
MAT380

Algèbre Linéaire

Jean-Michel Lemay

jean-michel.lemay@etsmtl.ca

Chapitre 5 :

Transformations linéaires

- 5.1 Transformations matricielles
 - 5.2 Inversibilité d'une transformation
 - 5.3 Transformations linéaires
-

Objectifs d'apprentissage

- Comprendre la correspondance entre les transformations linéaires et les matrices
- Apprendre à reconnaître les transformations linéaires, injectives et surjectives
- Visualiser l'effet géométrique de certaines transformations linéaires

Mots clés : Transformations linéaires, Injectivité, Surjectivité, Inversibilité,
Transformations matricielles

5.1 Transformations matricielles

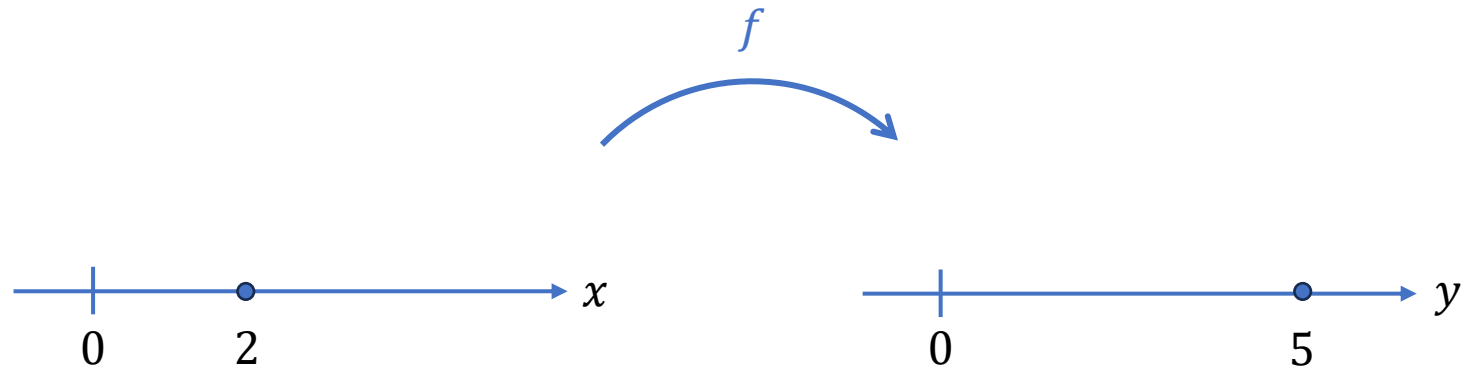
On étudie dans ce chapitre certaines fonctions qui transforment des vecteurs en vecteurs et découvrir leur lien avec les matrices. On débute avec un rappel sur les fonctions.

Une **fonction réelle** prend un nombre x en entrée et le transforme en un nombre y en sortie :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Ex : $f(x) = 3x - 1$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = 3x - 1$$
$$2 \mapsto y = 5$$



