une matrice carrée A et lui associe l'unique nombre réel, noté $\det(A)$ ou $|A|$, tel que :

i) $\det(I) = 1$

ii) Un échange de lignes multiplie le déterminant par -1

iii) La multiplication d'une ligne par un scalaire k multiplie la valeur du déterminant par k

iv) L'addition du multiple d'une ligne à une autre ligne ne change pas la valeur du déterminant

Exemple : On peut obtenir le déterminant d'une matrice en obtenant sa forme échelonnée réduite.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$-\left(-\frac{1}{7}\right)\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\left(-\frac{1}{7}\right)\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)\det(A) = 1$$

$$\det(A) = 7$$

Déterminant 2x2

Théorème : le déterminant d'une matrice 2 x 2 peut se calculer par

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Preuve :

Propriétés du déterminant (1)

i) Si la matrice A contient une ligne de zéros, alors $\det(A) = 0$.

ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.

Preuve :

Calcul d'un déterminant par la forme échelonnée

Théorème : Soit A une matrice et U sa forme échelonnée obtenue sans multiplication de lignes par un scalaire. Alors,

$$\det(A) = \begin{cases} (-1)^r \cdot (produit\ des\ pivots\ de\ U) & si\ A\ est\ inversible, \\ 0 & si\ A\ est\ singulière \end{cases}$$

où r est le nombre d'échanges de lignes utilisés.

Exemple 1 : *Calculer les déterminants des matrices suivantes.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Inversibilité d'une matrice

Corollaire : Les résultats suivant est une conséquence directe du théorème précédent.

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Exemple 2 : *Déterminez si les matrices suivantes sont inversibles ou singulières*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Propriétés du déterminant (2)

iii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

iv) $\det(A^{-1}) = 1/\det(\mathrm{A})$

v) $\det(A^n) = (\det A)^n$

vi) $\det(A^T) = \det(A)$

Remarque : La dernière propriété implique en particulier que toutes les opérations élémentaires sur les lignes peuvent également être faites sur des colonnes !

Exemple 3 : Calculez le déterminant de la matrice suivante à l'aide de la propriété vi).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

4.2 Développement en cofacteurs

On décrit dans cette section une recette pour décomposer des déterminants de matrices $n \; x \; n$ en déterminants de plus petites tailles.

Définition : Le **cofacteur (i,j)** d'une matrice A est le nombre C_{ij} défini par

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en retirant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Remarque : Le signe $(-1)^{i+j}$ suit un motif d'alternance en échiquier tel que

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement en cofacteurs

Théorème : Le déterminant d'une matrice A_{nxn} d'éléments a_{ij} peut se développer selon la ligne i comme :

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Ou selon la colonne j comme :

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Remarque : Ce théorème donne une recette de calcul différente pour les déterminants qui peut s'appliquer itérativement jusqu'à l'obtention de déterminants 2x2 qui sont faciles à calculer.

Exemple 4 : Calculez le déterminant de la matrice suivante à l'aide d'un développement en cofacteurs.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 5 : Vérifiez que le produit vectoriel de $\vec{u} = (1,4,-1)$ avec $\vec{v} = (2,0,3)$ peut se calculer par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Remarque : Cette méthode fonctionne pour tout produit vectoriel de vecteurs exprimés dans la base canonique.

Combiner les stratégies

On a donc trois stratégies pour calculer des déterminants qu'on peut combiner pour faciliter nos calculs.

1) ***Formule pour un déterminant 2x2***

2) ***Utiliser des opérations élémentaires pour simplifier la matrice***

3) ***Développer le déterminant en cofacteurs***

Exemple 6 : Calculez le déterminant de la matrice suivante.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Note : deux résultats classiques

On énonce ici deux résultats classiques d'algèbre linéaire que nous n'utiliserons pas dans le cours. Leur utilité est généralement théorique (pour des preuves), mais d'un point de vue calculatoire ces algorithmes sont très inefficaces.

1. Matrice inverse et cofacteurs :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

2. Résoudre $Ax = b$ par la méthode de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

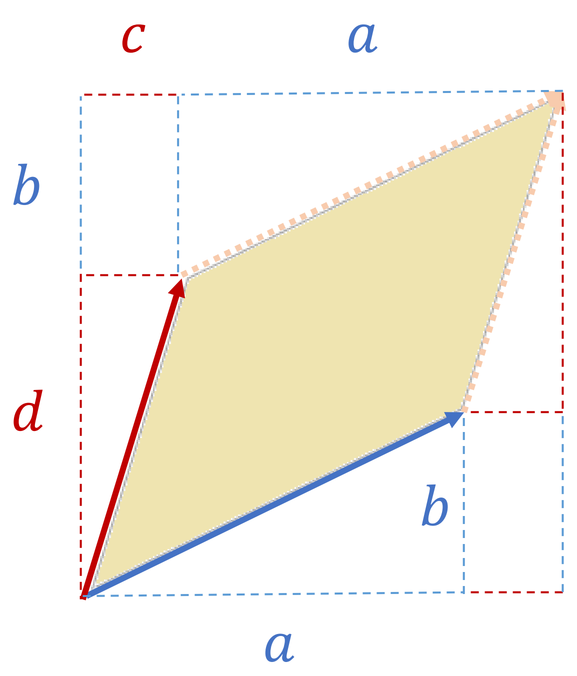
où A_i est la matrice A avec la $i^{\text{ème}}$ colonne remplacée par b.

4.3 Aires et volumes

Que représente géométriquement le déterminant d'une matrice ?