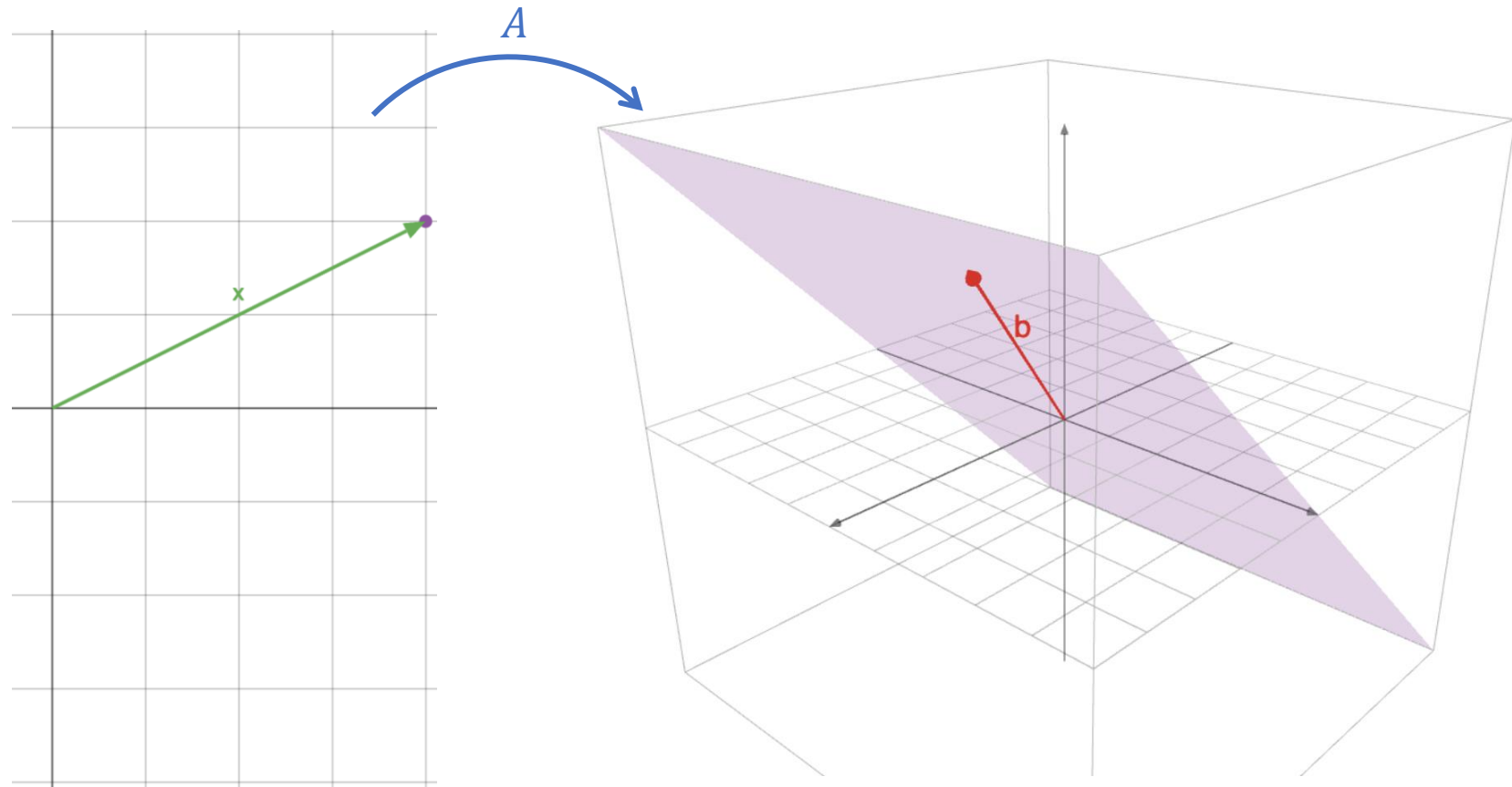
On peut penser à une matrice A comme une fonction qui transforme un vecteur x en un vecteur b

$$A_{m \times n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto b = Ax$$

Exemple :

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Exemple 1 :

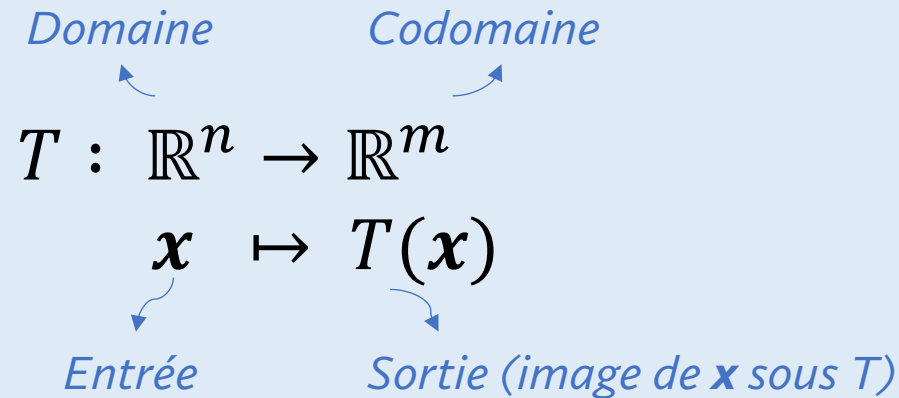
a) Représentez graphiquement la transformation de quelques vecteurs par la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Décrivez en mots la transformation effectuée par R .

Transformations

Définitions : Une **transformation de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$** est une règle qui associe à chaque vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur $T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.



On appelle l'**image de T** le sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ qui contient toutes les sorties :

$$Im\ T = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Remarque : Transformation, Application et Fonction sont tous synonymes.

Transformations matricielles

Définition : Dans le cas particulier où une transformation est donnée par une matrice, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, on dit qu'il s'agit d'une **transformation matricielle**.

Remarques : Si $A_{m \times n}$ on a alors que

- L'image de T est l'espace engendré par les colonnes de A

$$\text{Im } T = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \text{col } A$$

- $\text{dom } T = \mathbb{R}^n$ où n = nombre de colonnes de A
- $\text{codom } T = \mathbb{R}^m$ où m = nombre de lignes de A

Remarque : Ce ne sont pas toutes les transformations qui sont matricielles.

Ex : La transformation suivante ne s'exprime pas comme une matrice.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x) \\ y^2 \end{pmatrix}$$

5.2 Inversibilité d'une transformation

Définition : Une transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite **inversible** s'il existe une autre transformation $T^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$T^{-1}(T(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On explore dans cette section deux notions qui nous aideront à répondre à la question :

Quand une transformation est-elle inversible ?

Injectivité

Définition : Une transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est **injective** si $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, il existe au plus un seul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

De façons équivalentes, T est injective si :

- $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède 1 ou 0 solution $\mathbf{x}$
- Chaque entrée $\mathbf{x}$ donne une sortie $\mathbf{b}$ différente
- Si $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, alors $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

Non-injectivité

Au contraire, T n'est pas injective dès qu'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- Il existe un $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ possède plus d'une solution $\mathbf{x}$
- Il existe deux entrées avec la même sortie
- Il existe $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$

Exemple 2 : Déterminez si les transformations suivantes sont injectives.

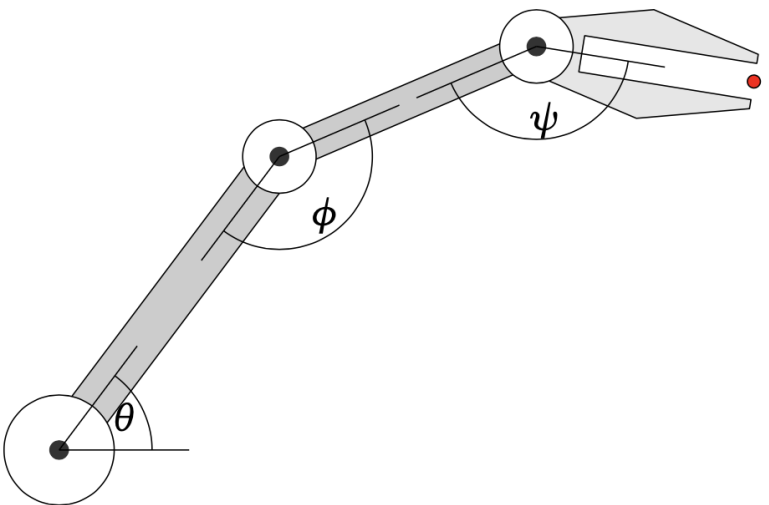
a) $f: x \mapsto 3x + 1$

b) $g: x \mapsto x^2$

c) $A: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

d) *la transformation qui prend les angles et donne la position de la pince du bras robotique*

$f: \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



The diagram illustrates a 3-link robotic arm. The first link is at an angle θ from the horizontal. The second link is at an angle ϕ relative to the extension of the first link. The third link is at an angle ψ relative to the extension of the second link. The end effector is a gripper. The position of the gripper tip is labeled $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\theta, \phi, \psi)$ in red text.

Transformations matricielles injectives

Théorème : Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation matricielle donnée par la matrice $A_{m \times n}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. T est injective
2. $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède au plus une solution
3. $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution unique ou est incompatible
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède seulement la solution triviale
5. Les colonnes de A sont linéairements indépendantes
6. A possède un pivot dans chaque colonne
7. $\text{Im } A$ est un sous-espace de dimension n

Exemple 3 : Déterminez si les transformations matricielles correspondant aux matrices suivantes sont injectives.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Surjectivité

Définition : Une transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est **surjective** si $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, il existe au moins un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

De façons équivalentes, T est surjective si :

- Chaque $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ est la sortie d'au moins une entrée $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- L'image correspond au codomaine : $\text{Im } T = \mathbb{R}^m$

Non-surjectivité

Au contraire, T n'est pas surjective dès qu'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- Il existe un $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ n'a pas de solution $\mathbf{x}$
- Il existe un $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ qui n'est pas la sortie d'aucune entrée
- L'image ne couvre pas tout le codomaine : $Im\ T \subsetneq \mathbb{R}^m$

Exemple 4 : Déterminez si les transformations suivantes sont surjectives.