Soit deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Calculons l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs.

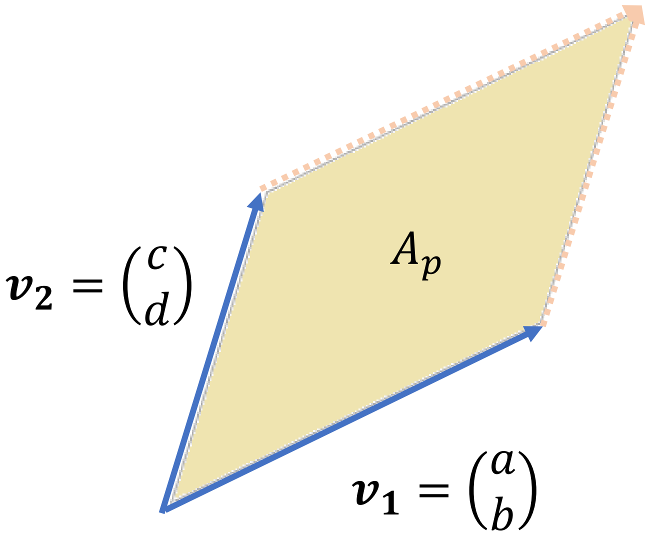


Aire et déterminant 2x2

Que représente géométriquement le déterminant d'une matrice ?

Théorème : La valeur absolue du déterminant d'une matrice A_{2x2} correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les colonnes de A.

$$|\det A| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = A_p$$

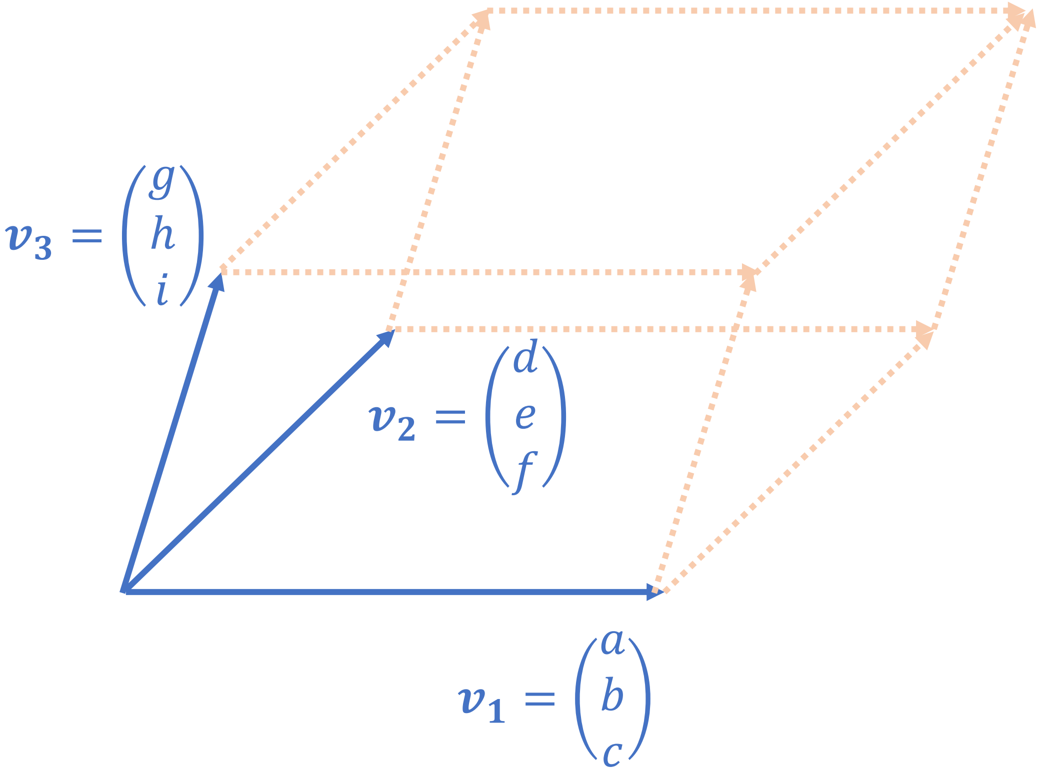


Volume et déterminant 3x3

Que représente géométriquement le déterminant d'une matrice ?

Théorème : La valeur absolue du déterminant d'une matrice A_{3x3} correspond au volume du parallélépipède engendré par les colonnes de A.

$$|\det A| = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = Vol_p$$



(Hyper)volume et déterminant nxn

On peut généraliser les résultats précédents avec le théorème suivant.

Définition : Le parallélépipède engendré par les n vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in \mathbb{R}^n$ est le sous-ensemble de points suivant :

$$P = \{a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \mid 0 \leq a_i \leq 1, i = 1,2,\dots,n\}$$

Théorème : Si A est la matrice formée des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in \mathbb{R}^n$ et P est le parallélépipède engendré par ces mêmes vecteurs, alors

$$|\det A| = Vol(P).$$

Exemple 7 :

a) Calculez l'aire du triangle formé par les points $(-1,-2), (2,-1)$ et $(1{,}3)$.

Soient $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculez le volume du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs.

c) Calculez le volume du tétraèdre engendré par ces trois vecteurs.

Exemple 8 :

a) Les points $(1,2)$; $(3,9)$ et $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ sont-ils colinéaires ?

b) Les points $(0,0,1)$; $\left(0,1,\frac{3}{4}\right)$; $(1,0,3)$ et $(1,4,2)$ sont-ils coplanaires ?