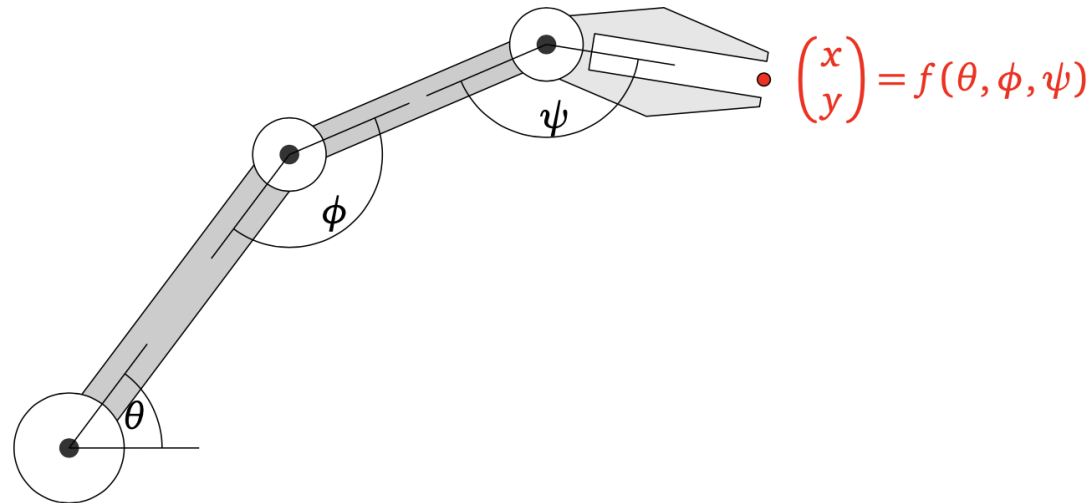
a) $f: x \mapsto 3x + 1$

b) $g: x \mapsto x^2$

c) $A: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

d) *la transformation qui prend les angles et donne la position de la pince du bras robotique*

$$f: \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformations matricielles surjectives

Théorème : Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation matricielle donnée par la matrice $A_{m \times n}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. T est surjective
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède au moins une solution $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
4. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$
5. A possède un pivot dans chaque ligne
6. $\text{Im } A$ est un sous-espace de dimension m

Exemple 5 : Déterminez si les transformations matricielles correspondant aux matrices suivantes sont surjectives.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comparaison

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est ...

Injective si

- $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ a au plus une solution
- Les colonnes de A sont Lin. Indép.
- A a un pivot dans chaque colonne
- $\text{Im } A$ est de dimension n

Surjective si

- $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ a au moins une solution
- Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$
- A a un pivot dans chaque ligne
- $\text{Im } A$ est de dimension m

Remarques :

*Une transformation matricielle ne peut être injective et surjective simultanément que si la matrice est carrée.
De plus, une matrice carrée injective est automatiquement surjective et vice-versa.*

Inversibilité d'une transformation

Quand une transformation est-elle inversible ?

Théorème : Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation donnée par la matrice $A_{m \times n}$. La transformation est **inversible** si et seulement si :

- $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ a exactement une solution $\mathbf{x} \ \forall \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- T est injective et surjective

Remarque : Une matrice doit donc être nécessairement carrée pour engendrer une transformation inversible.

Théorème de l'inverse

Théorème : Soit $A_{n \times n}$ une matrice carrée. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

C'est-à-dire que si une propriété est vraie, alors toutes les autres le sont aussi.

Si une propriété est fausse, alors toutes les autres le sont aussi.

1. A est inversible
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution unique pour tout $\mathbf{b}$
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a pour unique solution la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
4. A possède n pivots
5. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes
6. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$
7. La transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est injective
8. La transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est surjective
9. $\det(A) \neq 0$

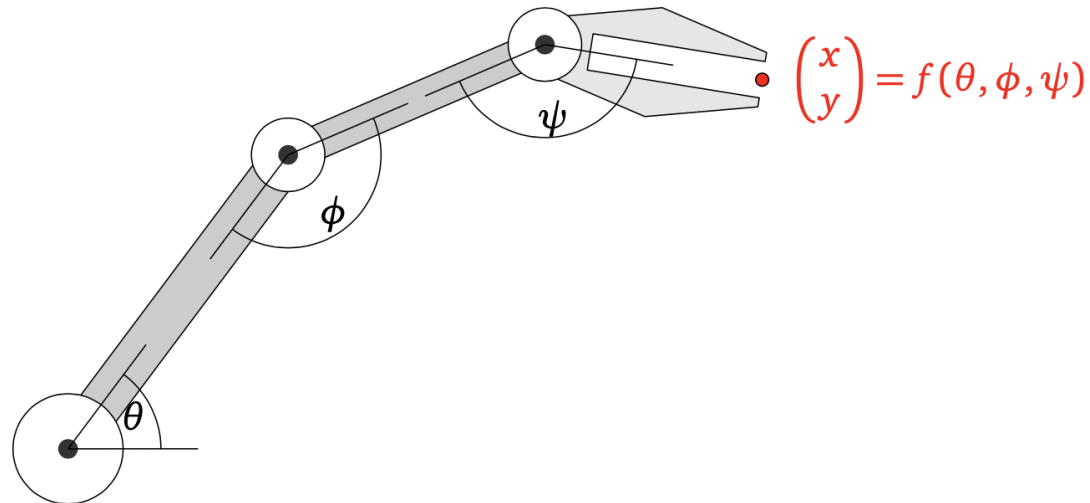
5.3 Transformations linéaires

On se concentre dans cette section sur deux questions :

*Comment savoir si une transformation donnée est matricielle ?
Si oui, quelle est la matrice qui lui correspond ?*

Ex : La transformation $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui effectue une rotation de 45° en sens antihoraire autour de l'origine

Ex : La transformation qui donne la position de la pince d'un bras robotique à partir de ses angles



Transformations linéaires

Définition : Une transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite **linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \in \mathbb{R}$.

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

2. $T(k\mathbf{u}) = k T(\mathbf{u})$

Remarque : Les transformations matricielles vérifient ces deux propriétés

$$A(x + y) = Ax + Ay \quad \text{et} \quad A(kx) = k(Ax)$$

Donc les transformations matricielles sont linéaires. Est-ce que l'inverse est vrai aussi ?

Transformations linéaires

Théorème : Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Alors,

$$(i) \quad T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$(ii) \quad T(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = r T(\mathbf{u}) + s T(\mathbf{v})$$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall r, s \in \mathbb{R}$.

En particulier,

(i) est une condition *nécessaire*, utile pour fournir un contre-exemple, et
(ii) est une condition *suffisante*, qu'on peut donc utiliser pour prouver la linéarité.

Preuve :

Exemple 6 : Déterminez si les transformations suivantes sont linéaires.

a) $h: x \mapsto 3x$

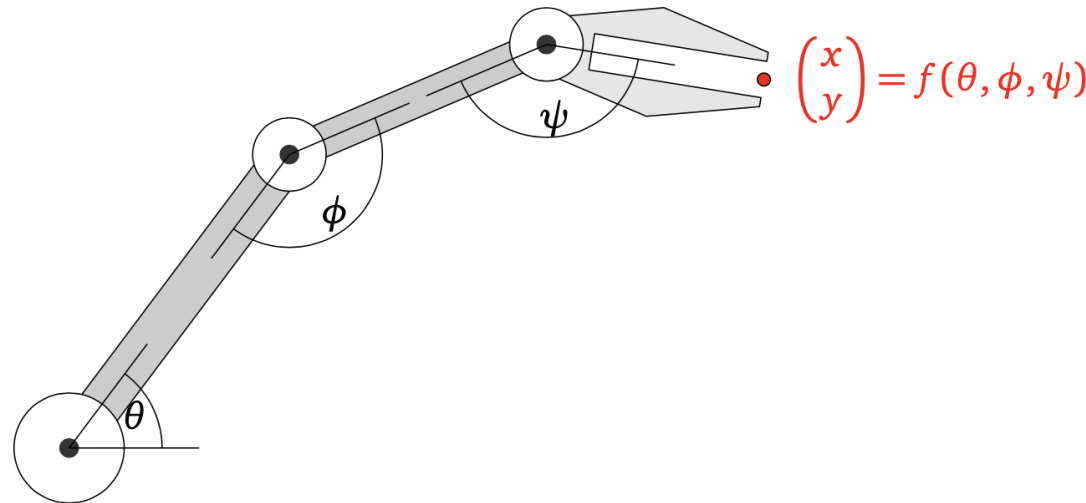
b) $f: x \mapsto 3x + 1$

c) $g: x \mapsto x^2$

d) *La transformation $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui effectue une rotation de 45° en sens antihoraire autour de l'origine*

e) *la transformation qui prend les angles et donne la position de la pince du bras robotique*

$$f: \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Rappel : Base canonique de $\mathbb{R}^n$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est formée des n vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la base :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

Où les x_i sont appelées les composantes de $\mathbf{x}$ dans la base canonique.

Transformation linéaire et base canonique

Par la propriété (ii) vue plus tôt :

$$(ii) \quad T(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = r T(\mathbf{u}) + s T(\mathbf{v})$$

On a que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + x_3T(\mathbf{e}_3) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

La transformation T sur un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque se résume à son action sur les vecteurs de la base canonique $T(\mathbf{e}_i)$.

En d'autres mots, si on connaît l'action de la transformation sur les vecteurs de base $T(\mathbf{e}_i)$ alors on peut calculer la transformation de n'importe quel vecteur $\mathbf{x}$.

Matrice et base canonique

De plus, considérons une matrice $A_{m \times n}$ dont les colonnes sont notées $\mathbf{a}_i$.
Remarquons que :

$$A\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{a}_i$$

Donc l'action de A sur un vecteur de base canonique $\mathbf{e}_i$ est donnée par sa $i^{\text{ème}}$ colonne.

$$\text{Ex 7 : } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$$

Transformations linéaires

Théorème : Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire et $A_{m \times n}$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \dots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Alors $T(x) = Ax$. En d'autres mots, toute transformation linéaire est une transformation matricielle dont la matrice correspondante est donnée ci-haut.

Preuve :

Linéaire = Matricielle

En particulier,

Transformation linéaire $\Leftrightarrow$ Transformation matricielle

Donc toute transformation linéaire est matricielle et vice-versa.

Exemple 8 :

- a) Trouvez la matrice correspondant à la transformation linéaire $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui effectue une rotation de 45° en sens antihoraire autour de l'origine.
- b) Représentez graphiquement son action sur le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- c) Vérifiez que $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $R \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ont la même norme.
- d) Trouvez la transformation inverse R^{-1} .

Composition de transformations

Soient T et S deux transformations linéaires dont les matrices correspondantes sont A et B respectivement. Si les domaines et codomains sont compatibles, alors :

$$S \circ T(\mathbf{x}) = BA\mathbf{x}$$

En d'autres mots, la composition de transformation linéaires correspond à la multiplication matricielle.

Exemple 9 : $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculez $RS\mathbf{x}$ et $SR\mathbf{x}$ et représentez les graphiquement.

Transformations linéaires et déterminants

Le déterminant peut servir à calculer le changement d'aire ou de volume d'une région qui subit une transformation linéaire.

Théorème : Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une transformation linéaire associée à la matrice $A_{n \times n}$ et S une région de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$\text{Vol}(T(S)) = |\det A| \cdot \text{Vol}(S)$$

où $T(S) = \{T(x), x \in S\}$ est l'image de S par la transformation T .

Exemple 10 : Calculez l'aire de l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{2x - y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + 3x}{3}\right)^2 = 1.$$

Indice : Trouvez la transformation linéaire qui prend un point de l'ellipse et le transforme en un point du cercle de rayon 1 d'équation $X^2 + Y^2 = 1$.

Exemple 11: Soit S un demi-cercle de rayon 1 dans le plan cartésien.
Trouvez l'aire de la région transformée $T(S)$ donnée par le schéma ci-dessous.

